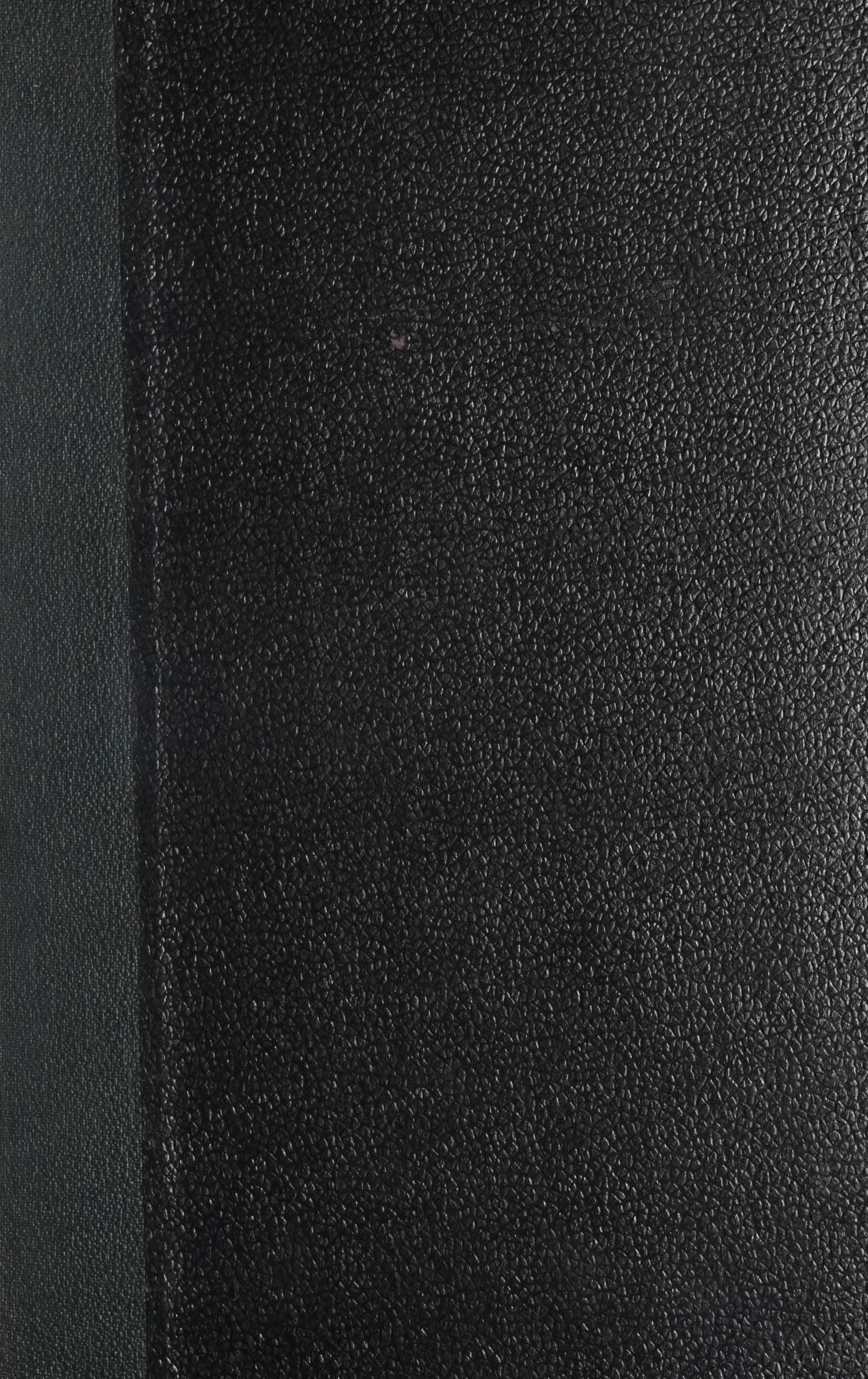


# ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

## ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

**R. MEHMKE** IN STUTTGART. UND **C. RUNGE** IN HANNOVER.

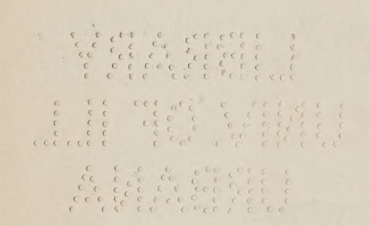
48. BAND.

MIT 8 TAFELN UND 74 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1903.



# Inhalt.



## Kleinere Mitteilungen.

## Preisaufgaben für 1904.



## Preisaufgaben für 1905.



## Auskünfte.



## Anfragen.



## Bücherschau.

# Über Induktionen in rotierenden Leitern.

Von Richard Gans in Strafsburg.

## Einleitung.

Die Induktionsströme, welche in rotierenden Leitern durch ein magnetisches Feld hervorgerufen werden, sind bereits mehrfach der Gegenstand theoretischer Behandlung gewesen.

Wir zitieren folgende Arbeiten über dies Gebiet, ohne damit einen vollständigen Litteraturnachweis geben zu wollen.

Emil Jochmann, Über die durch einen Magneten in einem rotierenden Stromleiter inducierten elektrischen Ströme. Crelle's Journal 63, pag. 158. 1864.

—, Über die durch Magnetpole in rotierenden körperlichen Leitern inducierten elektrischen Ströme. Pogg. Ann. 122, pag. 214. 1864.

J. C. Maxwell, On the Induction of Electric Currents in an Infinite Plane Sheet of uniform conductivity. Proc. of Roy. Soc. XXX, pag. 160. 1872.

C. Niven, On the Induction of Electric Currents in Infinite Plates and Spherical Shells, Proc. of. Royal Soc. XXX, pag. 113. 1880.

Heinr. Hertz, Über die Induktion in rotierenden Kugeln. 1880. Ges. Werke. Bd. I, pag. 37. 1895.

F. Himstedt, Einige Versuche über Induktion in körperlichen Leitern. Wied. Ann. 11, pag. 812. 1880.

J. Larmor, Electromagnetic Induction in Conducting Sheets and Solid Bodies. Philos. Magazine 17, pag. 1. 1884.

Wir wollen das elektromagnetische Feld aus den Hertzschen Erweiterungen der Maxwellschen Gleichungen für bewegte Körper bestimmen für den Fall, dafs in einem gegebenen statischen magnetischen Felde ein leitender Rotationskörper sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um seine Achse dreht. Wir setzen dabei voraus, dafs die Geschwindigkeit der Körperelemente klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sei, d. h. wir beschränken uns auf die Induktion erster Ordnung. Ferner wollen wir das Feld erst für die Zeit bestimmen, in welcher der Vorgang als stationär im Raume angesehen werden kann.

Wir werden die Formeln zuerst ganz allgemein lassen, sodann die speziellen Fälle der Kugel, des verlängerten und abgeplatteten Rotationsellipsoids und schliefslich der Aragoschen Scheibe behandeln.

Die so erhaltenen Resultate wenden wir dann auf das mechanische Problem an, dafs ein unifilar oder bifilar aufgehängter Rotationskörper um seine Gleichgewichtslage schwingt. Es wird leicht sein, die Bewegungsgleichung für diesen Fall aufzustellen und zu integrieren.

## § 1. Bezeichnungen und einige Vektorbeziehungen.

Bevor wir jedoch an unser eigentliches Problem gehen, wollen wir einige Bezeichnungen angeben, deren wir uns bedienen werden, und welche mehr oder weniger allgemein im Gebrauch sind.

Es wird zweckmäfsig sein, krummlinige, orthogonale Koordinaten einzuführen. Da wir es mit Rotationskörpern zu thun haben, so ist es natürlich, dafs wir als eine Koordinate das Azimut $\varphi$ gegen eine feste Ebene durch die Rotationsachse wählen, dann lassen sich die Beziehungen zwischen den kartesischen und den krummlinigen Koordinaten auf folgende Weise darstellen.

$$
\begin{aligned}
x &= f_1(p,q)\cos\varphi \\
y &= f_1(p,q)\sin\varphi \\
z &= f_2(p,q)
\end{aligned} \tag{1}
$$

und zwar sollen $p$, $q$, $\varphi$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem darstellen.

Durch Differentiation möge sich ergeben

$$
\begin{aligned}
dx &= a\,dp + a'\,dq + a''\,d\varphi \\
dy &= b\,dp + b'\,dq + b''\,d\varphi \\
dz &= c\,dp + c'\,dq + c''\,d\varphi.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Dann ist

$$ds^2 = e\,dp^2 + e'\,dq^2 + e''\,d\varphi^2, \tag{3}$$

wenn

$$e = a^2 + b^2 + c^2; \quad e' = a'^2 + b'^2 + c'^2; \quad e'' = a''^2 + b''^2 + c''^2 \tag{4}$$

ist.

Sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Vektor mit den Komponenten $A_p$, $A_q$, $A_\varphi$, so ist seine Divergenz ein durch folgende Gleichung definiertes Skalar

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \frac{1}{\sqrt{ee'e''}}\left(\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{e'e''}A_p + \frac{\partial}{\partial q}\sqrt{e''e}A_q + \sqrt{ee'}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right). \tag{5}$$

Aus einem Vektor $\mathfrak{A}$ leiten wir einen neuen Vektor $\mathfrak{B}$ ab, den wir den Curl von $\mathfrak{A}$ nennen, durch folgende Beziehung

$$(6) \qquad B_p = \frac{1}{\sqrt{e'e''}}\left(\frac{\partial \sqrt{e''} A_\varphi}{\partial q} - \frac{\partial \sqrt{e'} A_q}{\partial \varphi}\right).$$

Die anderen Komponenten erhält man hier, wie im folgenden durch zyklische Vertauschung von

$$p, q, \varphi$$
$$e, e', e''.$$

Das skalare Produkt $U$ zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ leitet sich aus diesen folgendermaſsen ab:

$$(7) \qquad U = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = A_p B_p + A_q B_q + A_\varphi B_\varphi$$

Das Vektorprodukt $\mathfrak{C}$ zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist folgender Vektor $\mathfrak{C} = \text{prod}\ (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$

$$(8) \qquad C_p = A_q B_\varphi - A_\varphi B_q$$

u. s. w.

Wir nennen den Vektor $\mathfrak{A}$ den Gradienten des Skalars $U$, in Formel: $\mathfrak{A} = \text{grad}\ U$, wenn

$$(9) \qquad A_p = -\frac{\partial U}{\sqrt{e}\,\partial p}$$

u. s. w.

Es bestehen folgende Beziehungen zwischen den so definierten Gröſsen, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ Vektoren, $U$ ein Skalar bezeichnet:

$$(10) \qquad -\text{div grad}\ U = \Delta U,$$

wo $\Delta$ das Zeichen für den zweiten Laméschen Differentialparameter ist, der folgendermaſsen definiert ist:

$$(11) \qquad \Delta U = \frac{1}{\sqrt{ee'e''}}\left\{\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{e'e''}{e}}\frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\sqrt{\frac{e''e}{e'}}\frac{\partial U}{\partial q} + \sqrt{\frac{ee'}{e''}}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right\}.$$

Ferner ist:

$$(12) \qquad \text{div curl}\ \mathfrak{A} = 0$$

$$(13) \qquad \text{div prod}\ \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\ \text{curl}\ \mathfrak{A} - \mathfrak{A}\ \text{curl}\ \mathfrak{B}$$

$$(14) \qquad \text{div}\ (\mathfrak{A} U) = U\ \text{div}\ \mathfrak{A} - \mathfrak{A}\ \text{grad}\ U$$

$$(15) \qquad \text{curl grad}\ U = 0.$$

Wir werden durchweg die $p$-Komponente eines Vektors durch den Index $p$ bezeichnen, sodaſs wir schreiben werden:

$$A_p; \quad \text{curl}_p \mathfrak{B}; \quad \text{prod}_p \mathfrak{C}\ \text{u. s. w.}^{1)}$$

1) Wegen dieses Paragraphen vergl. man H. Weber-Riemann, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik Bd. I. 1900.

## § 2. Die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes.

Da die Geschwindigkeiten, welche die Raumelemente unseres Körpers haben, klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sein sollen, so können wir die Gleichungen anwenden, welche Hertz als Verallgemeinerung der Maxwellschen Gleichungen für bewegte Medien aufgestellt hat. Dieselben lauten[1]):

$$\text{I.} \quad -c \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\operatorname{curl} \operatorname{prod} \mu \mathfrak{U} \mathfrak{M} + \mathfrak{U} \cdot \operatorname{div} \mu \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$$

$$\text{II.} \quad +c \operatorname{curl} \mathfrak{M} = -\operatorname{curl} \operatorname{prod} \varepsilon \mathfrak{U} \mathfrak{E} + \mathfrak{U} \cdot \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda \mathfrak{E}.$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{E}$ den elektrischen, $\mathfrak{M}$ den magnetischen, $\mathfrak{U}$ den Geschwindigkeitsvektor; $c$ eine universelle, nur von den Maſseinheiten abhängige Konstante, $\mu$ die magnetische Permeabilität, $\varepsilon$ die Dielektrizitätskonstante, $\lambda$ die elektrische Leitfähigkeit; und zwar ist $c$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, wenn für das Vakuum $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ ist.

Wir nehmen den Leiter als vollkommen homogen an, d. h. $\varepsilon$, $\mu$, $\lambda$ sind im ganzen Leiter konstant. Ferner setzen wir voraus, daſs im Innern des Leiters kein wahrer Magnetismus vorhanden ist, daſs dort also

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} = 0$$

ist. Schlieſslich warten wir den stationären Zustand ab, sodaſs auch

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 0$$

ist. Dann gehen unsere Hauptgleichungen über in

$$\text{Ia.} \quad c \operatorname{curl} \mathfrak{E} = \mu \operatorname{curl} \operatorname{prod} \mathfrak{U} \mathfrak{M}$$

$$\text{IIa.} \quad c \operatorname{curl} \mathfrak{M} = -\varepsilon \operatorname{curl} \operatorname{prod} \mathfrak{U} \mathfrak{E} + \varepsilon \mathfrak{U} \operatorname{div} \mathfrak{E} + 4\pi\lambda \mathfrak{E}.$$

Bilden wir die Divergenz des durch Gleichung IIa gegebenen Vektors, so ergiebt sich unter Berücksichtigung von § 1 (12)

$$(1) \qquad 4\pi\lambda \operatorname{div} \mathfrak{E} + \varepsilon \operatorname{div} (\mathfrak{U} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E}) = 0.$$

Wenden wir auf das zweite Glied dieser Gleichung die durch § 1 (14) gegebene Beziehung an, so wird

$$(2) \qquad \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \operatorname{div} \mathfrak{E} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{U} - \mathfrak{U} \operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0.$$

---

1) Siehe z. B. E. Cohn, Das elektromagn. Feld. 1900. S. 534. Cohn bezeichnet nicht genau so wie wir; nennen wir sein $\varepsilon$ und $\mu$ für den Augenblick $\varepsilon'$ und $\mu'$, so besteht zwischen seinen und den hier gebrauchten Konstanten die Beziehung:

$$4\pi V = c; \quad 4\pi\varepsilon' = \varepsilon; \quad 4\pi\mu' = \mu.$$

Dadurch vermeidet Cohn den Faktor $4\pi$ in der zweiten Grundgleichung.

Da $\mathfrak{U}$ der Geschwindigkeitsvektor für die Bewegung eines starren Systems ist, so ist

(3) $$\operatorname{div} \mathfrak{U} = 0;$$

da ferner die Bewegung eine reine Drehung um die Rotationsachse sein soll, so ist

$$U_p = 0; \quad U_q = 0; \quad U_\varphi = \sqrt{e''}\,\omega,$$

wo $\omega$ die konstante Winkelgeschwindigkeit bedeutet. So reduziert sich (2) auf:

(4) $$\operatorname{div} \mathfrak{E} + \frac{\varepsilon\omega}{4\pi\lambda} \frac{\partial}{\partial\varphi} \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0.$$

Da aber div $\mathfrak{E}$ als Funktion von $\varphi$ periodisch mit der reellen Periode $2\pi$ sein muſs, so kann (4) nur erfüllt werden durch

(5) $$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0.$$

Aus Ia ergiebt sich mit Benutzung von § 1 (15):

(6) $$\frac{c}{\mu} \mathfrak{E} = \operatorname{prod} \mathfrak{U}\,\mathfrak{M} + \operatorname{grad} V.$$

$V$ bestimmt sich auf folgende Weise:

Wir bilden die Divergenz von (6) unter Berücksichtigung von (5), dann ergiebt sich wegen § 1 (10):

(7) $$\Delta V = \operatorname{div} \operatorname{prod} \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{M}.$$

## § 3. Die Grenzbedingung für $V$.

An den Flächen, an welchen verschiedene Materialien zusammenstoſsen, sind die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ stetig. Diese Thatsache haben wir auf die Oberfläche unseres Rotationskörpers anzuwenden.

Auſserhalb desselben ist $\mathfrak{U} = 0$ und $\lambda = 0$, also ergiebt sich aus § 2 IIa, daſs an der Oberfläche, welche einem konstanten $p = p_0$ entsprechen möge, im Auſsenraume

$$\operatorname{curl}_p \mathfrak{M} = 0$$

ist. Dasselbe gilt also auch von $\operatorname{curl}_p \mathfrak{M}$ an der Innenseite der Oberfläche. Dort muſs demnach die Gleichung gelten

(1) $$\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} E_p - \operatorname{curl}_p \operatorname{prod} \mathfrak{U}\,\mathfrak{E} = 0.$$

Wenden wir die Definition des § 1 auf den zweiten Term an, so wird

(2) $$E_p + \frac{\varepsilon\omega}{4\pi\lambda} \frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = 0.$$

Hier gilt dieselbe Bemerkung, welche zu § 2 (4) gemacht wurde, woraus folgt:
für $p = p_0$ ist

$$E_p = 0 \tag{3}$$

d. h. nach § 2 (6) ist für $p = p_0$

$$\mathrm{prod}_p\, \mathfrak{U}\, \mathfrak{M} + \mathrm{grad}_p\, V = 0$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \mathrm{prod}_n\, \mathfrak{U}\, \mathfrak{M}, \tag{4}$$

wenn $n$ die Normale an der Oberfläche bedeutet.

Die Gleichungen § 2 (7) und 3 (4) bestimmen $V$, wenn $\mathfrak{M}$ bekannt ist; sie sind mit einander verträglich, da die linken wie die rechten Seiten dem Gaufsschen Integralsatze genügen

$$\int_\tau \mathrm{div}\, \mathfrak{A}\, d\tau = \int_0 A_n\, d\, O,$$

wo $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Vektor ist und $n$ die nach aufsen gerichtete Normale an der Oberfläche $O$ eines beliebigen Raumes $\tau$.

### § 4. Eindeutigkeitsbeweis.

Ist in einem beliebigen Raume $\tau$ $\varDelta V$ und an seiner Oberfläche $\frac{\partial V}{\partial n}$ gegeben, so ist $V$ dadurch bis auf eine Konstante bestimmt.

Denn sind $V_1$ und $V_2$ zwei verschiedene, den obigen Bedingungen genügende Lösungen, so genügt $V' = V_1 - V_2$ den Bedingungen

$$\varDelta V' = 0 \text{ in } \tau \tag{1}$$

$$\frac{\partial V'}{\partial n} = 0 \text{ an } O. \tag{2}$$

Nun ist nach § 1 (14)

$$\mathrm{div}\,(V'\, \mathrm{grad}\, V') = V'\, \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, V' - (\mathrm{grad}\, V')^2 \tag{3}$$

oder mit Benutzung von § 1 (10)

$$(\mathrm{grad}\, V')^2 = -V' \varDelta V' - \mathrm{div}\,(V'\, \mathrm{grad}\, V'). \tag{4}$$

Die Integration über den Raum $\tau$ ergiebt unter Anwendung des Gaufsschen Integralsatzes auf den zweiten Term rechter Hand

$$\int (\mathrm{grad}\, V')^2 d\tau = 0, \tag{5}$$

d. h. $V' = \mathrm{const}$ in $\tau$ q. e. d.

Die additive Konstante in $V$, welche mathematisch unbestimmt ist, ist auch physikalisch ganz willkürlich, da nur grad $V$ reale Bedeutung hat.

## § 5. Allgemeine Bemerkungen zur Bestimmung von $V$.

Wir können ganz allgemein für jeden Körper die Bestimmung von $V$, wenn $\Delta V$ in $\tau$, $\frac{\partial V}{\partial n}$ an seiner Oberfläche gegeben ist, auf Quadraturen zurückführen.

Es sei

$$\Delta V = f_1(p, q, \varphi) \text{ in } \tau \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = f_2(p_0, q, \varphi) \text{ an } O. \tag{2}$$

Wir lösen das Problem durch Dekomposition und setzen

$$V = V_1 + V_2. \tag{3}$$

Man bestimme $V_1$ so, dafs

$$\Delta V_1 = f_1(p, q, \varphi) \tag{4}$$

werde, und es ergebe sich für $p = p_0$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} = g(p_0, q, \varphi); \tag{5}$$

dann mufs $V_2$ den Bedingungen genügen:

$$\Delta V_2 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial n} = f_2(p_0, q, \varphi) - g(p_0, q, \varphi) = h(p_0, q, \varphi). \tag{7}$$

$V_1$ bestimmt sich durch die Quadratur

$$V_1 = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f_1(p, q, \varphi)}{r}\, d\tau = -\frac{1}{4\pi}\iiint f_1(p, q, \varphi)\sqrt{ee'e''}\,\frac{dp\, dq\, d\varphi}{r}. \tag{8}$$

Diese Integration ist nach folgendem Schema ausführbar: Man bestimme partikulare Integrale der nach § 1 (11) auf krummlinige orthogonale Koordinaten transformierten Gleichung

$$\Delta U = 0,$$

welche im Innern von $\tau$ endlich bleiben und sich als Produkte dreier Faktoren $P$, $Q$, $\Phi$ darstellen lassen, von denen der erste nur von $p$, der zweite nur von $q$, der dritte nur von $\varphi$ abhängt. Die Integrale werden im allgemeinen von zwei Parametern $n$ und $\nu$ abhängen, sodafs das allgemeinste Integral lautet:

$$U = \sum_n \sum_\nu P_n^\nu Q_n^\nu \Phi_n^\nu.$$

$\Phi_n^\nu$ wird sich in der Form darstellen lassen:

$$\Phi_n^\nu = A_n^\nu \cos \nu \varphi + B_n^\nu \sin \nu \varphi,$$

$n$ wird nur diskontinuierliche Werte durchlaufen, welche sich dadurch bestimmen, dafs $Q_n^\nu$ in allen Punkten der Flächen $p =$ const. mit seinem ersten Differentialquotienten endlich und stetig sein soll.

Nach diesen Funktionen $P_n^\nu$, $Q_n^\nu$, $\cos \nu\varphi$, $\sin \nu\varphi$ entwickele man $\frac{1}{r}$, welches symmetrisch ist bezüglich der entsprechenden Koordinaten des festen und des variablen Punktes; ebenfalls entwickele man die Gröfse $f_1(p, q, \varphi)\sqrt{ee'e''}$ als Funktion von $q$ und $\varphi$ nach diesen Funktionen.

Diese Entwickelung ist mit Hilfe der sofort anzugebenden Integraleigenschaften auf Quadraturen zurückführbar.

Die soeben erwähnten Integraleigenschaften sind

$$\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \nu_1\varphi \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \nu_2\varphi \, d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \nu_1\varphi \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \nu_2\varphi \, d\varphi = 0$$

und

$$\int Q_{n_1}^\nu Q_{n_2}^\nu \psi \, dq = 0,$$

wenn sich das letzte Integral über den ganzen Variabilitätsbereich von $q$ erstreckt, sodafs das dreifache Integral auf ein einfaches bezüglich $p$ zurückgeführt ist.

Die letzte Integraleigenschaft existiert immer, wenn $Q_n^\nu$ eine harmonische Funktion ist. $\psi$ ist eine Funktion, die sich leicht aus der Normalform der Differentialgleichung 2. Ordnung ergiebt, welcher $Q_n^\nu$ genügt.[1]) Die Konvergenz einer solchen Entwickelung mufs in jedem Falle besonders bewiesen werden.

Um $V_2$ zu finden, entwickele man $h(p_0, q, \varphi)$ nach den oben erwähnten Funktionen, sodafs in den Konstanten der Entwickelung $p_0$ als Parameter auftreten wird, was durch ein bestimmtes Doppelintegral möglich ist.

Es sei

$$h(p_0, q, \varphi) = \sum_n \sum_\nu Q_n^\nu \Phi_n^\nu,$$

dann ist

$$V_2 = \sum_n \sum_\nu Q_n^\nu \Phi_n^\nu \cdot \frac{P_n^\nu(p)}{P_n^{\nu'}(p_0)}.$$

$V_2$ ist auch durch eine Quadratur bestimmbar, wenn die charakteristische Funktion des Raumes bekannt ist.[2])

1) Siehe H. Weber-Riemann, Die part. Diff. Gl. der math. Phys. Bd. II. 1901. §§ 23 u. 30.

2) Siehe H. Weber-Riemann, Die part. Diff.-Gl. der math. Phys. Bd. I. 1900. § 175.

Wir wollen in diesem Paragraphen noch die *explizite Darstellung der Differentialgleichung und der Grenzbedingung geben.*

Es ist nach § 2 (7) und nach § 3 (4)

$$\varDelta V = \operatorname{div} \operatorname{prod} \mathfrak{U}\,\mathfrak{M}$$

und für $p = p_0$

$$\frac{\partial V}{\sqrt{e}\,\partial p} = \operatorname{prod}_p \mathfrak{U}\,\mathfrak{M}.$$

Da wir nur die Induktion erster Ordnung berücksichtigen wollen, so können wir anstatt des thatsächlichen magnetischen Vektors den Vektor der statischen Verteilung in diesen Formeln setzen. Nennen wir sein Potential $\chi$, so setzen wir also

$$\mathfrak{M} = \operatorname{grad} \chi, \tag{9}$$

sodafs wir erhalten

$$\varDelta V = \operatorname{div} \operatorname{prod} \mathfrak{U} \cdot \operatorname{grad} \chi. \tag{10}$$

Nach § 1 (13) ist also:

$$\varDelta V = \operatorname{grad} \chi \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{U} - \mathfrak{U} \operatorname{curl} \operatorname{grad} \chi.$$

Der zweite Term rechter Hand ist Null nach § 1 (15), grad $\chi$ hat die Komponenten:

$$-\frac{\partial \chi}{\sqrt{e}\,\partial p}; \qquad -\frac{\partial \chi}{\sqrt{e'}\,\partial q}; \qquad -\frac{\partial \chi}{\sqrt{e''}\,\partial \varphi},$$

curl $\mathfrak{U}$ hat die Komponenten

$$\frac{\omega}{\sqrt{e'e''}}\frac{\partial e''}{\partial q}; \qquad \frac{-\omega}{\sqrt{ee''}}\frac{\partial e''}{\partial p}; \qquad 0,$$

sodafs

$$\varDelta V = -\frac{\omega}{\sqrt{ee'e''}}\left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\frac{\partial e''}{\partial q} - \frac{\partial \chi}{\partial q}\frac{\partial e''}{\partial p}\right) \tag{12}$$

wird oder nach § 1 (11)

$$\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{e'e''}{e}}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\sqrt{\frac{e''e}{e'}}\frac{\partial V}{\partial q} + \sqrt{\frac{ee'}{e''}}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -\,\omega\left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\frac{\partial e''}{\partial q} - \frac{\partial \chi}{\partial q}\frac{\partial e''}{\partial p}\right) \tag{13}$$

und für $p = p_0$ ist

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \omega\sqrt{\frac{ee''}{e'}}\frac{\partial \chi}{\partial q}. \tag{14}$$

## § 6. Der elektrische Vektor für die Kugel.

Wir wollen jetzt den von Hertz eingehend behandelten Fall ausführen, dafs eine isotrope, homogene, leitende Kugel sich in einem gegebenen statischen Magnetfelde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehe.

Wir führen Kugelkoordinaten ein durch die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta . \end{aligned}$$

Dann ist

$$(2)\qquad e = 1; \quad e' = r^2; \quad e'' = r^2 \sin^2 \vartheta .$$

Aus § 5 (13) wird

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \\ &\qquad = -2 \omega r^2 \left( \frac{\partial \chi}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \sin \vartheta \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned}$$

und aus § 5 (14) wird für $r = r_0$

$$(4)\qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \omega \sin \vartheta \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} .$$

Differentiieren wir (3) nach $r$ und ersetzen $\frac{\partial V}{\partial r}$ durch den in (4) angegebenen Wert, so wird die entstehende Gleichung

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial r^2} r^2 \sin \vartheta \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} \\ &\qquad + 2 \left( \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial r \chi}{\partial r} \right) = 0 \end{aligned}$$

identisch befriedigt, da $\chi$ der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta \chi = 0$$

im Innern der Kugel genügt.

Gleichung (4) ist also nicht nur an der Oberfläche der Kugel, sondern im ganzen Innern derselben erfüllt; d. h. die Strömung findet in konzentrischen Kugelschalen statt.

Wir erhalten $V$ durch Quadratur aus (4), indem wir $\chi$ durch Entwickelung nach Kugelfunktionen im Innern der Kugel in der Form darstellen:

$$(6)\qquad \chi = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n Y^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n .$$

Dadurch geht (4) über in

$$(7)\qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \omega \sum_{n=0}^{\infty} \sin \vartheta \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial \vartheta} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n ,$$

also

$$(8)\qquad V = \omega \sum_{n=0}^{\infty} \sin \vartheta \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial \vartheta} \frac{1}{n+1} \frac{r^{n+1}}{r_0^n} = \omega \sum_{n=0}^{\infty} \sin \vartheta \frac{\partial \chi_n}{\partial \vartheta} \frac{r}{n+1} .$$

Die Integrationskonstante darf nicht mehr von $\varphi$ und $\vartheta$ abhängen, da $V$ sonst im Centrum der Kugel unbestimmt wäre.

Nach § 2 (6) ergiebt sich $\mathfrak{E}$, nämlich

$$\mathfrak{E} = \frac{\mu}{c}(\text{prod}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{M} + \text{grad}\,V)$$

oder explizite mit Benutzung der Differentialgleichung der Kugelfunktionen:

$$(9)\qquad \begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_\vartheta &= \frac{\mu\omega}{c\sin\vartheta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{\partial^2\chi_n}{\partial\varphi^2} \\ E_\varphi &= -\frac{\mu\omega}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{\partial^2\chi_n}{\partial\vartheta\,\partial\varphi} \end{aligned}$$

Ist das magnetische Feld von $\varphi$ unabhängig, so wird keine Strömung stattfinden.

Wir wollen die Formeln (9) für die elektrische Feldintensität spezialisieren, indem wir annehmen, das magnetische Feld sei gleichförmig und senkrecht zur Rotationsachse.

Lassen wir die Feldrichtung mit der Richtung $\varphi = 0$ zusammenfallen, so wird, wenn $H$ die Feldintensität bedeutet, da $n = 1$ ist,

$$\chi = -Hr\sin\vartheta\cos\varphi$$

und also

$$(10)\qquad \begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_\vartheta &= \frac{\mu\omega}{2c}Hr\cos\varphi \\ E_\varphi &= -\frac{\mu\omega}{2c}Hr\cos\vartheta\sin\varphi. \end{aligned}$$

Bilden wir die Feldkomponenten in Richtung der $x$-, $y$-, $z$-Achse, so findet man

$$E_y = 0,$$

d. h. die Strömung findet in Ebenen statt, welche parallel zur Rotationsachse und zur magnetischen Feldrichtung sind.

Die Formeln (10) gelten auch noch, wenn die Richtung des gleichförmigen Magnetfeldes nicht senkrecht auf der Rotationsachse steht, nur bedeutet $H$ dann die Projektion des magnetischen Vektors auf eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene.

*Bemerkung.* Ein gleichförmiges Feld bleibt auch gleichförmig im *Innern* einer ins Feld gebrachten homogenen ruhenden Kugel, während es im Aufsenraum ungleichförmig wird. Nehmen wir aber an, dafs die Permeabilität des Metalls dieselbe ist, wie die der Luft, was ungefähr

für alle nicht ferromagnetischen Körper zutrifft, so wird im ganzen Raum das Feld seinen früheren Wert behalten.[1]) Diese Annahme soll für das folgende immer gemacht werden. Die Modifikationen, welche ohne diese Voraussetzungen an den Resultaten stattfinden, sind leicht zu übersehen.

Der elektrische Vektor im Aufsenraum wäre nach den Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$
$$\operatorname{curl} \mathfrak{E} = 0$$
$$\lim_{r=\infty} r^2 \mathfrak{E} \text{ endlich}$$

zu bestimmen.

Ferner müssen die Tangentialkomponenten an der Oberfläche der Kugel stetig in die für den Innenraum geltenden Werte übergehen, d. h. an der Oberfläche darf curl $\mathfrak{E}$ im Innenraume keine Normalkomponente haben. Dies ist aber nicht der Fall nach unserer Bestimmung von $\mathfrak{E}$; wir haben also nur einen angenäherten Wert gefunden, mit dem wir uns aber begnügen wollen. Wir verzichten somit darauf, $\mathfrak{E}$ im Aufsenraum zu finden, umsomehr als wir die elektrische Energie zur Lösung des mechanischen Problems nicht brauchen werden.

## § 7. Der magnetische Vektor.

Es erübrigt noch, den magnetischen Vektor zu berechnen.

Nach § 2 IIa ist im Innenraume mit Berücksichtigung von § 2 (5)

$$c \operatorname{curl} \mathfrak{M} = -\varepsilon \operatorname{curl} \operatorname{prod} \mathfrak{U}\,\mathfrak{E} + 4\pi\lambda\mathfrak{E}. \tag{1}$$

Da ferner kein wahrer Magnetismus in der Kugel sein soll, so ist auch

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} = 0. \tag{2}$$

Im Aufsenraume wird aus (1)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{M} = 0 \tag{3}$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} \text{ ist gegeben,}$$

und nach der Bemerkung im vorigen Paragraphen sollen alle Komponenten von $\mathfrak{M}$ auch für $r = r_0$ stetig sein.

Da wir nur die Induktion erster Ordnung berücksichtigen, so fällt der erste Term rechter Hand in (1) fort, und wir haben

$$c \operatorname{curl} \mathfrak{M} = 4\pi\lambda\mathfrak{E}, \tag{4}$$

1) Siehe z. B. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, Bd. I, S. 367. 1900.

d. h. magnetisch wird der Körper als ein ruhender betrachtet, in dessen Innern die Strömung $\lambda\mathfrak{E}$ stattfindet.

In diesem Falle ist für $r = r_0$ wirklich, wie es sein muſs,

$$\text{curl}_r\,\mathfrak{M} = 0, \tag{5}$$

sodaſs $\mathfrak{M}$ im Auſsenraume den Bedingungen genügen kann:

$$\text{curl}\,\mathfrak{M} = 0 \tag{6}$$

$$\text{div}\,\mathfrak{M}\ \text{gegeben} \tag{7}$$

und sich stetig an die Werte im Innenraum anschlieſsen kann.

Durch diese Bedingungen ist $\mathfrak{M}$ im ganzen Raume eindeutig bestimmt, denn im ganzen Felde ist curl $\mathfrak{M}$ und div $\mathfrak{M}$ gegeben und im Unendlichen ist $\mathfrak{M}$ bekannt, nämlich gleich dem Vektor der statischen Verteilung.

Der Eindeutigkeitsbeweis wird ebenso wie in § 4 geführt: Wir nehmen an, daſs zwei verschiedene Lösungen möglich sind und bilden das Differenzenfeld $\mathfrak{M}'$. Dies genügt den Bedingungen

(a) $\text{curl}\,\mathfrak{M}' = 0$

(b) $\text{div}\,\mathfrak{M}' = 0;$

(c) im Unendlichen $\mathfrak{M}' = 0$

(d) $\mathfrak{M}'$ überall stetig.

Wegen (a) können wir $\mathfrak{M}' = \text{grad}\,\psi$ setzen, dann ist wie in § 4 (4)

$$\int (\text{grad}\,\psi)^2 d\tau + \int \psi \Delta \psi\, d\tau - \int \psi\, \text{grad}_n \psi\, do = 0.$$

Wegen (b) ist $\Delta\psi = 0$, und wegen (c) ist im Oberflächenintegral, welches sich auf eine Kugel mit unendlich groſsem Radius bezieht, $\text{grad}_n\,\psi = 0$, also ist im ganzen Felde

$$\text{grad}\,\psi = \mathfrak{M}' = 0.$$

Die Integration der Gleichungen, von denen unser Problem abhängt,

$$c\,\text{curl}\,\mathfrak{M} = 4\pi\lambda\mathfrak{E} \tag{7}$$

$$\text{div}\,\mathfrak{M} = 4\pi\varrho, \tag{8}$$

wo $\varrho$ die Dichte der magnetischen Verteilung bedeutet und sich als Divergenz eines Vektors darstellen lassen muſs, ist allgemein auf Quadraturen zurückführbar.

Wir lösen die Aufgabe durch Dekomposition und setzen

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'', \tag{9}$$

sodaſs

$$\begin{aligned} c \operatorname{curl} \mathfrak{M}' &= 4\pi\lambda\mathfrak{E} \\ \operatorname{div} \mathfrak{M}' &= 0; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathfrak{M}'' &= 0 \\ \operatorname{div} \mathfrak{M}'' &= 4\pi\varrho. \end{aligned} \tag{11}$$

Wir definieren einen Vektor $\Pi$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Pi_x &= \frac{\lambda}{c}\int\frac{E_x}{r}\,d\tau \\ \Pi_y &= \frac{\lambda}{c}\int\frac{E_y}{r}\,d\tau \\ \Pi_z &= \frac{\lambda}{c}\int\frac{E_z}{r}\,d\tau \end{aligned} \tag{12}$$

Dann ist

$$\operatorname{curl} \Pi = \mathfrak{M}'.\text{[1]} \tag{13}$$

Setzen wir ferner

$$\mathfrak{M}'' = \operatorname{grad} \psi, \tag{14}$$

so wird

$$\psi = \int\frac{\varrho}{r}\,d\tau. \tag{15}$$

Prinzipiell ist die Lösung somit auffindbar, wir wollen dieselbe auf andere Weise zu gewinnen suchen.

Es ist im Innenraume

$$\begin{aligned} c \operatorname{curl} \mathfrak{M}' &= 4\pi\lambda\mathfrak{E} \\ \operatorname{div} \mathfrak{M}' &= 0 \end{aligned} \tag{10a}$$

und im Auſsenraume

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathfrak{M}' &= 0 \\ \operatorname{div} \mathfrak{M}' &= 0. \end{aligned} \tag{10b}$$

Da nach § 6 (9)

$$E_r = 0$$

ist, also

$$\operatorname{curl}_r \mathfrak{M}' = 0, \tag{16}$$

so können wir setzen

$$\begin{aligned} M'_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \\ M'_\varphi &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \end{aligned} \tag{17}$$

---

1) Vergl. z. B. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, Kap. IV, § 2.

Die Gleichungen (10) gehen mit Benutzung der Beziehungen (17) über in:

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(M_r' - \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = \frac{4\pi\lambda}{c} r \sin\vartheta E_\vartheta \\ &\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(M_r' - \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi\lambda}{c} r E_\varphi \\ &\Delta\Phi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2\left(M_r' - \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir in die ersten beiden Gleichungen (18) für $E_\vartheta$ und $E_\varphi$ die Werte aus § 6 (9) ein und integrieren, so wird

$$(19)\qquad M_r' - \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r}{n+1}\frac{\partial\chi_n}{\partial\varphi}.$$

Die als Integrationskonstante hinzukommende additive Konstante, welche Funktion von $r$ sein kann, setzen wir willkürlich gleich Null. Wir dürfen das, da es uns ja nur darauf ankommt, ein allen Bedingungen genügendes Integral zu finden, welches dann wegen der Eindeutigkeit das verlangte Integral ist.

Indem wir (19) in die letzte Gleichung (18) einsetzen, erhalten wir mit Benutzung von § 6 (6)

$$(20)\qquad \Delta\Phi = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r}{n+1}\frac{\partial\chi_n}{\partial\varphi} = -\frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n+1}\frac{\partial\chi_n}{\partial\varphi}.$$

Im Aufsenraume ist

$$(21)\qquad \Delta\Phi = 0.$$

Wenn wir $\Phi$ im Innenraume und im Aufsenraume durch die Indices $i$ und $a$ unterscheiden, so ist wegen der Stetigkeitsbedingungen für $r = r_0$

$$\frac{\partial\Phi_a}{\partial r} - M_r' = 0 \quad \text{wegen der ersten Gleichung (10b),}$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial r} - M_r' = -\frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0}{n+1}\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial\varphi} \quad \text{wegen (19).}$$

Subtraktion ergiebt für $r = r_0$

$$(22)\qquad \frac{\partial\Phi_a}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_i}{\partial r} = \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0}{n+1}\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial\varphi}.$$

Ferner soll $\lim\limits_{r=\infty} r\Phi$ endlich bleiben.

Durch diese Bedingungen ist $\Phi$ bestimmt, wir ermitteln es durch Dekomposition und setzen

$$(23)\qquad \Phi = \Phi' + \Phi'',$$

und zwar sei

$$(20\text{a})\qquad \Delta \Phi_i' = -\frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n+1}\frac{\partial \chi_n}{\partial \varphi}$$

$$(21\text{a})\qquad \Delta \Phi_a' = 0.$$

Wir finden $\Phi_i'$, indem wir den Beitrag $d\Phi_i'$ einer unendlich dünnen Kugelschicht vom Radius $\varrho$ und der Dicke $d\varrho$ zu $\Delta\Phi_i'$ bestimmen und nachher über die ganze Kugel integrieren.

Dann wird im ganzen Raume

$$(24)\qquad \Delta(d\Phi_i') = 0$$

und für $r = \varrho$

$$(25)\qquad \left(\frac{\partial d\Phi_i'}{\partial r}\right)^+ - \left(\frac{\partial d\Phi_i'}{\partial r}\right)^- = -\frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n+1}\frac{\partial \chi_n}{\partial \varphi}\,d\varrho.$$

Bezeichnet $K_n$ eine Kugelfunktion $n$ter Ordnung, so wird durch den Ansatz

$$(26)\qquad \begin{aligned} d\Phi_i' &= \sum_{n=0}^{\infty} K_n\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{n+1} d\varrho \qquad & r > \varrho \\ d\Phi_i' &= \sum_{n=0}^{\infty} K_n\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n} d\varrho \qquad & r < \varrho \end{aligned}$$

der Gleichung (24) genügt. $K_n$ bestimmt sich aus (25), und es wird

$$(27)\qquad \begin{aligned} d\Phi_i' &= \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{(n+1)(2n+1)}\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial\varphi}\frac{\varrho^{2n+2}}{r_0^n r^{n+1}}\,d\varrho \qquad & r > \varrho \\ d\Phi_i' &= \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{(n+1)(2n+1)}\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial\varphi}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \varrho\, d\varrho \qquad & r < \varrho \end{aligned}$$

Wir haben über die Elemente der ersten Gleichung (27) von 0 bis $r$ zu integrieren, in der zweiten von $r$ bis $r_0$. So wird

$$(28)\qquad \Phi_i = \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{2(n+1)(2n+1)(2n+3)}\frac{\partial\chi_n}{\partial\varphi}\left[(2n+3)r_0^2 - (2n+1)r^2\right].$$

Indem wir $\Phi_i'$ nach außen Gleichung (21a) gemäß stetig fortsetzen, wird

$$(29)\qquad \Phi_a' = \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)\,r_0^2}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}\frac{\partial Y^{(n)}}{\partial\varphi}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}.$$

Einfache Rechnung zeigt, daß für $r = r_0$

$$\frac{\partial\Phi_a'}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_i}{\partial r} = 0$$

ist. Also mufs $\Phi''$ den Bedingungen genügen

$$\Delta \Phi'' = 0 \tag{30}$$

und für $r = r_0$:

$$\frac{\partial \Phi_a''}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_i''}{\partial r} = \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0}{n+1} \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial \varphi}. \tag{31}$$

Wir setzen wieder an:

$$\Phi_a'' = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}; \quad \Phi_i'' = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n,$$

und es ergiebt sich

$$\begin{aligned} \Phi_i'' &= -\frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^2}{(n+1)(2n+1)} \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial \varphi} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \\ \Phi_a'' &= -\frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^2}{(n+1)(2n+1)} \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial \varphi} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}. \end{aligned} \tag{32}$$

Für $\Phi$ erhalten wir demnach schliefslich

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial \varphi} \\ &\qquad [(n+1)(2n+3)r_0^2 - (n+3)(2n+1)r^2] \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \\ \Phi_a &= -\frac{4\pi\lambda\mu\omega}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial \varphi} r_0^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}. \end{aligned} \tag{33}$$

Die Gleichungen (20), (21) und (22) lassen sich aus (33) leicht verifizieren.

$\mathfrak{M}''$ ist das Feld der statischen Verteilung, also

$$\mathfrak{M}'' = \operatorname{grad} \chi. \tag{34}$$

Für ein gleichförmiges Feld von der Horizontalintensität $H$ ist *im Innenraume*:

$$\begin{aligned} M_r &= H \sin\vartheta \cos\varphi + \frac{2\pi\lambda\mu\omega}{15c^2} H \sin\vartheta \sin\varphi\,(5r_0^2 - 3r^2) \\ M_\vartheta &= H \cos\vartheta \cos\varphi + \frac{2\pi\lambda\mu\omega}{15c^2} H \cos\vartheta \sin\varphi\,(5r_0^2 - 6r^2) \\ M_\varphi &= -H \sin\varphi + \frac{2\pi\lambda\mu\omega}{15c^2} H \cos\varphi\,(5r_0^2 - 6r^2). \end{aligned} \tag{35}$$

Das induzierte magnetische Feld hat also radiale Richtung, wenn

$$r = \sqrt{\tfrac{5}{6}}\, r_0$$

ist.

*Im Aufsenraume* ist:

$$M_r = H \sin\vartheta \cos\varphi + \frac{4\pi\lambda\mu\omega}{15c^2} H \sin\vartheta \sin\varphi \frac{r_0^5}{r^3}$$

(36) $$M_\vartheta = H \cos\vartheta \cos\varphi - \frac{2\pi\lambda\mu\omega}{15c^2} H \cos\vartheta \sin\varphi \frac{r_0^5}{r^3}$$

$$M_\varphi = -H \sin\varphi - \frac{2\pi\lambda\mu\omega}{15c^2} H \cos\varphi \frac{r_0^5}{r^3}.$$

## § 8. Die elektromagnetische Energie und die Joulesche Wärme.

Die elektrische Energie ist definiert durch die Formel:

(1) $$W_e = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int \mathfrak{E}^2 d\tau.$$

Diese können wir gegen die magnetische Energie vernachlässigen, da $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{c}{r_0\lambda}$ eine sehr kleine Zahl ist.

Ferner mufs die Joulesche Wärme, welche in der Zeiteinheit in der Kugel erzeugt wird, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ im gleichförmigen Felde von der Horizontalintensität $H$ dreht, berücksichtigt werden. Es ist

(2) $$\mathfrak{J} = \lambda \int \mathfrak{E}^2 d\tau.$$

Indem wir für $\mathfrak{E}$ die Werte aus § 6 (10) einsetzen, ergiebt sich

(3) $$\mathfrak{J} = \tfrac{2}{15}\pi\mu^2 \frac{\lambda}{c^2} H^2 r_0^5 \omega^2.$$

Auch die magnetische Energie darf nicht vernachlässigt werden. Zu der Energie des statischen Feldes kommt die des induzierten Feldes $W'_m$ hinzu. Eine wechselseitige Energie des primären und des sekundären Vektors ist nicht vorhanden, wie aus den Formeln (35) und (36) ersichtlich ist.

Es ist

(4) $$W'_m = \frac{\mu}{8\pi}\int \mathfrak{M}'^2 d\tau.$$

Die Integration erstreckt sich über den ganzen unendlichen Raum.

Es ergiebt sich

(5) $$W'_m = \tfrac{8}{315}\frac{\pi^2\lambda^2\mu^3\omega^2}{c^4} H^2 r_0^7.$$

Um ein Bild von der Verteilung der induzierten magnetischen Energie zu geben, erwähnen wir noch, dafs die induzierte Energie des äufseren Raumes sich zu der in der Kugel induzierten Energie verhält wie 7 : 23.

## § 9. Die Strömungskomponenten und die Joulesche Wärme im verlängerten Rotationsellipsoid.

Wir führen elliptische Koordinaten ein[1]) durch die Substitutionen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= a\,\mathfrak{Sin}\,\zeta \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= a\,\mathfrak{Sin}\,\zeta \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= a\,\mathfrak{Cos}\,\zeta \cos\vartheta, \end{aligned}$$

oder wenn wir zur Abkürzung

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{Cos}\,\zeta &= u \\ \cos\vartheta &= v \end{aligned}$$

setzen:

$$(1a)\qquad \begin{aligned} x &= a\sqrt{u^2-1}\,\sqrt{1-v^2}\cos\varphi \\ y &= a\sqrt{u^2-1}\,\sqrt{1-v^2}\sin\varphi \\ z &= au\cdot v. \end{aligned}$$

Man bemerke aber wohl, dafs $\zeta$, $\vartheta$, $\varphi$ und nicht $u$, $v$, $\varphi$ ein Rechtssystem bilden.

$a$ bedeutet hier die Exzentrizität der Meridianellipse.

Damit wir alle Raumpunkte erhalten, und zwar jeden nur einmal, müssen wir den Parametern folgende Variabilitätsbereiche geben:

$$\begin{aligned} &\zeta \text{ von } 0 \text{ bis } \infty &&\text{d. h.} \quad u \text{ von } 1 \text{ bis } \infty \\ &\vartheta \text{ von } 0 \text{ bis } \pi &&\qquad\quad v \text{ von } 1 \text{ bis } -1 \\ &\varphi \text{ von } 0 \text{ bis } 2\pi &&\qquad\quad \varphi \text{ von } 0 \text{ bis } 2\pi. \end{aligned}$$

Dann wird, wenn man $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ed\zeta^2 + e'd\vartheta^2 + e''d\varphi^2$ setzt und die durch (2) gegebenen Substitutionen einführt,

$$(3)\qquad e = a^2(u^2 - v^2), \quad e' = a^2(u^2 - v^2), \quad e'' = a^2(u^2-1)(1-v^2).$$

Aus § 5 (13) wird:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}(u^2-1)\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{u^2-1}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial}{\partial v}(1-v^2)\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{1}{1-v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \\ &\qquad + 2a\omega\left[\frac{\partial\chi}{\partial u}(u^2-1)\,v + \frac{\partial\chi}{\partial v}(1-v^2)\,u\right] = 0 \end{aligned}$$

und aus § 5 (14) wird für $u = u_0$:

$$(5)\qquad \frac{\partial V}{\partial u} = -\,a\omega\,(1-v^2)\frac{\partial\chi}{\partial v}.$$

---

1) Siehe z. B. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen 1887 Cap. XIV § 1.

Das Potential $\chi$ genügt im Innern des Ellipsoids der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta \chi = 0,$$

es ist also

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} Y_{n\nu} \frac{P_{n\nu}(u)}{P_{n\nu}(u_0)}. \tag{6}$$

Hierin bedeutet $P_{n\nu}(x)$ die zugeordnete oder adjungierte Kugelfunktion erster Art, d. h. dasjenige Integral der Differentialgleichung:

$$(1 - x^2)^2 \frac{d^2 P_{n\nu}}{dx^2} - 2x(1 - x^2) \frac{d P_{n\nu}}{dx} + [n(n+1)(1 - x^2) - \nu^2] P_{n\nu} = 0,$$

welches für $x = 1$ endlich bleibt.

Diese Funktion läſst sich leicht durch eine Riemannsche $P$-Funktion oder eine hypergeometrische Reihe ausdrücken, sie stellt sich in der Form folgender endlichen Reihe dar:

$$P_{n\nu}(x) = (1 - x^2)^{\frac{\nu}{2}} \sum_k (-1)^k \frac{\Pi(2n - 2k)}{2^n \Pi(n - k) \Pi(k) \Pi(n - 2k - \nu)} x^{n - \nu - 2k}, \tag{7}$$

und zwar nimmt $k$ alle die ganzzahligen positiven Werte an, welche unter dem Summenzeichen eine positive Potenz von $x$ ergeben, also

$$0 \leqq k \leqq \frac{n - \nu}{2}.$$ [1])

Um $P_{n\nu}(x)$ für jedes relle Argument zwischen $-1$ und $\infty$ eindeutig zu bestimmen, setzen wir folgendes fest:

Ist $-1 < x < +1$, so soll $(1 - x^2)^{\frac{\nu}{2}}$ die $\nu$te Potenz der positiven Wurzel bedeuten; ist $x > 1$, so soll $(1 - x^2)^{\frac{\nu}{2}} = i^\nu (x^2 - 1)^{\frac{\nu}{2}}$ sein, wo $(x^2 - 1)^{\frac{\nu}{2}}$ wieder die $\nu$-te Potenz der positiven Wurzel aus $x^2 - 1$ ist.

Wir bestimmen $V$ durch Dekomposition, indem wir setzen

$$V = V' + V''. \tag{8}$$

$V'$ soll der Gleichung (4) genügen.

Durch

$$V' = -a\omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (1 - v^2) \frac{\partial Y_{n\nu}}{\partial v} (u^2 - 1) \frac{d P_{n\nu}(u)}{du} \frac{1}{n(n+1) P_{n\nu}(u_0)} \tag{9}$$

ist die Gleichung (4) befriedigt, wie sich leicht verifizieren läſst.

---

1) Vgl. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, Bd. II § 140. 1901.

$V''$ mufs dann den Bedingungen genügen:

$$(10) \qquad \Delta V'' = 0$$

und für $u = u_0$

$$(11) \qquad \frac{\partial V''}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial V'}{\partial u} = a\omega \frac{1 - v^2}{u_0^2 - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\partial Y_{n\nu}}{\partial v} \frac{\nu^2}{n(n+1)}.$$

Es ist nun

$$(12) \qquad Y_{n\nu} = (A_{n\nu} \cos \nu\varphi + B_{n\nu} \sin \nu\varphi) P_{n\nu}(v) = \Phi_{n\nu} P_{n\nu}(v).$$

Es handelt sich also darum, $(1 - v^2) \frac{d P_{n\nu}(v)}{dv}$ nach zugeordneten Funktionen mit dem zweiten Index $\nu$ zu entwickeln.

Dazu dienen uns folgende Formeln, die sich leicht aus der Definitionsgleichung (7) ableiten lassen[1]):

$$(13) \quad \begin{cases} \text{(a)} \quad (1 - x^2) \dfrac{d P_{n,\nu}}{dx} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} P_{n,\nu+1} - \nu x P_{n,\nu} \\[2ex] \text{(b)} \quad x P_{n,\nu} = \dfrac{n - \nu + 1}{2n + 1} P_{n+1,\nu} + \dfrac{n + \nu}{2n + 1} P_{n-1,\nu} \\[2ex] \text{(c)} \quad (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} P_{n,\nu+1} = (n + \nu) P_{n-1,\nu} - (n - \nu) x P_{n,\nu}. \end{cases}$$

So ergiebt sich:

$$(14) \quad (1 - v^2) \frac{d P_{n\nu}(v)}{dv} = \frac{(n+1)(n+\nu)}{2n+1} P_{n-1,\nu} - \frac{n(n-\nu+1)}{2n+1} P_{n+1,\nu}$$

also für $u = u_0$

$$(15) \quad \frac{\partial V''}{\partial u} = \frac{a\omega}{u_0^2 - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\nu^2 (n+\nu)}{n(2n+1)} \Phi_{n\nu} \left[ P_{n-1,\nu}(v) - \frac{n(n-\nu+1)}{(n+1)(n+\nu)} P_{n-1,\nu}(v) \right]$$

und schliefslich:

$$(16) \quad \begin{gathered} V'' = \frac{a\omega}{u_0^2 - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\nu^2 (n+\nu)}{n(2n+1)} \Phi_{n\nu} \\ \left[ P_{n-1,\nu}(v) \frac{P_{n-1,\nu}(u)}{P'_{n-1,\nu}(u_0)} - \frac{n(n-\nu+1)}{(n+1)(n+\nu)} P_{n+1,\nu}(v) \frac{P_{n+1,\nu}(u)}{P'_{n+1,\nu}(u_0)} \right]. \end{gathered}$$

Auch hier ergiebt sich, dafs keine Strömung auftritt, wenn das Feld von $\varphi$ unabhängig ist, d. h. wenn $\nu = 0$ ist. Haben wir es also

---

1) Siehe E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen 1878 Bd. 1 § 63 (48). Bei Heine lauten die Rekursionsformeln etwas anders, weil er $P_{n\nu}$ nicht so wie wir definiert hat. Bezeichnen wir Heines Funktion für den Augenblick mit $\mathfrak{P}_{n\nu}$, so ist

$$P_{n\nu} = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n) \Pi(n-\nu)} \mathfrak{P}_{n\nu}.$$

mit einem gleichförmigen Felde zu thun, so brauchen wir nur die Horizontalkomponente zu berücksichtigen.

Um die Resultate übersichtlicher zu machen, wollen wir im Weiteren den speziellen Fall eines gleichförmigen magnetischen Feldes voraussetzen.

Dann ist $n = 1$; $\nu = 1$ und

$$\chi = -Ha\sqrt{u^2-1}\sqrt{1-v^2}\cos\varphi$$

und

$$Y_{1,1} = -Ha\sqrt{u_0^2-1}\sqrt{1-v^2}\cos\varphi .$$

Dann wird

$$V' = -\frac{a^2\omega}{2}H\cos\varphi\, u\sqrt{u^2-1}\, v\sqrt{1-v^2} \tag{17}$$

$$V'' = +\frac{a^2\omega}{2}H\cos\varphi\, u\sqrt{u^2-1}\, v\sqrt{1-v^2}\frac{1}{2u_0^2-1}, \tag{18}$$

also

$$V = -a^2\omega H\cos\varphi\, u\sqrt{u^2-1}\, v\sqrt{1-v^2}\frac{u_0^2-1}{2u_0^2-1}. \tag{19}$$

Es ergiebt sich ferner

$$\begin{aligned} E_\zeta &= -\frac{\mu a\omega}{c}H\cos\varphi\, v\sqrt{\frac{1-v^2}{u^2-v^2}}\frac{u^2-u_0^2}{2u_0^2-1} \\ E_\vartheta &= +\frac{\mu a\omega}{c}H\cos\varphi\, u\sqrt{\frac{u^2-1}{u^2-v^2}}\frac{u_0^2-v^2}{2u_0^2-1} \\ E_\varphi &= -\frac{\mu a\omega}{c}H\sin\varphi\, u\cdot v\frac{u_0^2-1}{2u_0^2-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Bilden wir die Komponenten in Richtung der $x$-, $y$-, $z$-Achse, so ergiebt sich

$$E_y = 0 \tag{21}$$

und

$$\frac{E_z}{E_x} = \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}\frac{u_0^2}{u_0^2-1}.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergiebt

$$\frac{x^2}{u_0^2-1} + \frac{z^2}{u_0^2} = \text{const} \tag{22}$$

d. h. die Strömungskurven sind ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen, deren Ebenen parallel zur $xz$-Ebene sind, und deren Mittelpunkte auf der $y$-Achse liegen.

Die Joulesche Wärme, welche im Ellipsoid in der Zeiteinheit erzeugt wird, wenn es sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ im gleichförmigen Felde dreht, ist:

$$\mathfrak{J} = \frac{4\pi\mu^2\lambda a^5 H^2\omega^2}{15c^2}\frac{u_0^3(u_0^2-1)^2}{2u_0^2-1}. \tag{23}$$

Bezeichnet $A$ die grofse, $B$ die kleine Halbachse des variablen Rotationsellipsoids, so ist $A = au$, wo $a^2 = A_0^2 - B_0^2$ ist.

Lassen wir $A_0 = B_0 = r_0$ werden, so wird $u = \frac{r}{a}$ und $u_0 = \frac{r_0}{a}$, wenn $r_0$ den Radius der so entstehenden Kugel bezeichnet.

In der That gehen die elektrischen Feldkomponenten und der Ausdruck für die Joulesche Wärme durch diese Substitution in die für die Kugel gefundenen Werte über.

## § 10. Die Strömungskomponenten und die Joulesche Wärme im abgeplatteten Rotationsellipsoid.

Wir erhalten die dem abgeplatteten Rotationsellipsoid entsprechenden krummlinigen Koordinaten durch die Substitutionen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= b \operatorname{Cos} \zeta \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= b \operatorname{Cos} \zeta \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= b \operatorname{Sin} \zeta \cos \vartheta, \end{aligned}$$

oder wenn wir zur Abkürzung

$$(2)\qquad \begin{aligned} \operatorname{Sin} \zeta &= s \\ \cos \vartheta &= v \end{aligned}$$

setzen:

$$(1\,a)\qquad \begin{aligned} x &= b\sqrt{1+s^2}\sqrt{1-v^2}\cos \varphi \\ y &= b\sqrt{1+s^2}\sqrt{1-v^2}\sin \varphi \\ z &= bs \cdot v. \end{aligned}$$

Hier müssen $\zeta$ und $s$ von 0 bis $\infty$ laufen.

Diese Formeln gehen aber aus den entsprechenden § 9 (1 a) durch die Substitutionen

$$a = \frac{b}{i} \quad \text{und} \quad u = is$$

hervor.[1])

Durch diese Substitutionen gehen die Gleichungen § 9 (20) über in:

$$(3)\qquad \begin{aligned} E_\zeta &= + \frac{\mu b \omega}{c} H \cos \varphi\, v \sqrt{\frac{1-v^2}{s^2+v^2}}\, \frac{s^2 - s_0^2}{2 s_0^2 + 1} \\ E_\vartheta &= \frac{\mu b \omega}{c} H \cos \varphi\, s \sqrt{\frac{s^2+1}{s^2+v^2}}\, \frac{s_0^2 + v^2}{2 s_0^2 + 1} \\ E_\varphi &= - \frac{\mu b \omega}{c} H \sin \varphi\, s \cdot v\, \frac{s_0^2 + 1}{2 s_0^2 + 1}. \end{aligned}$$

1) Cf. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen 1887 Cap. XV § 4.

Ebenfalls wird

$$\mathfrak{J} = \frac{4\pi\mu^2\lambda}{15c^2} b^5 H^2 \omega^2 \frac{s_0^3(s_0^2+1)^2}{2s_0^2+1}. \tag{4}$$

Auch hier finden die von einem gleichförmigen Feld induzierten Strömungen in ähnlichen Ellipsen statt, denn aus § 9 (21) und (22) wird

$$E_y = 0 \tag{5}$$

$$\frac{x^2}{s_0^2+1} + \frac{z^2}{s_0^2} = \text{const}. \tag{6}$$

## § 11. Die Aragosche Scheibe im gleichförmigen Felde.

Die Resultate des vorigen Paragraphen lassen sich leicht auf die Aragosche Scheibe anwenden.

Wird nämlich $s = s_0 = 0$, so haben wir es mit einer Kreisscheibe vom Radius $b$ zu thun. Wir müssen hier die Strömung auf der oberen Seite $\left(\vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$ der Scheibe und auf der unteren Seite $\left(\vartheta > \frac{\pi}{2}\right)$ unterscheiden.

Um endliche Strömungen zu erhalten, müssen wir die Leitfähigkeit des Materials unendlich grofs werden lassen. Ist die Dicke der Scheibe $\delta$, so ist

$$\delta\lambda = \varkappa$$

endlich.

Die obere Hälfte der Scheibe hat die Dicke

$$\frac{\delta}{2} = bsv,$$

während unten

$$\frac{\delta}{2} = -bsv$$

ist.

Führen wir einen Strömungsvektor $L$ ein, sodafs $L = \lambda\mathfrak{E}$ ist, so wird aus § 10 (3)

$$\begin{aligned} \text{oben:}\quad L_\vartheta = L_r &= \frac{\mu\varkappa}{2c}\omega H\cos\varphi \\ L_\varphi &= -\frac{\mu\varkappa}{2c}\omega H\sin\varphi \\ \text{unten:}\quad L_\vartheta = -L_r &= \frac{\mu\varkappa}{2c}\omega H\cos\varphi \\ L_\varphi &= \frac{\mu\varkappa}{2c}\omega H\sin\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

d. h.

$$\begin{aligned} L_x &= \pm\frac{\mu\varkappa}{2c} H\omega \\ L_y &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

wo das obere Zeichen für die obere, das untere Zeichen für die untere Oberfläche gilt.

## § 12. Ein unendlich langer Kreiscylinder in einem gleichförmigen magnetischen Feld.

Schliefslich wollen wir noch den Fall behandeln, dafs ein unendlich langer Kreiscylinder in einem gleichförmigen Magnetfelde, welches senkrecht zur Cylinderachse gerichtet ist, sich mit gleichmäfsiger Winkelgeschwindigkeit dreht.

Wir führen Cylinderkoordinaten ein durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi \tag{1}$$
$$y = r\sin\varphi\,,$$

während $z$ ungeändert bleibt; dabei mufs die $z$-Achse aber die der gewöhnlich angenommenen Richtung entgegengesetzte Richtung bekommen, damit $r$, $z$, $\varphi$ ein Rechtssystem bilden.

Es wird

$$e = 1\,;\quad e'1\,;\quad e'' = r^2, \tag{2}$$

sodafs § 5 (12) und (14) sich folgendermafsen schreiben:

$$\varDelta V = 2\omega\frac{\partial\chi}{\partial z} \tag{3}$$

für $r = r_0$ ist

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \omega r\frac{\partial\chi}{\partial z}. \tag{4}$$

Da aber

$$\chi = -Hx$$

ist, so ist

$$\varDelta V = 0$$

und ebenfalls für $r = r_0$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0\,,$$

d. i. aber

$$\operatorname{grad} V = 0\,.$$

Nach § 2 (6) wird demnach

$$\mathfrak{E} = \frac{\mu}{c}\operatorname{prod}\mathfrak{U}\mathfrak{M}\,.$$

Nun hat aber $\mathfrak{U}$ die Komponenten:

$$u_r = 0\,;\quad u_z = 0\,;\quad u_\varphi = r\omega\,,$$

also ist

$$E_r = 0$$
$$E_z = \frac{\mu}{c}\omega Hx \tag{5}$$
$$E_\varphi = 0\,.$$

Das hier behandelte Problem hat besonderes Interesse, weil die Schwingungen eines im Verhältnis zum Durchmesser langen Cylinders von Rudolf H. Weber[1]) zur Bestimmung der Leitfähigkeiten von Legierungen benutzt worden sind. Wir kommen im nächsten Paragraphen auf die hierher gehörigen Formeln zurück.

## § 13. Mechanische Probleme.

Auf Grund der entwickelten Formeln wollen wir jetzt einige mechanische Probleme behandeln.

Eine Kugel möge in einem gleichförmigen Felde ohne Einfluſs äuſserer Kräfte rotieren.

Wir wollen annehmen, die Geschwindigkeitsänderungen seien so gering, daſs wir die Strömung in jedem Augenblick als stationär ansehen können.

Da nur ein Grad von Bewegungsfreiheit ist, so wird die Anwendung des Energieprinzips zur Aufstellung der Bewegungsgleichung genügen.

Bezeichnet $T$ die kinetische Energie, $W$ die elektromagnetische Energie, $J$ die in der Zeiteinheit entwickelte Joulesche Wärme, so ist

$$\frac{d}{dt}(T+W)+J=0. \tag{1}$$

Führen wir die Dichte $d$ der Kugel ein, so ergiebt sich auf Grund von § 8 (3) und (5):

$$\left(d+\frac{2\pi\lambda^2\mu^3H^2r_0^2}{21c^4}\right)\frac{d\omega}{dt}+\frac{\mu^2\lambda H^2}{4c^2}\omega=0 \tag{2}$$

oder

$$\omega=\omega_0 e^{\frac{-\mu^2\lambda H^2/4c^2}{d+2\pi\lambda^2\mu^3H^2r_0^2/21c^4}t}. \tag{3}$$

Hertz[2]) hat die elektromagnetische Energie nicht berücksichtigt, er erhält also

$$\omega=\omega_0 e^{-\frac{\mu^2\lambda H^2}{4c^2 d}t}. \tag{4}$$

Er sagt daraufhin:

„Kugeln verschiedener Radien und Hohlkugeln werden mit gleicher Schnelligkeit in Bewegung gesetzt und zur Ruhe gebracht. Das ent-

1) Rudolf H. Weber, Über die Anwendung der Dämpfung durch Inductionsströme zur Bestimmung der Leitfähigkeiten von Legierungen. Wied. Ann. 68 S. 705 1899.

2) H. Hertz, Über die Induction in rotierenden Kugeln, Werke Bd. 1, 2. 1895.

spricht in der That einer Beobachtung von Matteucci." (Cf. l. c. S. 132.)

Wir werden sofort zahlenmäfsig belegen, dafs man im allgemeinen die elektromagnetische Energie nicht vernachlässigen darf gegen die kinetische Energie, also mufs man bei geeigneter Versuchsanordnung zu anderen Resultaten kommen wie Matteucci.

Es handelt sich um die Gröfsen $d$ und $2\pi\lambda^2\mu^3 H^2 r_0^2/21 c^4$.

Für Kupfer ist $d = 8{,}5$ bis $8{,}9$.

Nehmen wir wie Hertz $r_0 = 5$ cm an, ferner $H = 1000$ $(\mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{sec}^{-1})$ so ist $2\pi\lambda^2\mu^3 H^2 r_0^2/21 c^4 = 2{,}6$ rund, d. h. die Vernachlässigung der elektromagnetischen Energie verursacht in diesem Falle rund einen Fehler von 30 %.

Für den Fall, dafs die magnetische Energie gegen die kinetische Energie zu vernachlässigen ist, was aber, wie wir soeben gesehen haben, nur bei ganz spezieller Versuchsanordnung möglich ist, haben wir für das verlängerte resp. abgeplattete Rotationsellipsoid

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{\mu^2 \lambda H^2}{2 c^2 d} \frac{u_0^2}{2u_0^2 - 1} t} \tag{5}$$

resp.

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{\mu^2 \lambda H^2}{2 c^2 d} \frac{s_0^2}{2 s_0^2 + 1} t}$$

d. h. auch in diesem speziellen Falle ist beim Ellipsoid die Schnelligkeit, mit welcher die Bewegung abklingt, wesentlich von den Dimensionen des Körpers abhängig.

Bei derselben Vernachlässigung wird für den Cylinder

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{\mu^2 \lambda H^2}{2 c^2 d} t} \tag{5a}$$

d. h. die bei der Kugel soeben erwähnte Beobachtung des Matteucci gilt unter derselben Beschränkung auch für den Cylinder.

Schliefslich möge noch der Fall behandelt werden, dafs eine unifilar oder bifilar aufgehängte Kugel in einem gleichförmigen Felde schwingt.

Die Bewegungsgleichung hat die Form

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + P\varphi = 0. \tag{6}$$

Hierin ist

$$\varepsilon = \frac{\mu^2 \lambda H^2}{8 c^2 (d + 2\pi\lambda^2\mu^3 H^2 r_0^2/21 c^4)} \tag{7}$$

$$P = \frac{15 D}{(d + 2\pi\lambda^2\mu^3 H^2 r_0^2/21 c^4) 8 r_0^5 \pi}, \tag{8}$$

wenn $D$ die Direktionskraft der Aufhängung bedeutet.

Durch Beobachtung des logarithmischen Dekrements $\delta = \frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{P^2 - \varepsilon^2}}$ und der Schwingungsdauer $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{P^2 - \varepsilon^2}}$ ergiebt sich $\varepsilon = 2\delta/\tau$ und also auch $P = \frac{2}{\tau}\sqrt{\pi^2 + \delta^2}$.

Sind die Konstanten der Kugel bekannt, so kann man aus $\varepsilon$ oder $P$ die Feldintensität $H$ berechnen; $\lambda$ ergiebt sich umgekehrt aus $P$, wenn $H$ bekannt ist.

Ebenso ist auch die Bewegungsgleichung für Schwingungen eines unendlich langen Cylinders im homogenen Feld aufzustellen; man hat dann nur Trägheitsmoment, Joulesche Wärme und Direktionskraft für die Längeneinheit der Cylinderhöhe zu berechnen.

Im Falle des Experiments wird man zuerst die Koeffizienten der Differentialgleichung durch Schwingungsbeobachtungen ohne Vorhandensein des magnetischen Feldes bestimmen, sodann unter Vorhandensein des Feldes. Die Differenzen der entsprechenden Koeffizienten sind unsere gesuchten $\varepsilon$ und $P$.

Dadurch werden die Einflüsse des Luftwiderstandes und eines etwa schon vorhandenen Feldes (Erdfeld) in Rechnung gezogen.

---

# Über die Bewegung eines Motors unter Berücksichtigung der Elastizität seines Fundamentes.

Von M. Radakovič in Innsbruck.

In einer Arbeit „Zum dynamischen Ausbau der Festigkeitlehre“[1]) hat Prof. Sommerfeld die besondere Bedeutung, welche das Phänomen der Resonanz für die Technik besitzt, einer Untersuchung unterzogen und gelangte auf diesem wichtigen und bis jetzt nahezu gar nicht bearbeiteten Gebiete zu bemerkenswerten Ergebnissen. Er behandelte zwei typische Fälle: *erstens* das Mitschwingen des Fundamentes eines Motors mit der Bewegung desselben; *zweitens* die Torsionsschwingungen einer Welle und deren Einfluſs auf den Gleichgang der Maschine.

In dem ersteren Falle, mit welchem sich auch die folgenden Zeilen beschäftigen, erhielt Prof. Sommerfeld die folgenden Resultate: Die kleinen Druckkräfte, welche durch die Massenverschiebungen im

---

1) Vortrag gehalten in der Sitzung des Aachener Bezirks-Vereines deutscher Ingenieure am 3. Juli 1901; vgl. Physikalische Zeitschrift. III. Jahrgang, Heft 8.

Motor auf das Fundament ausgeübt werden, würden als einmaliger Zug wirkend, das Fundament nur sehr wenig beeinflussen und ihm eine kleine Ausbiegung $\eta_{\text{stat.}}$ erteilen. Durch die periodische Wiederholung dieser Drucke im Rythmus der Umdrehung des Motors gelangt jedoch das Fundament dann besonders in lebhafte Bewegung, wenn die Tourenzahl des Motors und die Schwingungszahl der freien Eigenschwingung des mit dem Motor belasteten Fundamentes in Übereinstimmung sind. In diesem Falle treten Ausbiegungen $\eta_{\text{dyn.}}$ auf, welche das 25fache von $\eta_{\text{stat.}}$ betragen können und daher eine wesentlich andere Beanspruchung des Fundaments erzeugen, als sich aus rein statischen Beobachtungen ergeben würde. Ein sehr interessantes Verhalten zeigt die Bewegung des Motors. In der Nähe des kritischen Gebietes des Mitschwingens bleibt nämlich die Tourenzahl des Motors konstant, wenn man auch die in den Motor gesteckte Arbeit innerhalb ziemlich weiter Grenzen vermehrt, sodaſs bis zu $^2/_3$ dieser Arbeit nicht zur Beschleunigung des Motors, sondern zur Unterhaltung der Fundamentbewegungen dienen.

Eine vollkommene Bestätigung dieser Ergebnisse erhielt Prof. Wirtinger, als er aus Anlaſs eines Vortrages im polytechnischen Klub in Innsbruck die Sommerfeldschen Untersuchungen wiederholte. Prof. Wirtinger beobachtete die Bewegung eines auf einem festen Tisch verschraubten Motors, indem er ähnlich wie Prof. Sommerfeld, nur mit verfeinerten Hilfsmitteln, die in den Motor gesteckte Energie, dessen Tourenzahl und die Bewegungen des Tisches maſs.[1])

Es scheint mir nicht ohne Interesse zu sein, diese Verhältnisse theoretisch zu untersuchen, indem man das Wesentliche der Erscheinung auf die folgende mechanische Aufgabe zurückführt.

Eine Masse $m$ sei durch elastische Kräfte in dem Punkte $O$ als Ruhelage festgehalten, so daſs sie bei Entfernung aus derselben längs der Geraden $OX$ mit einer der Gröſse dieser Entfernung $x$ proportionalen Kraft zurückgezogen wird. Diese Masse $m$ repräsentiert das elastische Fundament des Motors.

Mit $m$ fest verbunden ist weiter: 1. eine um den Punkt $O'$ drehbare, mit der homogenen Masse $M$ belegte Kreisscheibe, deren Trägheitsmoment $J$ heiſsen möge — sie stellt diejenigen Teile des Motors vor, welche um die Achse desselben symmetrisch gelagert sind; 2. eine Masse $m_1$ im Abstande $r_1$ von $O'$ — sie soll nach Gröſse und Entfernung von $O'$ so gewählt sein, daſs ihre Zentrifugalkraft die Achse

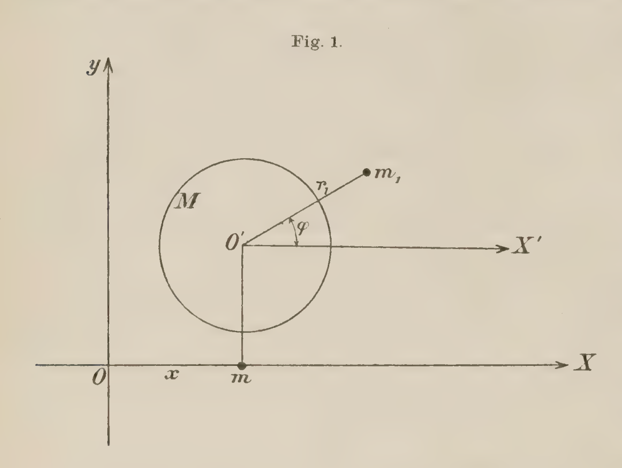
---

1) Über diese Untersuchungen wird Prof. Wirtinger noch ausführlicher berichten.

durch $O'$ ebenso angreift, wie die durch die Massenverschiebungen im Motor erzeugten Kräfte es thun.

Dieses mechanische System hat zwei Freiheitsgrade; eine allgemeine Koordinate ist die Verschiebung $x$ des Fundamentes, die andere ist der Winkel $\varphi$ des Motors mit einer festen, etwa $OX$ parallelen Richtung durch den Drehpunkt $O'$.

Fig. 1.




Man hat nun zunächst die lebendige Kraft des Systemes, ausgedrückt in seinen allgemeinen Koordinaten, zu bestimmen. Bezeichnet man für einen Augenblick die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Scheibe mit $\xi$, $\eta$, die der Masse $m_1$ mit $\xi_1$, $\eta_1$, so wäre in rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt die lebendige Kraft des ganzen Systemes

$$L = \tfrac{1}{2} m \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \int\!\!\int \varrho \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] d\xi\, d\eta$$
$$+ \tfrac{1}{2} m_1 \left[\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2\right].$$

Hierbei ist $\varrho$ die Flächendichte der Scheibe, und die Integration erstreckt sich über die ganze Scheibe. Nun herrscht folgender Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und den allgemeinen Koordinaten:

$$\xi = x + \sigma \cos \varphi \qquad \xi_1 = x + r_1 \cos \varphi$$
$$\eta = a + \sigma \sin \varphi \qquad \eta_1 = a + r_1 \sin \varphi.$$

Hierbei ist $\sigma$ die Entfernung des Punktes $(\xi\, \eta)$ von $O'$ und $a$ der unveränderliche Abstand $\overline{m\,O'}$.

Durch Einsetzen dieser Beziehungen erhält man nach einfachen Reduktionen

$$L = \tfrac{1}{2} \cdot (m + M + m_1) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} (J + m_1 r_1^2) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - m_1 r_1 \sin \varphi \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Man benutzt die Kenntnis der lebendigen Kraft des Systemes, um die Differentialgleichungen von Lagrange in zweiter Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=X$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=\Phi$$

anzusetzen. Hierzu benötigt man noch der Fixierung der Kraftkomponenten $X$ und $\Phi$.

Bei der Änderung der Koordinate $x$ allein hat man die elastische Kraft, welche der Entfernung $x$ proportional ist, also $-R\cdot x$ und eine der Bewegung widerstreitende Reibungskraft, welche der Geschwindigkeit proportional ist, also $-q\frac{dx}{dt}$ zu überwinden. Es ist demnach:

$$X=-Rx-q\frac{dx}{dt}$$

zu setzen.

Ändert man jedoch die Koordinate $\varphi$ allein, so sind die folgenden Arbeiten zu bedenken. 1. Man mufs, um den Motor im Gang zu halten, auf ihn das Drehmoment $D$ ausüben; das liefert die Arbeit $D\cdot d\varphi$. 2. Der Motor mufs sowohl Reibungskräfte in seinen Lagern überwinden, als auch, wenn man ihn Arbeit leisten läfst, Energie nach aufsen hin abgeben. Diese gesamte abgegebene Energie sei $-D_1 d\varphi$. Beispielsweise kann man $D_1=C+p\frac{d\varphi}{dt}$ annehmen, wenn man unter $C$ die konstante Lagerreibung versteht und dem Motor eine seiner Winkelgeschwindigkeit proportionale Arbeit entnimmt. Doch kann natürlich $D_1$ auch kompliziertere Formen annehmen.

Jedenfalls ist die Kraftkomponente

$$\Phi=D-D_1.$$

Bildet man nun die Differentialquotienten der lebendigen Kraft

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)}=(m+M+m_1)\frac{dx}{dt}-m_1 r_1\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}=(J+m_1 r_1^2)\frac{d\varphi}{dt}-m_1 r_1\sin\varphi\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-m_1 r_1\cdot\cos\varphi\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt},$$

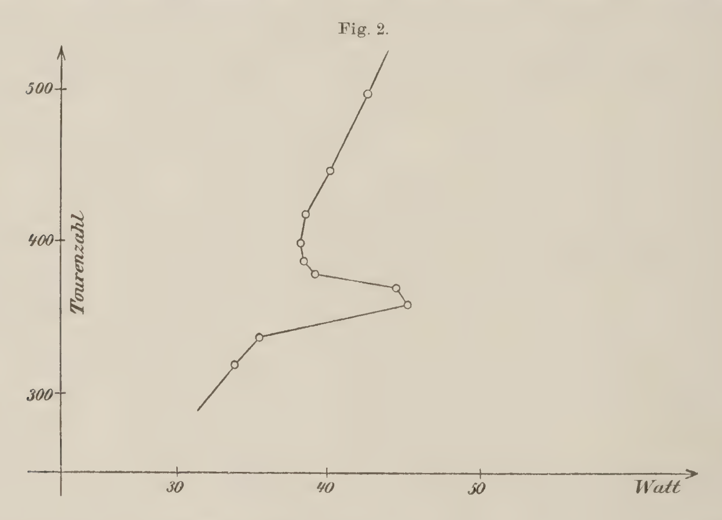
so erhält man die Differentialgleichungen des Systemes in der Form

$$(1)\qquad (m + M + m_1) \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} - m_1 r_1 \sin\varphi \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} - m_1 r_1 \cos\varphi \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = - Rx - q\frac{dx}{dt}$$

$$(2)\qquad (J + m_1 r_1^2) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} - m_1 r_1 \sin\varphi \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = D - D_1.$$

Für die weitere Verwendung dieser Gleichungen ist die folgende Bemerkung wichtig: Was man in erster Linie zu erfahren wünscht, ist nicht die Kenntnis jeder Phase in der Bewegung des Motors, sondern die jener stationären Zustände, die sich bei jeweilig gegebenen Arbeitsverhältnissen herstellen. Diese stationären Zustände sind dadurch

Fig. 2.




gekennzeichnet, daſs für gröſsere Zeitintervalle genommen die mittlere Tourenzahl des Motors konstant bleibt. Am besten würde man diesen Bedingungen genügen, wenn man die Annahme in die Gleichungen (1) und (2) einführte, daſs die Winkelgeschwindigkeit des Motors eine periodische Funktion der Zeit wäre. In dem Folgenden beschränke ich mich jedoch auf die Voraussetzung, daſs die Winkelgeschwindigkeit konstant sei. Hierdurch verzichtet man auf eine *quantitativ genaue* Anpassung an die thatsächlichen Verhältnisse, erlangt jedoch dafür den Vorteil, daſs man das *typische* Bild der Verhältnisse in formal einfacherer Weise erhält.

Man setzt demnach

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega; \quad \varphi = \omega t,$$

wobei $\omega$ natürlich von der Zeit unabhängig ist.

Man gelangt hierdurch zu den Gleichungen der stationären Zustände

$$(1') \quad (m + M + m_1) \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - m_1 r_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) = -R \cdot x - q \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$(2') \qquad -m_1 r_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = D - D_1.$$

Die erste dieser Gleichungen ergiebt die Bewegung des Fundamentes. Wählt man die abkürzenden Bezeichnungen

$$\frac{R}{m + M + m_1} = n^2; \quad \frac{2}{m + M + m_1} = 2s; \quad \frac{m_1 r_1 \cdot \omega^2}{m + M + m_1} = \mu,$$

so schreibt sich Gleichung (1′) in der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x + 2s \frac{dx}{dt} = \mu \cdot \cos(\omega t).$$

Die Annahme

$$\mu = 0$$

ergiebt die freie Schwingung des Systemes, deren Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - s^2}}$$

wird. Die Schwingungszahl der Eigenschwingung des freien und ungedämpften Systemes wäre $\frac{n}{2\pi}$.

Das vollständige Integral der Differentialgleichung zerfällt bekanntlich in zwei Teile, in eine vollkommen bestimmte Bewegung — die erzwungene Schwingung — und in eine freie Bewegung des Systemes, die von der Anfangsbedingung herrührt. Diese freie Schwingung kann man im folgenden ganz unterdrücken; sie ist eine gedämpfte Schwingung, welche nach Verlauf einer kurzen Zeit erlischt, so dafs man auf sie bei der Betrachtung der stationären Zustände keine Rücksicht zu nehmen hat.

Die erzwungene Schwingung wird bekanntlich

$$x = A \cdot \cos(\omega t - \psi),$$

wobei

$$A = \frac{\mu}{\sqrt{(n^2 - \omega^2)^2 + 4s^2\omega^2}}$$

$$tg\psi = \frac{2s\omega}{n^2 - \omega^2}$$

gesetzt wurde. Diese Formeln ergeben die Bewegung des Fundamentes bei stationärem Zustande des Motors.

Aus der Differentialgleichung (2′) erhält man sodann jenes Drehmoment $D$, welches man anwenden mufs, um den stationären Zustand des Motors dauernd aufrecht zu halten.

Es ist

$$D = D_1 - m_1 r_1 \sin(\omega t) \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

und somit

$$D = D_1 + m_1 r_1 A \omega^2 \cdot \cos(\omega t - \psi) \cdot \sin(\omega t).$$

Es empfiehlt sich der Übersichtlichkeit wegen in diesem Ausdrucke das Argument $(2\omega t)$ herzustellen, indem man das Produkt der beiden trigonometrischen Funktionen in eine Summe verwandelt.

Es wird

$$D = D_1 + \frac{m_1 r_1 \omega^2 A}{2} \cdot \sin\psi + \frac{m_1 r_1 A \omega^2}{2} \sin[2\omega t - \psi].$$

Man sieht hieraus zunächst, daſs zur Herstellung eines stationären Zustandes ein veränderliches Drehmoment $D$ nötig ist, welches in der Zeit einer Umdrehung, also in $\frac{2\pi}{\omega}$ Sekunden, in der durch die trigonometrische Funktion angegebenen Weise schwankt. Gegebenen Falles kann natürlich auch ein konstantes Drehmoment ausreichend sein, wenn die Arbeitsleistung des Motors und damit die Gröſse $D_1$ so eingerichtet werden kann, daſs sie diese Schwankung kompensiert.

Von gröſserem Interesse sind jedoch die Energieverhältnisse. Man berechnet am besten die mittlere pro Zeiteinheit während einer Umdrehung dem Motor zugeführte Arbeit, also die Gröſse

$$\varepsilon_{\text{mittel}} = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} D\, d\varphi.$$

Bezeichnet man noch den Mittelwert der pro Zeiteinheit während einer Umdrehung dem Motor entnommenen Energie mit

$$\varepsilon'_{\text{mittel}} = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} D_1 \cdot d\varphi,$$

so ergiebt sich

$$\varepsilon_{\text{mittel}} = \varepsilon'_{\text{mittel}} + \frac{m_1 r_1 \omega^3 A}{2} \sin\psi.$$

Ersetzt man die abkürzenden Bezeichnungen $A$, $\psi$ und $\mu$ durch ihre Werte, so wird

$$\varepsilon_{\text{mittel}} = \varepsilon'_{\text{mittel}} + \frac{m_1^2 r_1^2 s \cdot \omega^6}{(m + M + m_1)\,[(n^2 - \omega^2)^2 + 4 s^2 \omega^2]},$$

oder in etwas anderer Form, indem man die Zentrifugalkraft

$$P = m_1 r_1 \omega^2$$

einführt:

$$\varepsilon_{\text{mittel}} = \varepsilon'_{\text{mittel}} + \frac{m_1 r_1}{m + M + m_1} \cdot \frac{P \cdot s\omega^4}{(n^2 - \omega^2)^2 + 4s^2\omega^2} \cdot {}^{1})$$

Wären keine exzentrischen Massen am Motor vorhanden ($P = 0$), oder wäre die Masse des Fundamentes überwiegend grofs ($m = \infty$), oder würde endlich die Unterhaltung der Fundamentbewegung keinen dämpfenden Kräften unterliegen ($s = 0$), so wäre

$$\varepsilon_{\text{mittel}} = \varepsilon'_{\text{mittel}}.$$

In diesen Fällen würde die ganze Energie, welche man in dem stationären Zustande in der Zeiteinheit im Mittel dem Motor zuführen mufs, gleich der mittleren dem Motor entnommenen Energie sein.

Treten jedoch Fundamentschwingungen auf, so ist dem Motor mehr Energie zuzuführen, als er abzugeben hat. Dieser Zuwachs ist durch

$$f(\omega) = \frac{m_1^2 r_1^2 s \cdot \omega^6}{(m + M + m_1)[(n^2 - \omega^2)^2 + 4s^2\omega^2]}$$

gegeben, und er entspricht dem zur Unterhaltung der Fundamentbewegung nötigen Energiebetrage.

Über den Verlauf dieser Zusatzarbeit unterrichtet man sich, indem man die erste Ableitung bildet. Diese ist

$$f'(\omega) = \frac{m_1^2 r_1^2 s}{m + M + m_1} \cdot \frac{2\omega^5 \cdot [(n^2 - \omega^2)(3n^2 - \omega^2) + 8s^2\omega^2]}{[(n^2 - \omega^2)^2 + 4s^2\omega^2]^2}.$$

Für kleine Tourenzahlen

$$\omega \leqq n$$

und für grofse Tourenzahlen

$$\omega \geqq n\sqrt{3}$$

1) Prof. Sommerfeld war so freundlich, mich brieflich darauf aufmerksam zu machen, dafs man diese Formel auch ohne Benutzung der allgemeinen Gleichungen (1) und (2) erhalten kann, wenn man sich auf den Fall konstanter Winkelgeschwindigkeit von vornherein beschränkt. — Man erhält Formel (1′) direkt, indem man die Bedeutung des Gliedes $m_1 r_1 \omega^2 \cos(\omega t)$ als Komponente der Zentrifugalkraft bedenkt. Nach Integration dieser Gleichung hat man weiter die Energieverhältnisse des Motors zu berechnen. Ohne Bewegung des Fundamentes wäre

$$\varepsilon_{\text{mittel}} = \varepsilon'_{\text{mittel}}.$$

Bei der Fundamentbewegung jedoch ist überdies noch die Arbeit

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\omega}} m_1 r_1 \omega^2 \cos \omega t \cdot dx$$

zu leisten. Die Integration führt auf die obenstehende Formel.

ist $f'(\omega)$ beständig positiv. In diesen Gebieten nimmt demnach $f(\omega)$ mit wachsender Tourenzahl zu.

Für Werte von $\omega$ in dem Gebiete

$$n < \omega < n\sqrt{3} \tag{G}$$

ist das Vorzeichen von $f'(\omega)$ durch die Gröfse $s$ bestimmt; es hängt von dem Zeichen des Faktors

$$(n^2 - \omega^2)(3n^2 - \omega^2) + 8s^2\omega^2$$

ab. In dem angegebenen Gebiete wird $f'(\omega)$ Null, wenn $\omega$ eine Wurzel der Gleichung

$$\omega^4 - 4(n^2 - 2s^2)\omega^2 + 3n^4 = 0$$

ist. Reelle Wurzeln dieser Gleichung giebt es jedoch nur dann, wenn

$$4(n^2 - 2s^2)^2 - 3n^4 > 0$$

oder wenn

$$s < \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot n$$

ist.

Ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Ableitung $f'(\omega)$ innerhalb des Gebietes (G) zwei Wurzeln $\omega_1$ und $\omega_2$. Die Funktion $f(\omega)$ nimmt dann für wachsende Werte von $\omega$ zuerst zu, erreicht für $\omega_1$ ein Maximum, nimmt dann wieder ab, um für den gröfseren Wert $\omega_2$ ein Minimum zu erhalten, von welchem ab sie wieder dauernd zunimmt. Beide ausgezeichneten Stellen liegen innerhalb des Gebietes (G) und zwar die Stelle des Maximums $\omega_1$ umso näher an $n$, je kleiner der Wert von $s$ ist.

Für

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \,.\, n = 0{,}2588 \cdot n$$

fallen beide Wurzeln $\omega_1$ und $\omega_2$ der Ableitung zusammen und $f(\omega)$ hat einen Wendepunkt. Für noch gröfsere Werte von $s$ nimmt $f(\omega)$ auch innerhalb des Gebietes (G), also überhaupt immer, zu; in der Umgebung von $\omega = n$ so wie $\omega^4$, für sehr grofse Werte von $\omega$ so wie $\omega^2$.

Man kann nun $\varepsilon_{\text{mittel}}$ als Funktion von $\omega$ konstruieren. Diese Kurve giebt den Zusammenhang zwischen der mittleren dem Motor zugeführten Energie und der Tourenzahl an, wenn bei jeder Tourenzahl der stationäre Zustand hergestellt worden ist. Der Verlauf dieser Arbeitskurve ist wesentlich durch den Verlauf der Arbeitskurve ohne Bewegung des Fundamentes, also durch $\varepsilon'_{\text{mittel}}$, mit bestimmt. Im allgemeinen nimmt letztere Funktion mit wachsendem $\omega$ zu, so dafs auch $\varepsilon_{\text{mittel}}$ zunehmend verläuft.

Für kleine Werte von $s$ können die dann auftretenden Maximum- und Minimumswerte von $f(\omega)$ auch im Verlauf der Arbeitskurve $\varepsilon_{\text{mittel}}$ sich ausdrücken, so daſs man ein Bild von dem nebenstehenden Typus erhält. Diese Kurve wurde unter Annahmen erhalten, welche den Verhältnissen bei den gleich zu besprechenden Versuchen von Prof. Wirtinger sehr ähnlich sind. Es wurde angenommen $m_1 = 5$ Kilogr., $r_1 = 1$ cm, $s = 0{,}8$, $M + m + m_1 = 100$ Kilogr., $n = 364$ Touren pro Minute.

Die Kurve $\varepsilon_{\text{mittel}} = \varepsilon'_{\text{mittel}}$ wurde als Gerade

$$W = \frac{N + 430}{22}.$$

angenommen, wobei $W$ die dem Motor zugeführte Arbeit in Watt und $N$ die Tourenzahl pro Minute bedeuten. Es hat, wie man sieht, $\varepsilon_{\text{mittel}}$ in dem Gebiete

$$n < \omega < n \cdot \sqrt{3}$$

ein Maximum und Minimum und es können innerhalb dieses Gebietes ein und derselben dem Motor zugeführten Energie mehr als eine Tourenzahl entsprechen.

Kurven dieses Typus ergaben sich bei den von Prof. Wirtinger ausgeführten Versuchen. Mit seiner gütigen Erlaubnis führe ich eine dieser Kurven hier an. Zur Erläuterung derselben sei bemerkt, daſs der Motor an der Stelle $a$, an welcher die Fundamentbewegungen sehr starke waren, noch mehr Arbeit zugeführt erhielt. Die Tourenzahl begann sodann rapid zu wachsen, indem zugleich die Fundamentschwingungen abnahmen. Durch entsprechende Verminderung der zugeführten Energie gelang es, einen stationären Zustand des Motors im Punkte $b$ wieder zu erreichen, von wo an die Kurve bei weiterer Arbeitsvermehrung steigt. Das Bild dieser Kurve fällt in den Typus der gezeichneten Art.

Ich konnte mich auch überzeugen, daſs die für das Auftreten dieses Typus notwendige Bedingung

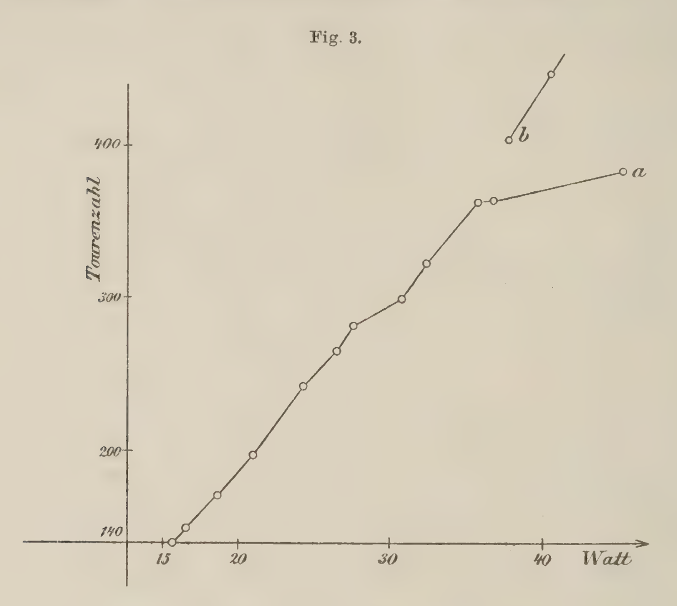
$$s < 0{,}2588\, n$$

in diesem Falle wirklich erfüllt war. Eine Berechnung dieser sehr genauen Beobachtung aus den Formeln konnte ich leider nicht durchführen, da hierzu notwendige Gröſsen, besonders $\varepsilon'_{\text{mittel}}$, teils gar nicht, teils nicht mit genügender Sicherheit bestimmt worden waren.

Die von Prof. Sommerfeld ausgeführten Versuche ergaben offenbar denselben Typus für den Verlauf der Kurve $\varepsilon_{\text{mittel}}$. Prof. Sommerfeld bemerkt in seiner Arbeit, daſs im Gebiete des lebhaften Mit-

schwingens des Fundamentes ein Festhalten des letzteren die Tourenzahl sofort auf einen höheren Wert bringt. Es gab also auch hier innerhalb eines kritischen Gebietes zu einer bestimmten Arbeit $\varepsilon_{\text{mittel}}$ zwei Tourenzahlen. In der That bemerkt auch Prof. Sommerfeld, dafs er bei seinen Versuchen eine kleine Dämpfung hatte.

Fig. 3.




Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, dafs man aus den vorstehenden Betrachtungen auch das Verhältnis der statischen und dynamischen Ausweichung des Fundamentes erhält.

Es ist die Amplitude der Fundamentschwingung

$$A = \frac{\mu}{\sqrt{(n^2 - \omega^2)^2 + 4 s^2 \omega^2}}.$$

Daher hat man

$$\eta_{\text{dyn}} = \frac{m_1 r_1}{m + M + m_1} \cdot \frac{\omega^2}{\sqrt{(n^2 - \omega^2)^2 + 4 s^2 \omega^2}}.$$

Würde jedoch die der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ entsprechende Zentrifugalkraft

$$P = m_1 r_1 \cdot \omega^2$$

als statischer Zug wirkend am Fundamente angreifen, so würde sie demselben eine Ausbiegung $\eta_{\text{stat}}$ erteilen, welche sich aus der Gleichung

$$R \cdot \eta_{\text{stat}} = m_1 r_1 \omega^2$$

ergiebt.

Bezeichnet man mit $\gamma$ das Verhältnis der dynamischen zur statischen Ausbiegung, so erhält man

$$\gamma = \frac{R}{m_1 + M + m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(n^2 - \omega^2)^2 + 4 s^2 \omega^2}}.$$

Am gröſsten ist $\gamma$, also am ungünstigsten das Verhältnis zwischen dynamischer und statischer Ausbiegung für

$$\omega = \sqrt{n^2 - 2s^2}.$$

Am günstigsten wird es für sehr groſse Tourenzahlen, welche die Schwingungszahl der freien ungedämpften Eigenschwingung des Fundamentes weit übertreffen.

---

# Über unendliche Mannigfaltigkeiten der Örter der dioptrischen Kardinalpunkte von Linsen und Linsensystemen bei schiefer Inzidenz.

Von LUDWIG MATTHIESSEN in Rostock.

In der Gauſsschen Dioptrik zentrierter, brechender, sphärischer Flächensysteme mit beschränktem Gesichtsfelde sind die gebräuchlichsten Koordinaten-Anfangspunkte (Kardinalpunkte) die Hauptbrennpunkte, (resp. Brennebenen), die Hauptpunkte (resp. Hauptebenen) und die Knotenpunkte. Die letzteren liegen stets zu den Hauptpunkten symmetrisch gegen die Brennpunkte. Die Hauptpunkte bilden die Grundlage eines bipolaren rechtwinkligen Koordinatensystems; jene Kardinalpunkte sind mit Ausnahme der Brennpunkte, jede Art für sich betrachtet, konjugierte Objekt- und Bildpunkte d. h. der eine ist das Bild des anderen und sie führen wie jedes andere bipolare System konjugierter Punkte zu der bekannten Normalformel der Objekt- und Bilddistanzen

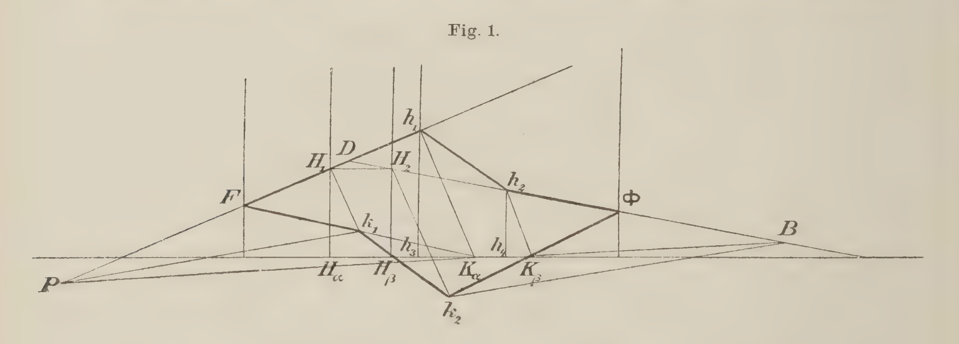
$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1.$$

Die Hauptpunkte und Hauptebenen sind von der Eigenschaft, daſs, wenn ein in das System einfallender Lichtstrahl gegen irgend einen Punkt der Hauptebene gerichtet ist, derselbe so aus dem Systeme austritt, als wenn er aus dem homothetischen Punkte der zweiten Hauptebene herkommt. Die Knotenpunkte andrerseits sind von der Eigenschaft, daſs, wenn der einfallende Lichtstrahl gegen den ersten Knotenpunkt

gerichtet ist, derselbe aus dem Systeme parallel zu dem eintretenden Strahle austritt, als wenn er aus dem zweiten Knotenpunkte käme (paralleler Durchgang). Wir benutzen diese Eigenschaft der gedachten Kardinalpunktepaare, um zu einem leuchtenden Punkte den zugehörigen Bildpunkt zu konstruieren, mit Hülfe des sogenannten dioptrischen Paralleltrapezes.

Es lassen sich nun die Örter der Kardinalpunkte unendlich vielfach variieren, wenn man die Bedingung zuzieht, dafs sie konjugierte Punktepaare bleiben; immer gelangt man dabei zu der Normalformel der Abszissengleichung, falls man die neuen Hauptpunkte auf dem eintretenden und austretenden Strahle sucht. Da aus den Gaufsschen Beschränkungen für die Dioptik zentrierter sphärischer Flächen mit kleinem Gesichtsfelde sich ergiebt, dafs das von einem leuchtenden Punkte ausgehende, unendlich dünne Strahlenbündel immer homozentrisch

Fig. 1.




gebrochen wird, und man von dem einfallenden Strahlenbündel denjenigen Strahl (Achsenstrahl) auswählen kann, welcher mit der Zentrale des Systems in derselben Ebene liegt, so wird auch der austretende Strahl in dieser Ebene liegen, sodafs sich sämtliche Konstruktionen in derselben vollziehen lassen. Die Brennpunkte der durchgehenden Strahlenbündel liegen in den sogenannten Brennebenen, welche senkrecht zur Zentrale in den Hauptbrennpunkten des Systems errichtet sind.

Von Wichtigkeit für die folgenden Betrachtungen sind einige Hülfssätze:

1. Verbindet man die sechs Kardinalpunkte irgend eines durchgehenden Strahles $F H_1 H_2 \Phi K_\beta K_\alpha F$ zu einem Sechseck, so ist diese Figur (Fig. 1) ein sechsseitiges Parallelogramm. Dabei ist $H_1 F$ die vordere, $H_2 \Phi$ die hintere Brennweite und es sei $H_1 F = K_\beta \Phi = f$, $H_2 \Phi = K_\alpha F = \varphi$. Ist nun $P$ ein leuchtender Punkt auf dem einfallenden, $B$ sein Bild auf dem austretenden Strahle, so sind die Knotenpunkte $K_\alpha K_\beta$ ihre Fixpunkte, und $K_\alpha P \parallel K_\beta B$ die adjungierten

Standlinien. Bezeichnet man die Abszisse des leuchtenden Punktes auf dem Strahle $H_1 P$ mit $\xi_0$, die des Bildes $H_2 B$ mit $\xi_1$, so ergiebt die Betrachtung der Figur

$$\frac{H_1 P}{H_1 F} = \frac{H_2 B}{K_\alpha F}, \quad \frac{\xi_0}{\xi_0 - f} = \frac{\xi_1}{\varphi},$$

also

$$\frac{f}{\xi_0} + \frac{\varphi}{\xi_1} = 1. \tag{1}$$

2. Zieht man eine andere Standlinie $K_\alpha h_1$ und damit parallel $K_\beta h_2$, so sind $h_1 h_2$ konjugierte Punkte; sie können mithin als neue Hauptpunkte benutzt werden. Konstruiert man das sechsseitige dioptrische Parallelogramm $F h_1 h_2 \Phi k_2 k_1 F$, so sind die neuen Brennweiten $h_1 F = f_1$ und $h_2 \Phi = \varphi_1$, die neuen Fixpunkte $k_1 k_2$, die parallelen Standlinien der Punkte $P$ und $B$ $k_1 P$ und $k_2 B$, die neuen Objekt- und Bildabszissen auf den Strahlen $h_1 P = \xi_0$, $h_2 B = \xi_1$. Ähnliche Dreiecke ergeben wiederum die Proportion

$$\frac{h_1 P}{h_1 F} = \frac{h_2 B}{k_1 F}, \quad \frac{f_1}{\xi_0} + \frac{\varphi_1}{\xi_1} = 1.$$

Die neuen Knotenpunkte oder Fixpunkte $k_1$ und $k_2$ können ebenso wie die Hauptknotenpunkte $K_\alpha K_\beta$ zur Konstruktion von konjugierten Punkten dienen. So ist z. B. $k_1 H_1 \parallel k_2 H_2$. Hierbei ist bemerkenswert, daſs die beiden variierten Hauptpunkts-Interstitien $h_1 h_2$ eine Fläche bestreichen, welche durch den einfallenden und austretenden Strahl begrenzt ist, während die gleichen Knotenpunkts-Interstitien $k_1 k_2$ eine damit kongruente und symmetrisch gelegene Fläche bestreichen, die zwischen den Knotenlinien $K_\alpha F$ und $K_\beta \Phi$ liegt.

Die vorstehenden Sätze lassen sich nun ebenfalls anwenden auf den Fall der schiefen Inzidenz in sphärische Linsen bei unbeschränktem Gesichtsfelde, wenn man nur die Abszissen auf den Strahlen abmiſst (Reusch). Zur Erläuterung wollen wir einige einfache Fälle behandeln und zwar die Brechung in einer Vollkugel, welche auf den entgegengesetzten Seiten von gleichen und von verschiedenen Substanzen begrenzt ist, sowie die Brechung in einer einfachen Linse.

Bei jeder schiefen Inzidenz in eine krumme Fläche findet mit seltenen Ausnahmen astigmatische Brechung statt Sind die brechenden Flächen Kugelflächen, so bedient man sich der bekannten Reuschschen Formeln zur Berechnung des ersten Bildes $B_1$ der Strahlenfächer im Hauptnormalschnitt oder Achsenschnitt, und des zweiten Bildes $B_2$ der Strahlenfächer im Nebennormalschnitte des unendlich kleinen Dupinschen Kreises. Die Abszissen der Örter $P$, $B_1$, $B_2$ werden auf den Strahlen

selbst gemessen; die Bilder $B_1$ und $B_2$ sind die beiden Brennlinien des astigmatischen Brennraumes. Die Formeln für die Strahlenfächer I. und II. Art sind folgende:

$$(2) \qquad \frac{-r \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_2^2}{x_0} + \frac{r \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_1^2}{x_1} = 1,$$

$$(3) \qquad \frac{-r \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{r \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1.$$

Bei einer Vollkugel hat man diese Formeln zweimal anzuwenden. Setzt man in (2) die Brennweiten auf den Strahlen

$$\frac{-r \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \cos e_2^2 = f_1, \quad \frac{r \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \cos e_1^2 = \varphi_1,$$

so kann man für die Brechung in der Vorderfläche kürzer schreiben

$$\frac{f_1}{y_0} + \frac{\varphi_1}{y_1} = 1;$$

für die Hinterfläche, wenn sie von demselben Medium begrenzt ist,

$$\frac{-\varphi_1}{y_3} + \frac{-f_1}{y_4} = 1.$$

Rechnet man nun die Abszissen der Objekte von der Vorderfläche, die der Bilder von der Hinterfläche ab, so ist zu substituieren

$$y_3 = y_1 - T = y_1 - 2r \cos e_1,$$

wo $T$ die innere Strahlenlänge bezeichnet. Daraus resultiert

$$(4) \qquad \frac{-y_4}{y_4 + f_1} = \frac{y_0}{y_0 - f_1} - \frac{2r \cos e_1}{\varphi_1}.$$

Um zu einer möglichst einfachen Abszissengleichung zu gelangen, suche man zwei auf der inneren Strahlenstrecke $T$ symmetrisch gelegene konjugierte Punkte und wähle sie als Kardinalpunkte eines bipolaren Koordinatensystems. Man setze also $y_4 = -y_0$, woraus sich ihre Distanzen von den Innenflächen ergeben, nämlich

$$y_0' = r \cos e_2, \quad y_4' = -r \cos e_2.$$

Diese Kardinalpunkte seien $E_1$ und $E_2$, welche wir Hauptpunkte nennen wollen, da sie ganz analog den Hauptpunkten Gaufsscher Systeme funktionieren. Setzt man dann zur Verschiebung der Abszissen-Anfangspunkte

$$y_0 = r \cos e_2 + \xi_0, \quad y_4 = -r \cos e_2 + \xi_1$$

in die Gleichung (4) ein und ordnet sie, so erhält man eine Gleichung von der bekannten Normalform, nämlich

$$(5) \quad [B_1] \qquad -\frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\xi_1} = \frac{2 \sin(e_2 - e_1)}{r \sin e_2 \cos e_1 \cos e_2} = \frac{1}{\varphi_1'}.$$

Diese Reduktion kann geschehen entweder durch Anwendung des Hülfssatzes vom sechsseitigen Parallelogramm nach vorhergehender Bestimmung der neuen Brennweiten, indem man einmal $y_4 = \infty$, dann $y_0 = \infty$ setzt, oder auch auf folgende Weise. Da $y_0' = r \cos e_2$ und $y_4' = -r \cos e_2$ konjugierte Werte sind, so ist erstlich nach (4)

$$\frac{r \cos e_2}{-r \cos e_2 + f_1} = \frac{r \cos e_2}{r \cos e_2 - f_1} - \frac{2r \cos e_1}{\varphi_1},$$

und sodann für variabele $\xi_0$ und $\xi_1$

$$\frac{r \cos e_2 - \xi_1}{-r \cos e_2 + f_1 + \xi_1} = \frac{r \cos e_2 + \xi_0}{r \cos e_2 - f_1 + \xi_0} - \frac{2r \cos e_1}{\varphi_1}.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen gelangt man ohne Schwierigkeiten zu (5).

Was weiter die Strahlenfächer II. Art betrifft, so setze man in (3)

$$\frac{-r \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} = f_2, \quad \frac{r \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)} = \varphi_2.$$

Dann gelten für die Brechungen in der Vorder- und Hinterfläche die Gleichungen

$$\frac{f_2}{x_0} + \frac{\varphi_2}{x_2} = 1, \quad \frac{-\varphi_2}{x_3} + \frac{-f_2}{x_4} = 1.$$

Da nun wie vorhin

$$x_3 = x_2 - T = x_2 - 2r \cos e_1$$

ist, so wird

$$(6) \qquad \frac{-x_4}{x_4 + f_2} = \frac{x_0}{x_0 - f_2} - \frac{2r \cos e_1}{\varphi_2}.$$

Um einstweilen der Einfachheit wegen symmetrisch gelegene Kardinalpunkte zu erhalten, setzt man wieder $x_4 = -x_0$, woraus sich die simultanen Wurzelwerte

$$x_0' = \frac{r \cos e_1}{\cos (e_2 - e_1)}, \quad x_4' = \frac{-r \cos e_1}{\cos (e_2 - e_1)}$$

ergeben. Da dies die Werte der inneren Verlängerungen der äufseren Strahlen bis zum Durchschnittspunkte $D$ sind, so bilden diese Kardinalpunkte eine Symptose. Die Verschiebung der Abszissen-Anfangspunkte nach dem Punkte $D$ führt zur Gleichung

$$(7) \quad [B_2] \qquad -\frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\xi_2} = \frac{\sin 2 (e_2 - e_1)}{r \sin e_2} = \frac{1}{\varphi_2'}.$$

Die Vergleichung beider Brennweiten $\varphi_1'$ und $\varphi_2'$ ergiebt

$$(8) \qquad \varphi_1' = \varphi_2' \cos (e_2 - e_1) \cos e_2 \cos e_1,$$

eine Beziehung, die leicht konstruierbar ist.

Wir können nun einen Schritt weiter gehen und voraussetzen, daſs die Hinterfläche der Kugel von einem anderen Medium begrenzt ist, als die Vorderfläche. Alsdann gelten für die Strahlenfächer I. Art in der Vorderfläche

$$f_1 = \frac{-r \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cos e_2^2, \quad \varphi_1 = \frac{r \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cos e_1^2;$$

in der Hinterfläche

$$\varphi_1' = \frac{-r \sin \varepsilon_2}{\sin(\varepsilon_2 - e_1)} \cos e_1^2; \quad f_1' = \frac{r \sin e_1}{\sin(\varepsilon_2 - e_1)} \cos \varepsilon_2^2.$$

Die betreffenden Abszissengleichungen sind also

$$\frac{f_1}{y_0} + \frac{\varphi_1}{y_1} = 1, \quad \frac{\varphi_1'}{y_3} + \frac{f_1'}{y_4} = 1.$$

Da wiederum

$$y_3 = y_1 - 2r \cos e_1$$

ist, so erhält man

$$\frac{\varphi_1' y_4}{y_4 - f_1'} = \frac{\varphi_1 y_0}{y_0 - f_1} - 2r \cos e_1. \tag{9}$$

Simultane Wurzelwerte sind

$$y_0' = r \cos e_2, \quad y_4' = -r \cos \varepsilon_2.$$

Substituiert man durch Verschiebung der Koordinaten nach den Hauptpunkten $E_1$ und $E_2$

$$y_0 = r \cos e_2 + \xi_0, \quad y_4 = -r \cos \varepsilon_2 + \xi_1,$$

so gelangt man zu der Abszissengleichung

$$\frac{-\sin e_2}{\xi_0} + \frac{\sin \varepsilon_2}{\xi_1} = \frac{\cos e_2 \sin(\varepsilon_2 - e_1) + \cos \varepsilon_2 \sin(e_2 - e_1)}{r \cos e_2 \cos \varepsilon_2 \cos e_1} = \frac{-\sin e_2}{f_1''} = \frac{\sin \varepsilon_2}{\varphi_1''}. \tag{10}$$

Daraus folgt

$$\varphi_1'' = -\frac{\sin \varepsilon_2}{\sin e_2} f_1'' = -\frac{1}{n} f_1'', \tag{11}$$

wo $n$ das Brechungsverhältnis des letzten Mediums zu dem des ersten ist.

Für die Strahlenfächer II. Art ist in der Vorderfläche

$$f_2 = \frac{-r \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)}, \quad \varphi = \frac{r \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)};$$

in der Hinterfläche

$$\varphi_2' = \frac{-r \sin \varepsilon_2}{\sin(\varepsilon_2 - e_1)}, \quad f_2' = \frac{r \sin e_1}{\sin(\varepsilon_2 - e_1)}.$$

Die Abszissengleichungen sind also beziehungsweise

$$\frac{f_2}{x_0} + \frac{\varphi_2}{x_2} = 1, \quad \frac{\varphi_2'}{x_3} + \frac{f_2'}{x_4} = 1.$$

Da wieder wie oben

$$x_3 = x_2 - 2r\cos e_1$$

ist, so ist die Abszissengleichung bezüglich des Eintritts- und Austrittspunktes

$$(12) \qquad \frac{\varphi_2' x_4}{x_4 - f_2'} = \frac{\varphi_2 x_0}{x_0 - f_2} - 2r\cos e_1 .$$

Simultane Wurzelwerte, also konjugierte Punkte sind

$$x_0' = \frac{r\cos e_1}{\cos(e_2 - e_1)}, \quad x_4' = \frac{-r\cos e_1}{\cos(\varepsilon_2 - e_1)},$$

folglich die Hauptpunkte $D_1$ und $D_2$. Weil aber jedenfalls das Zentrum $C$ der Kugel Fixpunkt für diese Strahlengattung ist, so ist auch der Schnittpunkt $D$ der äufseren Strahlen Kardinal-Doppelpunkt. Demnach sind ebenfalls simultane Wurzelwerte

$$x_0' = \frac{2r\cos e_1 \sin(\varepsilon_2 - e_1)}{\sin(e_2 + \varepsilon_2 - 2e_1)}, \quad x_4' = \frac{-2r\cos e_1 \sin(e_2 - e_1)}{\sin(e_2 + \varepsilon_2 - 2e_1)}.$$

Verschiebt man jetzt die Koordinaten-Anfangspunkte nach $D$ und nennt die neuen Abszissen $\xi_0$ und $\xi_2$, so wird

$$(13) \qquad \frac{-\sin\varepsilon_2}{\xi_0} + \frac{\sin e_2}{\xi_2} = \frac{\sin(e_2 + \varepsilon_2 - 2e_1)}{r} = \frac{\sin e_2}{\varphi_2''} = \frac{-\sin\varepsilon_2}{f_2''}.$$

Aus (13) folgt

$$(14) \qquad \varphi_2'' = -nf_2''.$$

Für die gewählten Kardinalpunkte $D$ und $E_1 E_2$ erhält man weiter aus (11) und (14)

$$\varphi_1'' \varphi_2'' = f_1'' f_2''.$$

Aus (10) und (13) ergiebt sich die Beziehung

$$(15) \qquad \varphi_1'' = \varphi_2'' \frac{\sin\varepsilon_2}{\sin e_2} \cdot \frac{\cos e_2 \cos\varepsilon_2 \cos e_1 \sin(e_2 + \varepsilon_2 - 2e_1)}{\cos e_2 \sin(\varepsilon_2 - e_1) + \cos\varepsilon_2 \sin(e_2 - e_1)}.$$

Setzt man weiter $n = 1$, $\varepsilon_2 = e_2$, so geht diese Relation wieder in (8) über. Läfst man dagegen $\varepsilon_2$ in $e_1$ übergehen, so ist offenbar nur die Vorderfläche brechend und man mufs wieder zu den Reuschschen Formeln (2) und (3) gelangen. Dies ist für die Gleichung (13) ohne weiteres zutreffend. Bei den Strahlenfächern I. Art wählten wir nicht $D$, sondern $E_1$ und $E_2$ als Anfangspunkte. Behält man sie zunächst bei, so resultiert aus (10)

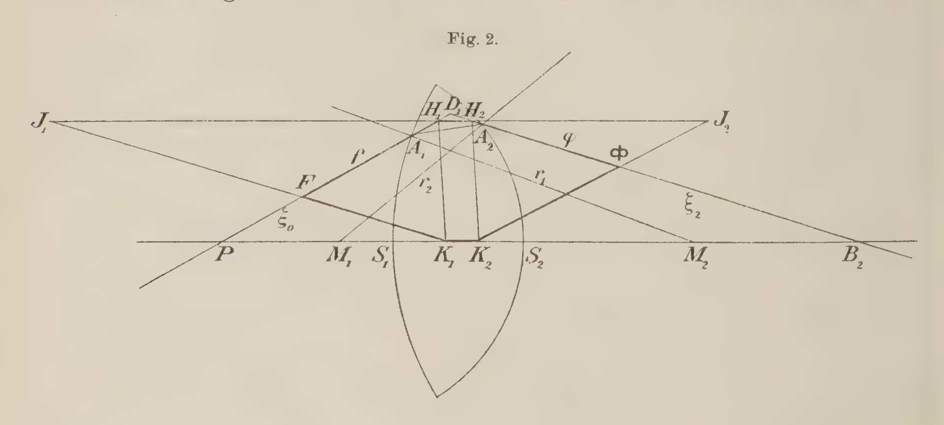
$$(16) \qquad \frac{-\sin e_2}{\xi_0} + \frac{\sin e_1}{\xi_1} = \frac{\sin(e_2 - e_1)}{r\cos e_2 \cos e_1}.$$

Für diese Abszissen giebt es *zwei* Fixpunkte $J_1 J_2$ oder $k_1 k_2$ in dem sechsseitigen dioptrischen Parallelogramm mit einspringenden Winkeln,

wobei $J_1$ und $J_2$ in gerader Linie mit $D$ liegen. Um die vorstehende Gleichung wieder mit (2) in Einklang zu bringen, ist, in Berücksichtigung des Umstandes, dafs der Schnittpunkt der beiden Strahlen jetzt im Einfallspunkte liegt, die Brennweite $f_1''$ zu verkürzen um $r \cos e_2$, dagegen $\varphi_1''$ zu verlängern um $r \cos e_1$.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich nun auch mit Leichtigkeit auf die Strahlenbrechung bei schiefer Inzidenz in sphärische Linsen übertragen. Wir wollen dies zunächst an den Strahlenfächern

Fig. 2.




II. Art erläutern. Es seien die absoluten Werte der Radien der beiden Flächen $r_1$ und $r_2$, Einfalls- und Brechungswinkel an der Vorderfläche $e_2$ und $e_1$, an der Hinterfläche $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$; dann ist

$$(17) \qquad \frac{-r_1 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \frac{1}{x_0} + \frac{r_1 \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1 = \frac{f_2}{x_0} + \frac{\varphi_2}{x_2},$$

$$(18) \qquad \frac{-r_2 \sin \varepsilon_2}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \cdot \frac{1}{x_3} + \frac{r_2 \sin \varepsilon_1}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \cdot \frac{1}{x_4} = 1 = \frac{\varphi_2'}{x_3} + \frac{f_2'}{x_4}.$$

Der innere Strahl $A_1 A_2$ (Fig. 2) hat die Länge

$$(19) \qquad T = r_1 \cos e_1 + r_2 \cos \varepsilon_1 - \sqrt{D^2 - (r_1 \sin e_1 - r_2 \sin \varepsilon_1)^2}.$$

Es ist nun wegen der Relation

$$x_3 = x_2 - T$$

die Abszissengleichung, wie in (12)

$$(20) \qquad \frac{\varphi_2' x_4}{x_4 - f_2'} = \frac{\varphi_2 x_0}{x_0 - f_2} - T.$$

Diese Gleichung läfst sich nun durch Koordinaten-Verschiebung auf die Normalform

$$-\frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\xi_2} = \frac{1}{\varphi}$$

reduzieren auf folgende Art. Man bestimme zunächst die Brennweiten $A_1 F$ und $A_2 \Phi$ aus (20), indem man einmal $x_4 = \infty$, sodann $x_0 = \infty$ setzt. Man findet

$$(21) \qquad A_1 F = f_2'' = \frac{f_2(\varphi_2' + T)}{\varphi_2' - \varphi_2 + T}, \quad A_2 \Phi = \varphi_2'' = \frac{-f_2'(\varphi_2 - T)}{\varphi_2' - \varphi_2 + T}.$$

Sodann suche man aus (20) zwei konjugierte Punkte $H_1$ und $H_2$, die als Hauptpunkte benutzt werden; konjugierte Werte der Abszissen $A_1 H_1$ und $A_2 H_2$, sogenannte Hauptpunktsdistanzen, sind

$$(22) \qquad A_1 H_1 = x_0' = \frac{f_2 T}{\varphi_2' - \varphi_2 + T}, \quad A_2 H_2 = x_4' = \frac{f_2' T}{\varphi_2' - \varphi_2 + T}.$$

Bemerkenswert ist, dafs $H_1 H_2$ mit der optischen Achse $M_1 M_2$ parallel ist. Verschiebt man die Abszissenanfangspunkte von $A_1$ nach $H_1$, von $A_2$ nach $H_2$, so sind jetzt die Brennweiten

$$(23) \qquad H_1 F = f = \frac{f_2 \varphi_2'}{\varphi_2' - \varphi_2 + T}, \quad H_2 \Phi = \varphi = \frac{-f_2' \varphi_2}{\varphi_2' - \varphi_2 + T}$$

also $\varphi = -f$. Man kann jetzt das sechsseitige dioptrische Parallelogramm $F H_1 H_2 \Phi K_2 K_1 F$ zeichnen; die beiden Fix- oder Knotenpunkte $K_1 K_2$ liegen auf der Achse und können zu neuen Konstruktionen verwendet werden. Man gelangt zu den Punkten $H_1 H_2$ noch auf eine andere Art; es sind $P$ und $B_2$ konjugierte Punkte, also läfst sich das sechsseitige Parallelogramm $F P B_2 \Phi J_2 J_1 F$ konstruieren, wobei die Standlinie $J_1 J_2$ durch $H_1$ und $H_2$ geht. Für die Randstrahlen gehen die Punkte $A_1 D A_2$ in den Rand über, $T = 0$, die Hauptpunkte $H_1 H_2$ ebenfalls und bilden eine Symptose, während die Fixpunkte $K_1 K_2$ in einem einzigen sich vereinigen.

Was die Strahlenfächer I. Art anbelangt, so ist

$$(24) \qquad \frac{-r_1 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_2^2}{y_0} + \frac{r_1 \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos e_1^2}{y_1} = 1 = \frac{f_1}{y_0} + \frac{\varphi_1}{y_1},$$

$$(25) \qquad \frac{-r_2 \sin \varepsilon_2}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \cdot \frac{\cos \varepsilon_1^2}{y_0} + \frac{r_2 \sin \varepsilon_1}{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \cdot \frac{\cos \varepsilon_2^2}{y_1} = 1 = \frac{\varphi_1'}{y_3} + \frac{f_1'}{y_4}.$$

Die Behandlung dieses Falles ist der des vorangehenden analog.

Von besonderem Interesse ist noch der Fall des parallelen Durchganges durch den optischen Mittelpunkt einer Linse. Es läfst sich leicht erweisen, dafs die Ebene des parallelen Durchganges immer ein Achsenschnitt ist. Zunächst läfst sich weiter zeigen, dafs die Radien $r_1$ und $r_2$ parallel sein müssen; es ist nämlich

$$e_2 - e_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \quad e_2 + \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + e_1;$$

folglich

$$\cos e_2 \cos \varepsilon_1 - \sin e_2 \sin \varepsilon_1 = \cos \varepsilon_2 \cos e_1 - \sin \varepsilon_2 \sin e_1,$$

und aufserdem

$$2 \sin e_2 \sin \varepsilon_1 = 2 \sin \varepsilon_2 \sin e_1 .$$

Die Addition beider Gleichungen ergiebt

$$\cos (e_2 - \varepsilon_1) = \cos (\varepsilon_2 - e_1)$$

oder

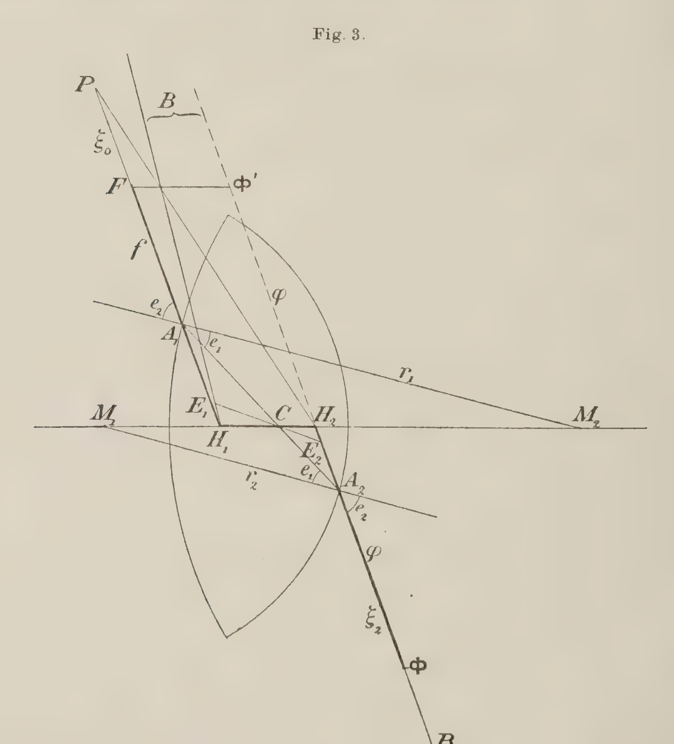
$$e_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - e_1 .$$

In Verbindung mit der obigen Gleichung wird demnach

$$e_2 = \varepsilon_2 , \quad e_1 = \varepsilon_1 , \tag{26}$$

woraus sich der Parallelismus der Radien ergiebt.

Fig. 3.




Die Gleichungen (17), (18), (19) nehmen für den parallelen Durchgang folgende einfachere Form an:

$$\frac{- r_1 \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{r_1 \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1 = \frac{f_2}{x_0} + \frac{\varphi_2}{x_2} , \tag{27}$$

$$\frac{- r_2 \sin e_2}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_3} + \frac{r_2 \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_4} = 1 = \frac{\varphi_2'}{x_3} + \frac{f_2'}{x_4} , \tag{28}$$

$$T = (r_1 + r_2) \cos e_1 - \sqrt{D^2 - (r_1 + r_2)^2 \sin e_1^2} . \tag{29}$$

Ebenso vereinfachen sich die Relationen (21), (22), (23), wodurch $\varphi = -f$ wird. Ferner ergeben die Formeln, dafs für die Strahlenfächer II. Art die Punkte $H_1$ und $H_2$ (Fig. 3) konjugiert, also Hauptpunkte für diese Art sind; für die Strahlenfächer I. Art (2) die Punkte $E_1$ und $E_2$ Hauptpunkte für diese Art. Da

$$H_1 A_1 : H_2 A_2 = r_1 : r_2 = E_1 A_1 : E_2 A_2,$$

so gehen beide Hauptpunkts-Interstitien durch das optische Zentrum $C$.

Man kann jetzt für beide Arten die sechsseitigen dioptrischen Parallelogramme konstruieren, um die adjungierten Fixpunkte zu finden. Man erkennt aber leicht, dafs sie in die gebrochenen Linienzüge $FH_1H_2\Phi$ und den analogen $F_1E_1E_2\Phi_1$ zusammenfallen, und die adjungierten Fixpunkte in den Strahlen selbst liegen, mithin zu Konstruktionen anderer konjugierter Punkte nicht verwertbar sind. Statt dessen kann man, wie in Fig. 3 angedeutet ist, auf Grund der Beziehung

$$\frac{\xi_2 - \xi_0}{\xi_0 \xi_2} = \frac{1}{f}, \quad \frac{H_2 B - H_1 P}{H_2 B \cdot H_1 P} = \frac{1}{H_1 F}$$

zu der gegebenen Objektabszisse und der Brennweite die dritte harmonische Proportionale, die Bildabszisse konstruieren.

Die Theorie des zentralen Durchgangs von Strahlen peripherischer Objekte ist bereits früher von Ludimar Hermann in ausgezeichneter Weise abgehandelt worden.[1]) Die Punkte $H_1 H_2$ nennt er *Direktionspunkte*, die Punkte $E_1 E_2$ *Seitenpunkte*.

---

# Sir Robert S. Balls lineare Schraubengebiete.

Von A. Grünwald in Prag-Bubentsch.

Mit 2 Doppeltafeln I u. II.

Es soll hier eine rein-geometrische Übersicht der linearen Schraubenmannigfaltigkeiten, ihrer Achsenlagen und Parameter-Verteilung geboten werden, wie eine solche zuerst von Sir Robert S. Ball („Theory of Screws, A Study in the Dynamics of a Rigid Body", Dublin 1876, deutsch von Harry Gravelius als „Theoretische Mechanik starrer Systeme", Berlin 1889; zuletzt in „A treatise on the theory of screws", Cambridge 1900) entwickelt worden ist. Dies geschah dort vorwiegend in mechanischem Gewande; es ergab sich, dafs jeder starre Körper von

1) L. Hermann, Pogg. Ann. 153. S. 470 (1874); Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. 18. S. 443 (1878); 20. S. 370 (1879); 27. S. 291 (1882).

beliebigem Freiheitsgrade $n$ ($\leq 6$) beweglich ist um die Schrauben einer *linearen* Mannigfaltigkeit $n$ter Stufe $R_n$ und nicht beeinflufst wird durch Dynamen, welche einer anderen linearen, zur ersteren „reziproken“ Schraubenmannigfaltigkeit der $\nu = (6 - n)$ten Stufe $P_\nu$ angehören. Von uns soll die Bekanntschaft mit den einfachsten Operationen der Ausdehnungslehre Hermann Grafsmanns ($A_1$ 1844, $A_2$ 1862) vorausgesetzt werden. (Vergl. E. W. Hyde in den Annals of Mathematics, vol. IV, N 5, 1888 und vom selben Verfasser: „The directional calculus, based upon the methods of Hermann Grafsmann, Boston 1890). Unser Raum von drei Dimensionen ist durch vier nicht in einer Ebene liegende Massenpunkte $e_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) bestimmt. Jeder Punkt $x$ desselben kann mittelst geeigneter Zahlgröfsen $x_i$ als Vielfachensumme $x = \sum x_i e_i$ dieser vier Grundpunkte dargestellt werden; diese Summierung ist in der Mechanik als Schwerpunktsbestimmung bekannt, die $x_i$ sind die allgemeinen linaren Punktkoordinaten, speziell wenn $e_1$, $e_2$, $e_3$ unendlich ferne Punkte, d. h. Strecken von konstanter Richtung und Länge vorstellen, homogene Hessesche Parallelkoordinaten.

Unter dem „äufseren“ Produkte dreier Massenpunkte, z. B. $e_1, e_2, e_3$ wird das ebene „Blatt“ oder der Ebenenteil $(e_1 e_2 e_3)$ verstanden, nicht blofs nach seinem Flächeninhalt und seiner Stellung aufgefafst wie z. B. ein in der Mechanik gebräuchliches Kräftepaar (Drehzwilling, das äufsere Produkt zweier Strecken), sondern auch nach seiner Zugehörigkeit zu einer bestimmten Ebene. Zwei Blätter werden also wie zwei Drehzwillinge der Mechanik addiert, nur mufs bei dem Summenblatt noch die Zugehörigkeit zu der durch die Schnittlinie der gegebenen Blätter gehenden Ebene festgehalten werden. In diesem Sinne ist jedes Blatt $\xi$ des Raumes als Vielfachensumme

$$\xi = \xi_1 \cdot e_2 e_3 e_4 + \xi_2 \cdot e_3 e_4 e_1 + \xi_3 \cdot e_4 e_1 e_2 + \xi_4 \cdot e_1 e_2 e_3$$

der vier Grundblätter des Bezugstetraeders darstellbar; die Zahlgröfsen $\xi_i$ sind hierbei die allgemeinen linearen Ebenenkoordinaten, speziell wenn $e_1$, $e_2$, und $e_3$ Strecken sind, die homogenen Hesseschen Ebenenkoordinaten.

Unter dem äufseren Produkte zweier Massenpunkte, z. B. $e_1$ und $e_2$, wird der Linienteil oder „Stab“ $(e_1 e_2)$ verstanden, nicht blofs wie bei der Strecke aufgefafst nach Länge und Richtung, sondern auch nach der Zugehörigkeit zu der bestimmten Geraden, also wie eine Kraft oder auch eine Drehgeschwindigkeit um eine Achse in der Mechanik starrer Systeme. (Auch als „eingewandtes“ Produkt zweier Blätter $e_1 e_2 e_3$ und $e_1 e_2 e_4$ kann der Stab $e_1 e_2$ aufgefafst werden.) Ist speziell $e_1$ sowohl als $e_2$ eine Strecke, so heifst der unendlichferne Stab $(e_1 e_2)$ ein „Feld“; er

entspricht dann als geometrisches Bild vollständig dem Begriffe des Drehzwillings oder auch einer Parallelverschiebungsgröfse, d. h. einer Geschwindigkeitskomponente der Drehung um eine unendlich ferne Achse. Addiert werden Stäbe wie Kräfte oder Winkelgeschwindigkeiten bei Achsendrehungen.

Jeder Stab $l$ ist aus den sechs Grundstäben des Elementartetraeders $e_1 e_2 e_3 e_4$:

$$e_1 e_2,\ e_1 e_3,\ e_1 e_4,\ e_2 e_3,\ e_3 e_4,\ e_4 e_2$$

durch geeignete Zahlgröfsen $p_{i,\,k}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ linear ableitbar:

$$l = \sum p_{i,\,k}\ e_i e_k.$$

Die Bestimmungsstücke $p_{i,\,k}$ sind, falls zwischen ihnen die sogleich zu besprechende quadratische Relation

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0$$

besteht, die sogenannten Plückerschen Linienkoordinaten, welche eigentlich, wie dies F. Klein (Nichteuklidische Geometrie, Göttingen 1893) bemerkt, nach Grafsmann benannt werden sollten, der seine umfassendere Theorie 1844, also zwei bis drei Jahre vor Plücker aufgestellt hat. Besteht die erwähnte Relation nicht, so ist

$$\sum p_{i,\,k} e_i e_k = L$$

nicht als ein Stab, sondern nur als Summe von mindestens zwei solchen windschiefen $l_1$ und $l_2$ darstellbar, die dann „konjugiert“ heifsen: $L = l_1 + l_2$. (Vergl. Moebius, Ges. Werke, Leipzig 1886, III. Bd.; Reye, Geom. d. Lage, Leipzig 1892 gebraucht für die Windschiefen, auf welchen $l_1$ und $l_2$ liegen, statt der Bezeichnung „konjugiert bzl. $L$“ den Ausdruck „reziproke Polaren im Nullsystem $L$.“) Bekanntlich ist bei gegebener Summe $L$ eine der konjugierten Geraden, z. B. die von $l_1$ beliebig, die Länge und der Sinn von $l_1$, sowie der konjugierte Stab $l_2$ ist dann schon bestimmt.

$L$ nennen wir eine „Schraube“; sie kann in eindeutiger, kanonischer Weise als Summe eines bestimmten Stabes $l$ und eines hierzu senkrechten Feldes $f$ dargestellt werden:

$$L = l + f.$$

Giebt man $f$ die Form eines Rechteckes, dessen eine Seite die Länge $\bar{l}$ von $l$ hat, so heifst die zweite Seitenlänge $\mathfrak{p}$ nach Plücker der „Parameter“ der Schraube. Er soll positiv oder negativ sein und die entsprechende Schraube rechts oder links gewunden heifsen, je nachdem

das Feld $f$ einem in der Richtung von $l$ blickenden Beobachter als im Uhrzeigersinne beschrieben erscheint oder nicht. Die gegenteilige Festsetzung wäre ebenso zulässig. Multiplizieren wir $L$ mit einem beliebigen Zahlfaktor, so bleiben die Achse und der Parameter der sich ergebenden Schraube die gleichen. Alle so erzeugbaren Schrauben von gleicher Achse und gleichem Parameter bilden eine „Schraubung". Die Schraubung verhält sich hiernach zur Schraube wie die Gerade zu einem ihrer Stäbe; sie ist umkehrbar eindeutig verbunden mit dem Begriffe eines „Nullsystems" von Moebius, da Schraubung und Nullsystem in identischer Weise bestimmt sind durch die Zuordnung der konjugierten Geraden. Wir verbleiben auf dem Standpunkte euklidischer Metrik; $l$ und $f$ ist das einzige Konjugiertenpaar von $L$, welches auch polar ist bzl. des absoluten Kugelkreises. (Würde in einer nichteuklidischen Geometrie eine andere Cayleysche Maſsfläche festgelegt, so gäbe es im allgemeinen auch nur ein auch bzl. derselben polares Konjugiertenpaar, geeignet zu einer kanonischen Darstellung.)

Addiert man zu $l$ ein paralleles Feld, wodurch $l$ parallel nach $l'$ verschoben wird, bei gleichzeitiger Subtraktion dieses Feldes von $f$, so erhält man

$$L = l' + f',$$

d. h. als Summe eines mit $l$ streckengleichen Stabes $l'$ und eines (nicht mehr hierzu senkrechten) Feldes $f'$. Hat die senkrechte Entfernung von $l$ und $l'$ die Länge $\varrho$, so ist $f'$ gegen $f$ um einen Winkel $\alpha$ gedreht, und zwar um die zu $l$ senkrechte Richtung der Ebene $ll'$, welcher der Bedingung

$$\varrho = \mathfrak{p} \operatorname{tg} \alpha$$

genügt. Ist $w$ ein beliebiger Punkt, so heiſst die Ebene des Blattes

$$(wL) = (wf')$$

[falls $l'$ durch $w$ gelegt wird, ist $(wl') = 0$] die „Nullebene" desselben bzl. $L$ und $\varrho = \mathfrak{p} \operatorname{tg} \alpha$ drückt die metrische Beziehung aus zwischen der Länge $\varrho$ des Lotes $ww_0$ aus $w$ auf die „Achse" $l$ der Schraube $L$ („Achse" des Nullsystems $L$) und dem Winkel $\alpha$, um welchen sich die Nullebene $(w_0 f)$ des Punktes $w_0$ beim Übergange dieses Punktes nach $w$ (um $w_0 w$ herum) gedreht hat. Der Parameter ist mithin gleich der Entfernung jener Punkte von der Schraubenachse, deren Nullebene mit dieser Achse den Winkel $45^0$ einschlieſst.

Nach dem Begriffe *linearer* Mannigfaltigkeiten kann man an Stelle der sechs Grundstäbe $e_i e_k$ sechs feste Schrauben $L_i$ $(i = 1, . . 6)$ treten lassen und aus diesen als linear von einander unabhängig voraus-

gesetzten „Grundschrauben“ jede Schraube $L$ durch geeignete Zahlgröſsen $\lambda_i$ ableiten:

$$L = \sum \lambda_i L_i.$$

Die $\lambda_i$ sind dann die allgemeinen Ballschen Schraubenkoordinaten.[1])

Unter dem Produkte zweier Stäbe $l_1 l_2$ ist die Inhaltszahl des durch $l_1$ und $l_2$ bestimmten Parallelepipedes oder Spates zu verstehen. Dasselbe soll positiv oder negativ sein, je nachdem einem längs eines der Stäbe gelegten und dem anderen zugewandten Schwimmer der andere Stab nach links oder rechts hin gerichtet erscheint. Es gilt $l_1 l_2 = l_2 l_1$, wie denn auch Stäbe als Punktprodukte von der zweiten Stufe sind. Der Name „Produkt“ wird dadurch gerechtfertigt, daſs in Bezug auf die Addition der Stäbe das distributive Gesetz gilt, wonach $l_1 l_2$ ungeändert bleibt, wenn einer dieser Stäbe (oder fernerhin auch beide) in Summanden zerlegt und die algebraische Summe der sich ergebenden Teilspate gebildet wird. Genau so ergiebt sich aus dem distributiven Gesetze die Bedeutung eines *Produktes zweier Schrauben* $(LA)$ als Summe von (4) Teilspat-Inhaltszahlen, welche von der zufälligen Wahl der konjugierten Stäbe unabhängig ist und von Ball der doppelte „virtuelle Koeffizient“ beider Schrauben genannt wird. Ist dieser Null, so wollen wir mit Ball die Schrauben **„reziprok“** nennen. Reye sagt in diesem Falle, daſs sich die beiden zu $L$ und $A$ gehörigen Nullsysteme „stützen“ oder „tragen“, während F. Klein (Mathematische Annalen II) von „involutorischer Lage“ spricht.

Für jede Schraube $L = l + f$ ist die Zahl

$$\tfrac{1}{2}L^2 = \tfrac{1}{2}L \cdot L = \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2)\,(l_1 + l_2) = l_1 l_2 = \tfrac{1}{2}(l + f)\,(l + f) = lf = \bar{l}^2\mathfrak{p}$$

charakteristisch und soll „Inhalt“ der Schrauben (H. Graſsmann jun. gebraucht hierfür das Wort „Charakteristik“. Schraubenrechnung und Nullsystem, Halle 1899) genannt werden. Die sich ergebende Beziehung

$$l_1 l_2 = lf = \bar{l}^2\mathfrak{p} = \text{const.}$$

ist ein Ausdruck des Chaslesschen Satzes über die Invarianz des Spatinhaltes $l_1 l_2$, wenn $l_1$ und $l_2$ beliebige konjugierte Stäbe von $L$ sind. (Aus unseren Vorzeichenbestimmungen ergiebt sich, daſs Schraubeninhalt und Parameter stets gleichbezeichnet sind.) Folgerichtig ist ein Stab oder ein Feld als Schraube vom Inhalte Null anzusehen; ersterem kommt aber der Parameter $O$, letzterem der Parameter $\infty$ zu, denn

---

1) Ball gebraucht stets solche Proportionalzahlen der obigen $\lambda_i$ als Koordinaten, welche die Stablänge von $L$ der Einheit gleich machen; wir wollen indessen an letzterer Forderung nicht festhalten.

der Parameter ist jene Längenzahl, mit welcher die Länge $\bar{l}$ des Achsenstabes $l$ multipliziert werden mufs, um den Flächeninhalt von $f$ zu erhalten.

Ist umgekehrt der Inhalt einer Schraube $\frac{1}{2}L^2 = l_1 l_2 = 0$, so können keine zwei konjugierten Stäbe windschief sein, d. h. $L$ ist selbst ein Stab oder speziell ein Feld.

An dieser Bedingungsgleichung dafür, dafs eine Schraube zum Stabe (speziell zum Felde) ausartet, wollen wir auch dann festhalten, wenn $L$ nicht reell, sondern von der Form

$$L = L_1 + L_2\sqrt{-1}$$

ist, wobei $L_1$ und $L_2$ reelle Schrauben bedeuten.

$$L^2 = (L_1^2 - L_2^2) + 2L_1L_2\sqrt{-1} \text{ oder } L_1^2 = L_2^2 \text{ und } L_1L_2 = 0$$

sagt dann aus, dafs die Schrauben $L_1$ und $L_2$ reziprok und inhaltsgleich sein müssen. $L$ heifst in diesem Falle ein komplexer Stab und dessen Schraubung eine imaginäre Gerade von Staudts 2. Art.

Es ist leicht, die „Liniengleichung“ $L^2 = 0$ in die angeführte Relation $p_{12} \cdot p_{34} + \cdots = 0$ zwischen den Plückerschen Linienkoordinaten überzuführen. Man braucht nur beim Quadrieren von

$$L = \sum p_{i,k} e_i e_k$$

zu berücksichtigen, dafs

$e_1e_2 \cdot e_1e_2 = 0$ etc. (der Spat über identischen Stäben ist Null)
$e_1e_2 \cdot e_1e_3 = 0$ „ „ „ „ sichschneidenden „ „ „
$e_1e_3 \cdot e_4e_2 = e_1e_2e_3e_4$ „ „ „ „ den Stäben $e_1e_3$ und $e_4e_2$ ist gleich jenem über $e_1e_2$ und $e_3e_4$.)

Wollen wir die Liniengleichung $L^2 = 0$ statt in Plückerschen Linienkoordinaten in beispielsweise einfach gewählten Ballschen Schraubenkoordinaten schreiben, so können wir als sechs Grundschrauben $L_i$ $(i = 1, 2, 3, -1, -2, -3)$ annehmen:

$$\begin{aligned} L_1 &= (e_1e_2 + e_3e_4) \qquad & L_{-1} &= (e_1e_2 + e_4e_3) \\ L_2 &= (e_1e_3 + e_4e_2) \qquad & L_{-2} &= (e_1e_3 + e_2e_4) \\ L_3 &= (e_1e_4 + e_2e_3) \qquad & L_{-3} &= (e_1e_4 + e_3e_2), \end{aligned}$$

welches ein System korreziproker Grundschrauben vorstellt, denn jede $L_i$ ist gegen alle übrigen fünf, nur nicht gegen sich selbst, reziprok, wie sich durch Ausmultiplizieren ergiebt. Wählt man insbesondere $e_1$, $e_2$ und $e_3$

als auf einander senkrechte Einheitsstrecken, $e_4$ als Punkt, so sind die $L_i$ von selbst in kanonischer Form. Jede Schraube $L$ ist nun gemäfs

$$L = \sum \lambda_i L_i \qquad (i = \pm 1, \pm 2, \pm 3)$$

durch die sechs $\lambda_i$ bestimmt. Mit Rücksicht auf

$$L_1^2 = L_2^2 = L_3^2 = -L_{-1}^2 = -L_{-2}^2 = -L_{-3}^2$$

kommt $L^2 = 0$ auf

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - (\lambda_{-1}^2 + \lambda_{-2}^2 + \lambda_{-3}^2) = 0$$

hinaus.

Wünschen wir ein korreziprokes System mit inhaltsgleichen Grundschrauben, so brauchen wir nur z. B. statt $L_{-1}$, $L_{-2}$, $L_{-3}$ die imaginären Schrauben

$$L_{-1}\sqrt{-1} = L_4, \quad L_{-2}\sqrt{-1} = L_5, \quad L_{-3}\sqrt{-1} = L_6$$

einzuführen. Sind die zu den letzteren gehörigen Ableitungszahlen $\lambda_4$, $\lambda_5$, $\lambda_6$, so ist $L^2 = 0$ gleichbedeutend mit

$$\sum \lambda_i^2 = 0. \qquad (i = 1 \ldots 6)$$

Die geometrische Bedeutung der Ballschen $\lambda_i$, bezogen auf ein System korreziproker Grundschrauben vom gleichen Inhalte 1 ergiebt sich aus $L = \sum \lambda_i L_i$ durch Multiplikation mit $L_i$

$$(L_i L_k = 0, \ \tfrac{1}{2} L_i^2 = \tfrac{1}{2} L_k^2 = e_1 e_2 c_3 e_4 = 1, \text{ wobei } k \gtrless i, = 1, \ldots 6 \text{ sei})$$

$$L L_i = \lambda_i L_i^2 = 2\lambda_i,$$

d. h.
$$\lambda_i = \tfrac{1}{2}(L L_i).$$

„Die $\lambda_i$ bedeuten das halbe Produkt (den virtuellen Koeffizienten Balls) von $L$ in die entsprechende Grundschraube $L_i$“, es gilt also identisch

$$L = \sum (\tfrac{1}{2} L L_i)\, L_i.$$

Die Bedeutung der Plückerschen Linienkoordinaten $p_{i,k}$ folgt aus der Multiplikation der Gleichung $L = \sum p'_{i,k} e_i e_k$ mit $(e_m e_n)$, wenn $e_m e_n$ die Gegenkante zu $(e_i e_k)$ des Grundtetraeders bedeutet und so angenommen wird, dafs $e_i e_k e_m e_n = e_1 e_2 e_3 e_4 = 1$ ist. Unter dieser Voraussetzung ergiebt sich: $p_{i,k} = L \cdot (e_m e_n)$. „Die $p_{i,k}$ sind die Produkte (oder Momente, Balls virtuelle Koeffizienten) einer Schraube $L$ (spez. eines Stabes $L = l$, wenn $L^2 = 0$) in die Gegenkante $(e_m e_n)$ jener $e_i e_k$ des Grundtetraeders, zu welcher die Ableitungszahl $p_{i,k}$ gehört.“ Es

gilt also identisch $L = \sum [L \cdot (e_m e_n)] e_i e_k$. Ist speziell wegen $L^2 = 0$ $L = l$, ein Stab $= \sum p_{i,k} e_i e_k$, also als $\frac{\text{Verbindungs-}}{\text{Schnitt}}$ Stab zweier $\frac{\text{Punkte}}{\text{Blätter}}$ $x$ und $y$ darstellbar, so ergiebt sich durch Ausmultiplizieren

$$l = xy = \sum \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} \cdot e_i e_k,$$

also sind in *diesem* Falle die $p_{i,k}$ die sechs Determinanten der Matrix der Koordinaten dieser $\frac{\text{Punkte}}{\text{Blätter}}$. Im folgenden Abschnitte ziehen wir die $\lambda_i$ den $p_{ik}$ vor.

## Einführung der linearen Schraubenmannigfaltigkeiten und ihrer reziproken Gebiete.

Sind die $\lambda_i$ $(i = 1, \ldots 6)$ beliebig, so kann $L = \sum \lambda_i L_i$ jede Schraube des Raumes bedeuten. Dieser ist also als lineares Schraubengebiet von der VI. Stufe: $R_{\text{VI}}$, oder von fünf Dimensionen, er erhält $\infty^5$ Schraubungen. (Die Dimensionenzahl bleibt um 1 hinter der Stufenzahl Grafsmanns zurück.) Nehmen wir nun an, zwischen den $\lambda_i$ bestehe eine homogene lineare Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad \sum \alpha_{1i} \lambda_i = 0.$$

Diese ist identisch mit $(A_1 L) = 0$, wenn $A_1 = \sum \alpha_{1i} L_i$ gesetzt wird, sagt also aus, dafs *jede* Schraube $L$ des aus dem Schraubengebiete des Raumes durch die Gleichungen (I) ausgeschiedenen linearen Schraubengebietes $R_{\text{V}}$, *des „Schraubengewebes"* der $L$, gegen eine bestimmte Schraube $A_1$ reziprok ist, also auch reziprok gegen jede Schraube der durch $A_1$ definierten Schraubung $P_{\text{I}} = x_1 A_1$ ($x_1$ beliebige Zahl). Umgekehrt gehört zu jeder Schraubung $P_{\text{I}}$ ein Gewebe $R_{\text{V}}$ reziproker Schrauben, erfüllt von jenen Schrauben $L = \sum \lambda_i L_i$, deren $\lambda_i$ der linearen homogenen Gleichung (I) genügen, falls die $\alpha_{1i}$ als Koordinaten einer Schraube $A_1$ der Schraubung $R_{\text{I}}$ angenommen werden.

Bestehen zwischen den $\lambda_i$ der Schraube $L = \sum \lambda_i L_i$ zwei von einander unabhängige homogene lineare Gleichungen

$$\text{(II)} \qquad \begin{Bmatrix} \sum \alpha_{1i} \lambda_i = 0 \\ \sum \alpha_{2i} \lambda_i = 0 \end{Bmatrix}, \text{ identisch mit } \begin{Bmatrix} A_1 L = 0 \\ A_2 L = 0 \end{Bmatrix},$$

wenn $A_1$ und $A_2$ die Schrauben $\begin{Bmatrix} A_1 = \sum \alpha_{1i} L_i \\ A_2 = \sum \alpha_{2i} L_i \end{Bmatrix}$

bedeuten, so sagen dieselben aus, daſs jede beliebige Schraube $L$ des durch die Gleichungen (II) aus dem Schraubengebiete des Raumes ausgeschiedenen linearen Schraubengebietes IVter Stufe, des *„Schraubengebüsches“* $R_{IV}$, reziprok ist gegen die zwei linear von einander unabhängigen Schrauben $A_1$ und $A_2$, also auch reziprok gegen jede Schraube des durch die beiden letzteren bestimmten II-stufigen linearen Schraubengebietes, des *„Schraubenbüschels“*

$$P_{II} = x_1 A_1 + x_2 A_2$$

($x_1$ und $x_2$ beliebige Zahlen). Umgekehrt ist durch zwei beliebige linear unabhängige Schrauben

$$\begin{Bmatrix} A_1 = \sum \alpha_{1i} L_i \\ A_2 = \sum \alpha_{2i} L_i \end{Bmatrix}$$

eines hierdurch bestimmten Schraubenbüschels $P_{II}$ ein Gebüsch $R_{IV}$ reziproker Schrauben $L = \sum \lambda_i L_i$ festgelegt, indem zwischen deren $\lambda_i$ der Bestand der linearen homogenen Gleichungen

$$\begin{Bmatrix} \sum \alpha_{1i} \lambda_i = 0 \\ \sum \alpha_{2i} \lambda_i = 0 \end{Bmatrix}$$

gefordert wird.

Gelten analog zwischen den $\lambda_i$ der Schraube $L = \sum \lambda_i L_i$ drei von einander unabhängige lineare homogene Gleichungen

$$\text{(III)} \qquad \begin{Bmatrix} \sum \alpha_{1i} \lambda_i = 0 \\ \sum \alpha_{2i} \lambda_i = 0 \\ \sum \alpha_{3i} \lambda_i = 0 \end{Bmatrix}, \text{ identisch mit } \begin{Bmatrix} A_1 L = 0 \\ A_2 L = 0 \\ A_3 L = 0 \end{Bmatrix},$$

wo $A_1$, $A_2$, $A_3$ die Schrauben $\begin{Bmatrix} A_1 = \sum \alpha_{1i} L_i \\ A_2 = \sum \alpha_{2i} L_i \\ A_3 = \sum \alpha_{3i} L_i \end{Bmatrix}$

sind, so erfüllen die mit diesen drei Bedingungen verträglichen $\infty^3$ Schrauben ($\infty^2$ Schraubungen) $L$ ein lineares III-stufiges Schrauben-

gebiet, ein „Schraubenbündel“ $R_{\mathrm{III}}$, dessen sämtliche Schrauben, welches also, wie wir kurz sagen, selbst gegen die Schrauben des Bündels

$$P_{\mathrm{III}} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3$$

($x_1$, $x_2$, $x_3$ beliebige Zahlen) reziprok ist. Die Beziehung der reziproken Bündel $R_{\mathrm{III}}$ und $P_{\mathrm{III}}$ ist vollkommen gegenseitig, jedem $P_{\mathrm{III}}$ entspricht umgekehrt ein Bündel reziproker Schrauben, ein „reziprokes“ Bündel $R_{\mathrm{III}}$.

Durch vier unabhängige lineare homogene Gleichungen zwischen den $\lambda_i$ einer Schraube $L = \sum \lambda_i L_i$, welche identisch sind mit den vier Gleichungen

$$\text{(IV)} \qquad A_1 L = A_2 L = A_3 L = A_4 L = 0$$

($A_1 \ldots A_4$ lineare unabhängige Schrauben) wird ein Schraubenbüschel ausgeschieden (dessen alle Schrauben), welches (also selbst) gegen das Schraubengebüsch

$$P_{\mathrm{IV}} = x_1 A_1 + \cdots + x_4 A_4$$

($x_1 \ldots x_4$ beliebige Zahlen) reziprok ist. Umgekehrt bestimmt ein durch beliebige linear unabhängige Schrauben festgelegtes Gebüsch $P_{\mathrm{IV}}$ das hiezu „reziproke“ Schraubenbüschel $R_{\mathrm{II}}$. Analog bestimmen fünf lineare unabhängige Gleichungen zwischen den $\lambda_i$

$$\text{(V)} \qquad A_1 L = A_2 L = \cdots = A_5 L = 0$$

einerseits, indem sie die fünf Verhältnisse der $\lambda_i$ feststellen, eine Schraubung $R_{\mathrm{I}}$ von Schrauben $L$, andererseits das hiezu reziproke Schraubengewebe

$$P_{\mathrm{V}} = x_1 A_1 + \cdots + x_5 A_5$$

($x_1 \ldots x_5$ beliebige Zahlen). Ist umgekehrt ein $P_{\mathrm{V}}$ durch fünf linear unabhängige Schrauben gegeben, so ist die reziproke Schraubung mitbestimmt.

Wegen der Wechselseitigkeit der Beziehung zwischen Reziprokalgebieten $R_n (n = \mathrm{I}, \ldots \mathrm{V})$ und $P_\nu (\nu = \mathrm{V}, \ldots \mathrm{I})$ sind die Fälle (I) und (V), (II) und (IV) geometrisch nicht verschieden und wir werden deshalb

(I) Die Schraubung $R_{\mathrm{I}}$ und im Anschlusse das reziproke Schraubengewebe $P_{\mathrm{V}}$,

(II) Das Schraubenbüschel $R_{\mathrm{II}}$ und im Anschlusse das reziproke Schraubengebüsch $P_{\mathrm{IV}}$,

(III) Das Schraubenbündel $R_{\mathrm{III}}$ und im Anschlusse das reziproke Schraubenbündel $P_{\mathrm{III}}$

untersuchen, um uns eine Übersicht über alle möglichen Achsenlagen und Parameterverteilungen der linearen Schraubengebiete zu ver-

schaffen. Bezüglich vieler Sätze, die sonst passend hier anzuschliefsen wären, verweisen wir auf E. Müllers „Die Liniengeometrie nach den Prinzipien der Grafsmannschen Ausdehnungslehre“ in den Wiener Monatsheften 1891, 2.

## Die Liniengerippe der linearen Schraubengebiete.

Durch die „Liniengleichung“ $L^2 = 0$ wird aus jedem linearen Schraubengebiete $\overset{n}{\underset{\nu}{}}$ ter Stufe $\overset{R_n}{\underset{P_\nu}{}}$ $\left(\overset{n}{\underset{\nu}{}} = (\mathrm{I}), \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}\right)$ eine krumme Mannigfaltigkeit von zu Linien ausgearteten Schraubungen ausgeschieden, das „Liniengerippe“ des $\overset{r_n}{\underset{\varrho_\nu}{}}$ des $\overset{R_n}{\underset{P_\nu}{}}$. Umgekehrt ist durch ein solches Gerippe $\overset{r_\nu}{\underset{\varrho_\nu}{}}$ das ganze zugehörige lineare Schraubengebiet bestimmt, denn die $n$ ein $R_n$ festlegenden Schrauben können unter den durch die nichtlineare Gleichung $L^2 = 0$ ausgeschiedenen gewählt werden.

Das Gerippe $r_{\mathrm{VI}}$ des VI-stufigen Schraubengebietes $R_{\mathrm{VI}}$, des Raumes, ist die Linien-Mannigfaltigkeit desselben,

Das Gerippe $r_{\mathrm{V}}$ eines V-stufigen linearen Schraubengebietes $R_{\mathrm{V}}$ ist ein „linearer Komplex“,

Das Gerippe $r_{\mathrm{IV}}$ eines IV-stufigen linearen Schraubengebietes $R_{\mathrm{IV}}$ ist eine „lineare Kongruenz“,

Das Gerippe $r_{\mathrm{III}}$ eines III-stufigen linearen Schraubengebietes $R_{\mathrm{III}}$ ist eine Regelschar 2. Grades,

Das Gerippe $r_{\mathrm{II}}$ eines II-stufigen linearen Schraubengebietes $R_{\mathrm{II}}$ ist ein windschiefes Geradenpaar,

Vom Gerippe $r_{\mathrm{I}}$ eines I-stufigen linearen Schraubengebietes $R_{\mathrm{I}}$ einer Schraubung kann im allgemeinen keine Rede sein, es wäre denn ganz speziell diese Schraubung selbst eine Linie $R_{\mathrm{I}} = r_{\mathrm{I}}$.

Um die Richtigkeit des eben Behaupteten darzuthun, braucht man nur den auch ohne weiteres durch Betrachtung von Systemen linearer Gleichungen verständlichen „Schnittsatz linearer Gebiete“ auf lineare Schrauben-, bzw. Strahlen-Mannigfaltigkeiten anzuwenden. Dieser lautet:

„Liegt ein lineares Gebiet $\alpha$-ter und ein solches $\beta$-ter Stufe in einem ebensolchen $\gamma$-ter und nicht niederer Stufe ($\alpha < \gamma$, $\beta < \gamma$, $\alpha + \beta > \gamma$), so haben die ersten beiden ein lineares Gebiet $(\alpha + \beta - \gamma)$ter Stufe gemein.“

(Grafsmanns $A_1$ 1844, S. 183 § 126; $A_2$ 1862, S. 13, 14 Nr. 25, 26.)

Vom Gerippe $r_{\mathrm{V}}$ eines Schraubengebietes $R_{\mathrm{V}}$ geht nämlich durch jeden Raumpunkt ein ebenes Strahlenbüschel, ebenso liegt in einer

Ebene ein solches; denn die Strahlen eines Bündels oder einer Ebene bilden ein spezielles Schraubengebiet, nämlich ein Strahlengebiet IIIter Stufe, da alle Stäbe desselben und nur diese aus III linear unabhängigen unter ihnen abgeleitet werden können; jedes $R_{\mathrm{V}}$ hat aber mit einem III-stufigen $\frac{\text{Strahlenbündel}}{\text{ebenen Geradenfeld}}$, welches mit ihm in einem VI-stufigen und nicht niedrigerem Schraubengebiete, dem Raume, liegt, ein $\mathrm{V} + \mathrm{III} - \mathrm{VI} = \mathrm{II}$-stufiges lineares Gebiet, also ein ebenes Strahlenbüschel gemein. Hieraus folgt, wie auch ganz analog direkt ($\mathrm{V}+\mathrm{II}-\mathrm{VI}=\mathrm{I}$) geschlossen werden kann, dafs jedem ebenen Strahlenbüschel des Raumes I Strahl von $r_{\mathrm{V}}$ (Gerippe des $R_{\mathrm{V}}$) zugehört, kurz $r_{\mathrm{V}}$ ist ein „linearer Strahlenkomplex".

Vom Gerippe $r_{\mathrm{IV}}$ eines $R_{\mathrm{IV}}$ geht durch jeden Punkt, ebenso liegt in jeder Ebene ein Strahl, denn jedes Schraubengebiet $R_{\mathrm{IV}}$, also auch dessen Gerippe $r_{\mathrm{IV}}$, hat mit einem III-stufigen Strahlenbündel oder ebenen Geradenfelde desselben Raumes $R_{\mathrm{IV}}$ (und keines niederen Schraubengebietes) ein $\mathrm{IV} + \mathrm{III} - \mathrm{VI} = \mathrm{I}$-stufiges lineares Gebiet, also hier eine gerade Linie gemein: $r_{\mathrm{IV}}$ ist eine „lineare Kongruenz".

Das durch $L^2 = 0$ ausgeschiedene Gerippe $r_{\mathrm{II}}$ von $R_{\mathrm{II}}$ ist ein windschiefes Geradenpaar: $R_{\mathrm{II}}$ sei durch die Schrauben $L_1$ und $L_2$ bestimmt,

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$$

also eine beliebige Schraube des $R_{\mathrm{II}}$.

$$L^2 = \lambda_1^2 L_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2(L_1 L_2) + \lambda_2^2 L_2^2 = 0$$

bestimmt zwei Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2$, also zwei Gerade, welche windschief sein müssen, weil sonst nicht umgekehrt aus ihnen $L_1$ oder $L_2$, *nicht* zu Linien *ausgeartete* Schrauben, abgeleitet werden könnten. Dieses windschiefe Geradenpaar ist reell und auseinanderliegend, oder zusammengerückt, oder ein v. Staudtsches imaginäres Geradenpaar zweiter Art, je nachdem die Diskriminante von $L^2$:

$$\begin{vmatrix} L_1^2 & (L_1 L_2) \\ (L_2 L_1) & L_2^2 \end{vmatrix} \lesseqgtr 0$$

ist.

Das Gerippe $r_{\mathrm{III}}$ eines $R_{\mathrm{III}}$ ist eine Regelschar zweiten Grades, denn die von den $\infty^1$ Strahlen dieses Gebietes erfüllte Fläche wird von einer beliebigen Geraden $\varrho_{\mathrm{I}}$ zweimal getroffen: Die $\varrho_{\mathrm{I}}$ treffenden Strahlen gehören als Liniengerippe $r_{\mathrm{V}}$ zu einem $R_{\mathrm{V}}$; $R_{\mathrm{III}}$ und $R_{\mathrm{V}}$ haben aber ein $\mathrm{III} + \mathrm{V} - \mathrm{VI} = \mathrm{II}$-stufiges lineares Schraubengebiet gemein, dessen Liniengerippe aus eben jenen beiden Geraden des $r_{\mathrm{III}}$ besteht, welche $\varrho_{\mathrm{I}}$ treffen.

Diese Regelschar $r_{III}$ kann zu einem Büschelpaare mit gemeinsamem Strahle ausarten, wenn die Hessesche Determinante

$$\begin{vmatrix} L_1^2 & (L_1 L_2) & (L_1 L_3) \\ (L_2 L_1) & L_2^2 & (L_2 L_3) \\ (L_3 L_1) & (L_3 L_2) & L_3^2 \end{vmatrix}$$

der Liniengleichung

$$L^2 = (\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3)^2 = 0$$

($\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ beliebige Zahlen; $L_{1},\,_{2},\,_{3}$ linear unabhängige Schrauben) verschwindet. Vgl. die erwähnte Abhandlung E. Müllers.

Sind $R_n$ und $P_\nu$ ($n$ und $\nu$ positiv ganz, $n + \nu =$ VI) zwei lineare reziprok zusammengehörige Schraubengebiete, so sind auch ihre Gerippe $r_n$ und $\varrho_\nu$ reziprok, d. h. jede Gerade des $r_n$ schneidet jede des $\varrho_\nu$ und umgekehrt. Soll man

(I) im Falle reziproker Schraubengebiete $R_{I}$ und $P_{V}$ von einem Gerippe $r_{I}$ des $R_{I}$ sprechen können, so mufs speziell $R_{I} = r_{I}$ eine Gerade vorstellen. $\varrho_{V}$ ist dann der zum Systeme der Transversalen von $r_{I}$ ausgeartete lineare Komplex.

(II) Bei Reziprokalgebieten $R_{II}$ und $P_{IV}$ schneidet jede der beiden Geraden des windschiefen Paares $r_{II}$ einen jeden der zur Reziprokalkongruenz $\varrho_{IV}$ gehörigen Strahlen, die beiden Geraden $r_{II}$ sind die Leitlinien der Kongruenz $\varrho_{IV}$. Insbesondere kann $r_{II}$, wie schon bemerkt aus zwei unendlich benachbarten Windschiefen bestehen, bestimmt gedacht durch eine derselben $G$ und die auf einer $G$ enthaltenden Fläche zweiten Grades liegende unendlich benachbarte Gerade gleicher Schar. Diese Fläche kann ersetzt werden durch ein gleichseitiges Paraboloid $T$ mit der Scheitelgeraden $G$. $\varrho_{IV}$ besteht dann aus jenen Transversalen von $G$, welche in ihrem Schnittpunkte mit $G$ die Fläche $T$ berühren. Speciell kann

(II′) $r_{II}$ ein Strahlenbüschel (dann giebt es im zugehörigen $R_{II}$ keine eigentlichen Schrauben) und $\varrho_{IV}$ ein Strahlenbündel mit dem Büschelzentrum von $r_{II}$ als Träger *und* das Geradenfeld der Büschelebene von $r_{II}$ sein.

(III) Die Liniengerippe $r_{III}$ und $\varrho_{III}$ zweier reziproker Schraubenbündel $R_{III}$ und $P_{III}$ sind im allgemeinen die beiden Scharen einer Fläche zweiten Grades. Ist speziell

(III′) $r_{III}$ ein Paar von Strahlenbüscheln mit einem gemeinsamen Strahle, so besteht $\varrho_{III}$ aus jenem Paare ebensolcher Büschel, von denen jedes das Zentrum des einen und die Ebene des anderen der beiden Büschel $r_{III}$ besitzt. Ganz speziell kann

(III″) $r_{\mathrm{III}}$ und $\varrho_{\mathrm{III}}$ ein und dasselbe Strahlenbündel *oder* ebene Geradenfeld sein; in diesem Falle giebt es keine eigentlichen Schrauben dieser Gebiete, deren Inhalt verschieden von Null wäre und es ist

$$r_{\mathrm{III}} = R_{\mathrm{III}} = \varrho_{\mathrm{III}} = P_{\mathrm{III}}.$$

### Maſsbeziehung zwischen reziproken Schrauben.

I. Die Schraubung $R_{\mathrm{I}}$ und das reziproke Schraubengewebe $P_{\mathrm{V}}$.

Sind zwei Schrauben $L$ und $\Lambda$ in der kanonischen Form dargestellt, also bzl. als Summe eines Stabes $\frac{l}{\lambda}$ und eines hiezu senkrechten Feldes $\frac{f}{\varphi}$, dessen Inhalt $\frac{\overline{l}\mathfrak{p}}{\overline{\lambda}\pi}$ ist, wenn $\frac{\overline{l}}{\overline{\lambda}}$ die stets positive Länge des Stabes $\frac{l}{\lambda}$ und $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ den Parameter der Schraube $\frac{L}{\Lambda}$ bedeutet, so verlangt die Gleichung $L\Lambda = 0$, bei deren Geltung $L$ und $\Lambda$ reziprok heiſsen, daſs

$$L\Lambda = (l + f)(\lambda + \varphi) = l\varphi + \lambda f + l\lambda = 0 \qquad (f\varphi = 0)$$

oder

$$\overline{l}\overline{\lambda}\pi \cos\underline{|l\lambda} + \overline{\lambda}\overline{l}\mathfrak{p} \cos\underline{|l\lambda} - e\overline{l}\overline{\lambda} \sin\underline{|l\lambda} = 0$$

wird, wenn wir mit $\underline{|l\lambda}$ den Winkel der Achsen $l$ und $\lambda$ beider Schrauben und mit $e$ deren kürzeste Entfernung bezeichnen. Nach Kürzung mit $\overline{l}\,\overline{\lambda}$ ergiebt sich als metrische Form der Reziprozitätsbedingung zweier Schrauben

$$(\mathfrak{p} + \pi)\cos\underline{|l\lambda} - e \sin\underline{|l\lambda} = 0$$

oder

$$\boldsymbol{(\mathfrak{p} + \pi) = e\,\mathrm{tg}\underline{|l\lambda}.}$$

Insbesondre folgt: „Zwei sich mit ihren Achsen schneidende Schrauben sind *reziprok*, wenn ihre Parameter entgegengesetzt gleich sind oder wenn sich die Achsen *senkrecht* schneiden.“ Der Schnittpunkt der Achsen kann hiebei im Endlichen ($e = 0$) oder in unendlicher Ferne ($\underline{|l\lambda} = 0$) liegen; selbst wenn die Achsen zusammenfallen, gilt $\mathfrak{p} + \pi = 0$ als Reziprozitätsbedingung. Schrauben, deren Achsen sich senkrecht schneiden sind bei *ganz beliebigen* Parametern $\mathfrak{p}$ und $\pi$ stets reziprok. Wenn die Achsen reziproker Schrauben auf einander senkrecht stehen, so müssen sie sich auch schneiden. Wäre dies nicht der Fall, so müſste einer der beiden Parameter unendlich groſs sein, d. h. es läge dann keine eigentliche Schraube, sondern ein zu der betreffenden Achse senkrechtes Feld vor.

Lassen wir nun eine der beiden reziproken Schrauben, etwa $L$, deren ($l$ enthaltende) Achse $G$ sein möge, fest und untersuchen die möglichen Achsenlagen, sowie die Parameter jener Schrauben $\Lambda$, welche zu $L$, also zu jeder Schraube der Schraubung $R_{\mathrm{I}}$ von $L$ reziprok sind, d. h. studieren wir das allgemeinste *Schraubengewebe* $P_{\mathrm{V}}$ (denn wir bemerkten, dafs jedes solche auch umgekehrt *eine* reziproke Schraubung $R_{\mathrm{I}}$ bestimme)!

Vor allem zeigt sich, dafs *jede Gerade* $\Gamma$ des Raumes die Achse einer $\Lambda$ des $P_{\mathrm{V}}$ sein kann, deren Parameter $\pi$ sich aus der Reziprozitätsbedingung ergiebt. Andererseits ist auch $\pi$ eines beliebigen Wertes fähig, zu jedem $\pi = \text{const.}$ gehört ein ganzer „linearer Komplex“ von Achsen $\Gamma$ der Schrauben $\Lambda$ des $P_{\mathrm{V}}$: Geradeso wie $e \operatorname{tg} \underline{|l\lambda} = \mathfrak{p}$ als metrische Definitionsgleichung des linearen Komplexes ($\pi = 0$) jener Geraden $\Gamma_{(\pi=0)}$ aufgefafst werden kann, in Bezug auf deren Stäbe das Produkt (vgl. Moebius' Definition des linearen Komplexes) von $L$ Null ist, kann

$$e \operatorname{tg} \underline{|l\lambda} = \mathfrak{p} + \pi = \text{const.}$$

($\pi$ const.) als metrische Definitionsgleichung eines linearen Komplexes von gleicher Achse $G$ betrachtet werden, dessen „Verteilungskonstante“ (= der kürzesten Entfernung jener Komplexstrahlen von $G$, welche mit dieser Achse den $\underline{|45^0}$ einschliefsen) um $\pi$ gröfser ist. Aufser dem Komplexe $\pi = 0$, dem Liniengerippe $\varrho_{\mathrm{V}}$ des Gewebes $P_{\mathrm{V}}$, sind noch bemerkenswert die ausgearteten Komplexe

$$\mathfrak{p} + \pi = 0, \quad \text{d. h.} \quad \pi = -\varphi$$

jener Geraden $\Gamma$, welche $G$ schneiden, und der andere

$$\varphi + \pi = \infty, \quad \text{d. h.} \quad \pi = \infty$$

der zu $G$ senkrechten $\Gamma$. Die Achsen $\Gamma$, welche beiden letzteren Komplexen zugleich angehören, d. h. $G$ senkrecht schneiden, gehören im $P_{\mathrm{V}}$ zu *beliebigen* Parametern.

Da nur die Summe $(p + \pi)$ der Parameter in die Reziprozitätsbedingung eingeht, folgt: „Das *System der Achsen* zweier Reziprokalgebiete $R_n$ und $P_\nu$ $(n + \nu = \mathrm{VI})$ *bleibt ungeändert*, wenn alle Parameter des einen dieser Gebiete um ein Stück vergröfsert und zugleich die des anderen um das gleiche Stück vermindert werden.“

Um die Verteilung der Parameter $\pi$ auf alle Geraden $\Gamma$ des Raumes, aufgefafst als Achsen des $P_\nu$, zu übersehen, betrachten wir $\alpha$) die Parameter $\pi$ der durch einen beliebigen Raumpunkt $w$ gehenden und $\beta$) die $\pi$ der in eine beliebige Ebene $W$ fallenden Geraden $\Gamma$.

$\alpha)$

Sei $e$ die Länge des Lotes $wx$ aus $w$ auf $G$, so betrachten wir zuerst die Parameter der zu $wx$ senkrechten Strahlen $\Gamma_e$. Unter denselben befindet sich der zu $G$ parallele Strahl $wz$ und der zu $(wG)$ senkrechte $wy$. Tragen wir in der Ebene des rechtwinkligen Koordinatensystems $w(y, z)$ auf jeder $\Gamma_e$ von $w$ aus die Länge $\varrho = p + \pi$ (nach beiden Seiten) ab, so werden die Endpunkte mit den Koordinaten $y, z$ eine Kurve $\mathfrak{C}$ erfüllen, die gemäß $\varrho = e \operatorname{tg} \vartheta$ ($\vartheta = \underline{|l\lambda} = \underline{|G\Gamma_e}$) wie aus Fig. 1 ersichtlich, konstruiert werden kann, wobei die Koordinaten $\left.\begin{array}{l} y = \varrho \sin \vartheta = e \dfrac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} \\ z = \varrho \cos \vartheta = e \sin \vartheta \end{array}\right\}$ gemäß $\left\{\begin{array}{l} \sin \vartheta = \dfrac{z}{e} \\ \cos \vartheta = \dfrac{z^2}{ey} \end{array}\right.$ der Gleichung $\dfrac{z^2}{e^2} + \dfrac{z^4}{e^2 y^2} - 1 = 0$ oder $z^2(y^2 + z^2) - e^2 y^2 = 0$ genügen.

Nehmen wir $wx$ als dritte rechtwinklige Koordinatenachse und ordnen alle Strahlen des Bündels $w$ in Büscheln an, welche eine $\Gamma_e$ mit $wx$ verbinden, so müssen alle Strahlen $\Gamma$ eines jeden dieser Büschel mit dem Strahle $\Gamma_e$ desselben gleichen Parameter besitzen, da dieser Parameter (wie jeder beliebige) auch zu der als Achse $\Gamma_0$ des $P_\nu$ gefaßten $(wx)$ gehört und aus zwei parametergleichen Schrauben, deren Achsen sich schneiden, jede Schraube desselben Parameters in dem bestimmten Büschel linear ableitbar ist. Die Endpunkte (mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$) der von $w$ nach allen Seiten auf den Achsen $\Gamma$ des Bündels $w$ abgetragenen Stücke $\varrho = \mathfrak{p} + \pi$ erfüllen hiernach eine Fläche $F$, die man sich durch einen variablen Kreis vom Mittelpunkte $w$ konstruiert denken kann, dessen Ebene durch $wx$ geht, und welcher die Kurve $\mathfrak{C}$ schneidet. Die Gleichung von $F$ in $x$, $y$, $z$ ist durch Elimination von $\vartheta$ und $\eta$ (= dem Winkel von $\Gamma$ mit $wx$) aus $\left\{\begin{array}{l} x = \varrho \cos \eta = e \operatorname{tg} \vartheta \cos \eta \\ \dfrac{y}{z} = \operatorname{tg} \vartheta \\ \dfrac{y^2 + z^2}{x^2} = \operatorname{tg}^2 \eta \end{array}\right\}$ erhältlich, also wegen

$$\left\{\begin{array}{l} \cos \eta = \dfrac{xz}{ey}, \quad \dfrac{y^2 + z^2}{x^2} = \dfrac{\sin^2 \eta}{\cos^2 \eta} \\ \sin^2 \eta = \dfrac{y^2 + z^2}{x^2} \cdot \dfrac{x^2 z^2}{e^2 y^2} = \dfrac{z^2 (y^2 + z^2)}{e^2 y^2} \end{array}\right\} \qquad x^2 y^2 + z^2 (y^2 + z^2) = e^2 y^2$$

oder $z^2(x^2 + y^2 + z^2) - e^2 y^2 = 0$.

Ball nennt $F$ „Pectenoid“ und giebt in seinem Treatise (1900) auf S. 255 ein anschauliches Bild dieser Fläche.

Ist $w$ unendlichfern, also $\underline{|l\lambda} = \text{const.}$, so ist $\varrho = (\mathfrak{p} + \pi) = e \operatorname{tg} \underline{|l\lambda}$ zu $e$ proportional.

$\beta)$

Sei $W$ eine beliebige Ebene, so ist vor allem der Parameter jener Geraden $\Gamma_1$ derselben, welche zur orthogonalen Projektion der Achse $G$ auf $W$ parallel sind, leicht zu übersehen, indem das Stück $\varrho = \mathfrak{p} + \pi = e \operatorname{tg} \underline{|g W}$ auf jeder von ihnen abgetragen wird, etwa von ihrem Schnittpunkte $w$ mit der die $G$ senkrecht schneidenden Geraden $\Gamma_0$ der $W$ aus, sodaſs die Endpunkte der so abgetragenen Stücke eine Gerade erfüllen. Jede Gerade $\Gamma$ der $W$ hat dann einen Parameter, welcher gleich ist jenem der durch ihren Schnittpunkt mit $\Gamma_0$ gehenden $\Gamma_1$. Zu $\Gamma_0$ selbst gehört jeder beliebige Parameter.

Ist $W$ parallel zu $G$, so ist $\pi = \text{const.}$ für alle parallelen Strahlen derselben, sodaſs alle Strahlen einer bestimmten Richtung von $W$ durch einen von ihnen vertreten werden können, der durch einen festen Punkt $w$ der Ebene $W$ geht; diesen brauchen wir nur beliebig auf der orthogonalen Projektion von $G$ auf $W$ anzunehmen, um die unter $\alpha)$ vorgenommene Betrachtung, bei welcher wir zur Illustration die Kurve $\mathfrak{C}$ benützten, wiederholen zu können.

$R_{\text{I}}$ und $P_{\text{V}}$ sind in kanonischer Weise bestimmt durch Angabe der Achse $G$ und des Parameters $\mathfrak{p}$ von $R_{\text{I}}$. Die letztere Angabe kann ersetzt werden durch die „Charakteristik" der Schraubung, d. h. die Länge $\bar{l}$ des Stabes $l$ jener Schraube $L$ der Schraubung $R_{\text{I}}$, deren Inhalt 1 ist: $\frac{1}{2}L^2 = \bar{l}^2\mathfrak{p} = 1$. Charakteristik und Parameter sind hiernach durch die Gleichung

$$\bar{l} = \pm\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p} = \frac{1}{\bar{l}^2}$$

verbunden, die Charakteristik der Schrauben negativen Parameters ist imaginär; eine Gerade im Endlichen (Schraubung vom Inhalte 0) hat entsprechend $\mathfrak{p} = 0$ die Charakteristik $\infty$, ein Feld dagegen
„ $\mathfrak{p} = \infty$ „ „ $0$.

## II. Das Schraubenbüschel $R_{\text{II}}$ und das reziproke Schraubengebüsch $P_{\text{IV}}$.

Die allgemeinste Schraube $L$ eines $R_{\text{II}}$ ist gemäſs $L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ durch beliebige Zahlgröſseu $\lambda_1 \lambda_2$ aus *linear von einander unabhängigen* Grundschrauben $L_1$ und $L_2$ ableitbar. Letztere dürfen also *nicht* gleiche Achse *und* gleichen Parameter haben. Spezialfälle:

1*) Fallen die Achsen $G_1$ und $G_2$ der Schrauben $L_1$ und $L_2$ in eine Gerade $G$ zusammen, so besteht $R_{\text{II}}$ aus allen Schrauben von

dieser Achse und beliebigem Parameter, insbesondere besteht das Liniengerippe $r_{II}$ aus $G$ und dem hierzu senkrechten Felde. Die ebenfalls zu beliebigem Parameter gehörigen Achsen $\Gamma$ des Reziprokalgebietes $P_{IV}$ erfüllen die Kongruenz der senkrechten Transversalen von $G$. Diese Kongruenz bildet auch das Liniengerippe $\varrho_{IV}$ des $P_{IV}$. Alle übrigen zu $G$ senkrechten Windschiefen gehören in $P_{IV}$ zu $\pi = \infty$, d. h. sie repräsentieren Felder des zu $G$ parallelen Feldbüschels.

2*) Sind die Achsen $G_1$ und $G_2$ von $L_1$ und $L_2$ parallel, so können diese Grundschrauben durch einen bestimmten Stab $l_0$ einer Geraden $G_0$ des Parallelbüschels $G_1 G_2$ und durch ein Feld $f_0$ ersetzt werden, welches die zu $G$ senkrechte Richtung $A$ der Ebene $G_1 G_2$ enthält. $\lambda_1$ und $\lambda_2$ können nämlich einmal so gewählt werden, daſs das zu $G$ senkrechte Feld in $L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ verschwindet, und das andere Mal so, daſs die Stäbe von $\lambda_1 L_1$ und $\cdot \lambda_2 L_2$ entgegengesetzt gleiche Strecken erhalten, sodaſs als $L$ ein Feld $f_0$ von obiger Eigenschaft resultiert. — Das Liniengerippe $r_{II}$ des $R_{II}$ besteht hier aus der Geraden $G_0$ von $l_0$ und der unendlich fernen von $f_0$; jenes $\varrho_{IV}$ des Reziprokalgebüsches $P_{IV}$ aus den zu $f_0$ parallelen Transversalen von $l_0$.

Fügt man zu $l_0$ ein Vielfaches $\lambda f_0$ von $f_0$ hinzu, so kann das letztere als Summe zweier Felder $\lambda f_0'$ und $\lambda f$ dargestellt werden, deren erstes in der Ebene $G_1 G_2$ liegt und als Rechteck mit der einen Seite parallel $l_0$ und von der Länge $\bar{l}_0$ und der anderen Seite von der Länge $x$ in der zu $G$ senkrechten Richtung $A$ konstruiert werden kann, während $\lambda f_0$ zu $l_0$ senkrecht wird und den Inhalt $\bar{l}_0 \mathfrak{p}$ bekommt, wobei $\mathfrak{p}$ der Parameter der variablen Schraube $L = l_0 + \lambda f_0 = (l_0 + \lambda f_0') + \lambda f = l + \lambda f$ wird, welche in kanonischer Form als Summe des Stabes $l$ und des hierzu senkrechten Feldes $\lambda f$ erscheint. $l$ liegt in der Ebene $G_1 G_2$ parallel $l_0$ in der senkrechten Entfernung $x$ vom letzteren Stabe und hat die gleiche Länge wie $l_0$. Ist $\varphi_0$ der konstante Winkel von $f_0$ gegen $l_0$, d. h. auch gegen die Ebene $l_0 l = G_1 G_2$, so ist $\operatorname{tg} \varphi_0$ gleich dem Verhältnisse der Inhalte $\bar{l}_0 \mathfrak{p}$ des Feldes $\lambda f$ und $\bar{l}_0 x$ des Feldes $\lambda f_0'$, also $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\mathfrak{p}}{x}$.

„Die Achse $G$ jeder Schraube $L$ des $R_{II}$ liegt also in der Ebene $G_1 G_2$ parallel zu diesen Geraden und ihr Parameter $\mathfrak{p}$ ist der senkrechten Entfernung $x$ der $G$ von $G_0$ proportional: $\mathfrak{p} = x \operatorname{tg} \varphi_0$."

„Trägt man daher auf $G_1$ und $G_2$ bzl. $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$, die Parameter dieser Schrauben, als Strecken ab und sei $A$ die zur Richtung der $G$ senkrecht vorausgesetzte Verbindungsgerade der Anfangs-, $B$ die der Endpunkte dieser Strecken, so giebt auf jeder Geraden $G$ des Parallelbüschels $G_1 G_2$, welche als Achse im $R_{II}$ auftritt, die Strecke vom

Schnittpunkte mit $A$ bis zu jenem mit $B$ den zu $G$ gehörigen Parameter $\mathfrak{p}$ an. Speziell die zu $\mathfrak{p} = 0$ gehörige Gerade $G_0$ des Schraubenbüschels geht durch den Schnittpunkt von $A$ und $B$; $f_0$, das Feld des Büschels, ist parallel $A$ und schliefst mit der Ebene $G_1 G_2$ der Achsen $G$ einen Winkel $\varphi_0$ ein, welcher gleich ist jenem von $A$ gegen $B$."

„Die zu endlichen Parametern gehörigen Achsen $\Gamma$ des Reziprokalgebüsches $P_{IV}$ erfüllen die Gesamtheit der zu $f_0$ parallelen Geraden, und der ihnen in diesem Schraubengebiete zukommende Parameter $\pi$ ist entgegengesetzt gleich dem Parameter $\mathfrak{p}$ der von $\Gamma$ getroffenen Achse $G$ des Büschels $G_1 G_2$ von $R_{II}$. Die zu den $G$ senkrechten Geraden *$\Gamma$ der Ebene $G_1 G_2$* gehören hiernach zu *beliebigem* Parameter. Zu $P_{IV}$ gehört auch das Büschel der zu $l$, d. h. zu den $G$ parallelen Feldern, weshalb auch jede zu den $G$ senkrechte Gerade als mit $\pi = \infty$ behaftete Achse $\Gamma$ des $P_{IV}$ angesehen werden kann."

Die so beschaffenen Schraubungen $\Gamma(\pi)$ und nur diese sind nämlich sowohl gegen $f_0$, als auch gegen jene Schraubung $G(\mathfrak{p})$ reziprok, deren Achse $G$ von $\Gamma$ getroffen wird.

## Allgemeiner Fall $\frac{R_{II}}{P_{IV}}$.

### Hauptschrauben und Parameterverteilung der Gebiete $R_{II}$.

Schliefsen die Achsen $G_1$ und $G_2$ der Schrauben $L_1$ und $L_2$, welche ein Schraubenbüschel $R_{II}$ bestimmen, einen von Null verschiedenen Winkel ein, so sind stets zwei Schrauben $L_I$ und $L_{II}$ in dem $R_{II}$ enthalten, welche 1) zu einander reziprok sind und 2) auf einander senkrechte Achsen besitzen, die sich der Reziprozitätsbedingung gemäfs ($\underline{|l\lambda} = 90^0$, $\mathfrak{p} + \pi$ endlich, daher $e = 0$) schneiden. Um zu diesen „Hauptschrauben" $L_I$ und $L_{II}$ zu gelangen, könnten wir $L_1$ und $L_2$ vorerst durch $L_1$ und $(L_1 + \varkappa L_2)$ ersetzen und die letztere Schraube durch die geeignete Wahl der Zahl $\varkappa = -\frac{L_1^2}{(L_1 L_2)}$ zu $L_1$ reziprok machen. Um nicht Bezeichnungen zu häufen, setzen wir deshalb gleich $L_1$ und $L_2$ als *reziprok*, und, da dies durch Multiplikation einer von beiden Schrauben mit einer Zahl erreichbar ist, als *inhaltsgleich*[1]) voraus:

$$L_1 L_2 = 0, \quad L_1^2 = L_2^2.$$

1) Hätten die Parameter und Inhalte von $L_1$ und $L_2$ entgegengesetztes Vorzeichen, so könnte die folgende Entwicklung durch eine blofs mit *reellen* Schrauben operierende ersetzt werden, in welcher $L_1^2 + L_2^2 = 0$ angenommen und statt von $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ von den entsprechenden hyperbolischen Funktionen Gebrauch gemacht wird. Vgl. übrigens die Anmerkung auf S. 72.

Sei $L_1 = l_1 + f_1$ und $L_2 = l_2 + f_2$ in kanonischer Form dargestellt, so sind bei beliebigem $\varphi$ die linear von einander unabhängigen Schrauben des $R_{II}$

$$L_I = L_1 \cos\varphi - L_2 \sin\varphi = l_I + f_I$$
$$L_{II} = L_1 \sin\varphi + L_2 \cos\varphi = l_{II} + f_{II}$$

(kanonische Form) wegen $L_I L_{II} = (L_1^2 - L_2^2) \sin\varphi \cos\varphi = 0$ auch reziprok. Die Stäbe $\left.\begin{array}{l} l_I = l_1 \cos\varphi - l_2 \sin\varphi \\ l_{II} = l_1 \sin\varphi + l_2 \cos\varphi \end{array}\right\}$ können durch geeignete Wahl von $\varphi$ zu einander senkrecht gemacht werden. Bezeichnet ein unterstrichenes Stabsymbol die Strecke des Stabes, ein mit darüber gesetztem Strich versehenes dagegen die Stablänge, so braucht, um das innere Produkt $\underline{l}_I \mid \underline{l}_{II} = (\underline{l}_1 \cos\varphi - \underline{l}_2 \sin\varphi) \mid (\underline{l}_1 \sin\varphi + \underline{l}_2 \cos\varphi)$ zu Null werden zu lassen, nur $(\bar{l}_1^2 - \bar{l}_2^2) \sin\varphi \cos\varphi + \bar{l}_1 \bar{l}_2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0$, d. h. $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\bar{l}_1 \bar{l}_2}{-\bar{l}_1^2 + \bar{l}_2^2}$ genommen zu werden.

Setzen wir die Inhalte der Hauptschrauben, welche sich gemäſs $L_I^2 = L_{II}^2 = L_1^2 = L_2^2$ als gleich ergeben, $= 1$, so sind die Stablängen dieser Schrauben unmittelbar die Charakteristiken derselben. Jede Schraube des $R_{II}$ vom Inhalte 1

$$L = L_I \cos\omega + L_{II} \sin\omega \quad (\omega \text{ beliebige Zahl})$$

besitzt eine Stabstrecke $\underline{l} = \underline{l}_I \cos\omega + \underline{l}_{II} \sin\omega$, welche Halbmesser des durch die Halbachsen $l_I$ und $l_{II}$ bestimmten, für $R_{II}$ „charakteristischen" Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ ist. $\mathfrak{K}$ hat die auf $G_I$ und $G_{II}$ als $x$ und $y$ Achse bezogene Gleichung

$$\frac{x^2}{\bar{l}_I^2} + \frac{y^2}{\bar{l}_{II}^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\text{wegen } \tfrac{1}{2} L_{\substack{I\\II}}^2 = \bar{l}_{\substack{I\\II}}^2 \mathfrak{p}_{\substack{I\\II}} = 1\right)$$

$$(\mathfrak{K}) \qquad \mathbf{\mathfrak{p}_I x^2 + \mathfrak{p}_{II} y^2 = 1} \ldots$$

„Die Halbmesser $l$ des charakteristischen Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ sind die Charakteristiken jener Schrauben des $R_{II}$, zu welchen sie parallel sind." Hieraus erhalten wir den Parameter $\mathfrak{p}$ einer jeden dieser Schrauben, deren Achse $G$ mit $G_I$ den Winkel $\vartheta$ einschlieſsen mögen. Wir setzen $x = \bar{l} \cos\vartheta$, $y = \bar{l} \sin\vartheta$ in $\mathfrak{p}_I x^2 + \mathfrak{p}_{II} y^2 = 1$ ein und finden

$$\bar{l}^2 (\mathfrak{p}_I \cos^2\vartheta + \mathfrak{p}_{II} \sin^2\vartheta) = 1 \quad \text{d. h.} \quad (\text{gemäſs } \bar{l}^2 \mathfrak{p} = 1)$$

$$\mathbf{\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I \cos^2\vartheta + \mathfrak{p}_{II} \sin^2\vartheta} .$$

Trägt man vom Punkte $p = G_I G_{II}$ in der Ebene dieser Hauptachsen nach jeder Richtung nicht die Charakteristik, sondern direkt den Para-

meter $\mathfrak{p}$ der $R_{\text{II}}$-Schraube ab, deren Achse diese Richtung besitzt, so erfüllen die Endpunkte der so abgetragenen Strecken die „Parameterkurve" $\mathfrak{P}$ des $R_{\text{II}}$. Die auf $G_{\text{I}} G_{\text{II}}$ bezogene Gleichung derselben ist gemäfs $\mathfrak{p} = \sqrt{x^2 + y^2} = \mathfrak{p}_{\text{I}} \cos^2 \vartheta + \mathfrak{p}_{\text{II}} \sin^2 \vartheta$; $\cos^2 \vartheta = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$; $\sin^2 \vartheta \frac{y^2}{x^2 + y^2}$

$$(\mathfrak{P}) \qquad (x^2 + y^2)^3 - (\mathfrak{p}_{\text{I}} x^2 + \mathfrak{p}_{\text{II}} y^2)^2 = 0 .$$

In Fig. 2, 3, 4 sind die Gestalten des $\mathfrak{K}$ verzeichnet, wenn $L_{\text{II}}$, mithin $l_{\text{II}}$ reell, also $\mathfrak{p}_{\text{II}}$ positiv angenommen wird und

Fig. 2 $L_{\text{I}}$, mithin $l_{\text{I}}$ reell, also $\mathfrak{p}_{\text{I}} > 0$,

Fig. 3 $L_{\text{I}}$ vom Inhalt 0, $L_{\text{I}} = G_{\text{I}}$, $\bar{l}_{\text{I}} = \infty$, $\mathfrak{p}_{\text{I}} = 0$ (Grenzfall)[1]),

Fig. 4 $L_{\text{I}}$, mithin $l_{\text{I}}$ imaginär[2]), also $\mathfrak{p}_{\text{I}} < 0$ ist.

Die zugehörigen Parameter-Kurven $\mathfrak{P}$ sind in Fig. 2′, 3′, 4′ ausgeführt und zwar sind die zu Endpunkten negativer Parameter gehörigen Kurventeile gestrichelt eingetragen. Die aus den Figuren ersichtliche Konstruktion gemäfs der Gleichung $\left.\begin{array}{l}\mathfrak{p}(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = \mathfrak{p}_{\text{I}}\cos^2\vartheta + \mathfrak{p}_{\text{II}}\sin^2\vartheta \\ (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\text{I}}) \cos^2 \vartheta = (\mathfrak{p}_{\text{II}} - \mathfrak{p}) \sin^2 \vartheta\end{array}\right\}$ oder $\frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\text{I}}}{\mathfrak{p}_{\text{II}} - \mathfrak{p}} = \operatorname{tg}^2 \vartheta$ ist folgende: Um $p = G_{\text{I}} G_{\text{II}}$ als Mittelpunkt werden zwei Kreise $\mathfrak{K}_{\text{I}}$ und $\mathfrak{K}_{\text{II}}$ mit den Halbmessern $\mathfrak{p}_{\text{I}}$ und $\mathfrak{p}_{\text{II}}$ verzeichnet und mit einem beliebigen Halbmesser in $\mathfrak{P}_{\text{I}}$ und $\mathfrak{P}_{\text{II}}$ zum Schnitt gebracht (falls $\mathfrak{p}_{\text{I}}$ und $\mathfrak{p}_{\text{II}}$ gleichbezeichnet sind, sonst ist in einem Falle die Verlängerung des Halbmessers über $p$ hinaus zu nehmen). Durch den Schnittpunkt $M$ der durch $\mathfrak{P}_{\text{I}}$ zu $G_{\text{I}}$ und der durch $\mathfrak{P}_{\text{II}}$ zu $G_{\text{II}}$ gelegten Senkrechten ist auf den benutzten Halbmesser ein Lot gefällt. Der Fufspunkt desselben beschreibt $\mathfrak{P}$, wenn sich der Halbmesser mit $\vartheta$ ändert.

Speziell für $\mathfrak{p}_{\text{I}} + \mathfrak{p}_{\text{II}} = 0$ ist $\mathfrak{K}$ eine gleichseitige Hyperbel und $\mathfrak{P}$ sternförmig: $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^*$. Fig. 5 u. 6.

Jedes lineare Schraubengebiet hat, wie bemerkt wurde (S. 63) die Eigenschaft, wieder ein solches zu werden, falls bei gleichen Achsenlagen alle Parameter $\mathfrak{p}$ um gleiche Stücke geändert werden. Hiermit hängt es zusammen, dafs aus einer $\mathfrak{P}$ durch Vergröfserung aller Radienvektoren $\mathfrak{p}$ um gleiche Stücke neue $\mathfrak{P}$ hervorgehen:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\text{I}} \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} + \mathfrak{p}_{\text{II}} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} = \frac{\mathfrak{p}_{\text{I}} + \mathfrak{p}_{\text{II}}}{2} - \frac{\mathfrak{p}_{\text{II}} - \mathfrak{p}_{\text{I}}}{2} \cos 2\vartheta$$

---

1) $\mathfrak{K}$ ist im Grenzfalle ein Parallelenpaar und keine Parabel: Ball-Gravelius 1889 S. 272, Ball, 1900 S. 111.

2) Gemäfs $\frac{1}{2} L^2 = \bar{l}^2 \mathfrak{p} = 1$ werden reelle Schrauben $L$ vom Inhalte 1 rein imaginär und imaginäre reell, wenn wir die auf S. 51 gemachte Festsetzung betreffs des Parametervorzeichens mit der entgegengesetzten, ebenso zulässigen vertauschen.

ändert sich unabhängig von $\vartheta$ um konstante Stücke, wenn $\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}$ variiert, $\frac{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}{2} = \mathfrak{h}$ dagegen konstant gelassen wird. In Fig. 7 ist eine Schar von Kurven $\mathfrak{P}$ dargestellt, welche zu konstantem $\frac{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}{2} = \mathfrak{h}$ gehört und deren jede aus einer von ihnen, z. B. aus der sternförmigen $\mathfrak{P}^*$ $(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} = 0)$ durch gleichmäfsige Veränderung der Radienvektoren $\mathfrak{p}$ von $p$ aus erzeugbar ist. Diese *Kurvenschar gehört* gemäfs der auf S. 63 gemachten Bemerkung *zu einer bestimmten Achsenfläche* und *giebt alle möglichen Parameterverteilungen* jener Gebiete $R_{II}$ an, welche zu dieser Fläche gehören. Dieser Schar $\mathfrak{P}$ entspricht das Büschel $(\mathfrak{p}_I + \varkappa)x^2 + (\mathfrak{p}_{II} + \varkappa)y^2 = 1$ von charakteristischen Kegelschnitten $\mathfrak{K}$. (Fig. 8.)

Zu $+\vartheta$ und $-\vartheta$ gehört der gleiche Parameter $\mathfrak{p}$: Schrauben des $R_{II}$, deren Achsen symmetrische Richtungen gegen die Hauptachsen $G_I$ und $G_{II}$ besitzen, haben gleiche Parameter.

Schrauben des $R_{II}$, deren Achsen auf einander senkrecht stehen — entsprechend $\vartheta$ und $(90^0 + \vartheta)$ — oder symmetrische Richtungen haben bzl. der Winkelhalbierenden von $G_I$ und $G_{II}$ — entsprechend $\vartheta$ und $(90^0 - \vartheta)$ — besitzen Parameter, deren Summe konstant $= \mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}$ ist.

$\mathfrak{p}$ bewegt sich überhaupt zwischen den Grenzen $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$; sind diese gleich, so hat $\mathfrak{p}$ stets denselben Wert.

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = L_I \cos\omega + L_{II} \sin\omega \\ L_2 = -L_I \sin\omega + L_{II} \cos\omega \end{array}\right\}$$ stellen für beliebige $\omega$ alle Paare inhaltsgleicher reziproker Schrauben des $R_{II}$ vor, ihre Charakteristiken

$$\left.\begin{array}{l} \underline{l}_1 = \underline{l}_I \cos\omega + \underline{l}_{II} \sin\omega \\ \underline{l}_2 = -\underline{l}_I \sin\omega + \underline{l}_{II} \cos\omega \end{array}\right\}$$ sind konjugierte Halbmesser des $\mathfrak{K}$:

„Die Achsen reziproker Schrauben des $R_{II}$ sind parallel zu konjugierten Durchmessern des $\mathfrak{K}$."

$\underline{l}_1$ und $\underline{l}_2$ genügen der Gleichung

$$\bar{l}_1^2 + \bar{l}_2^2 = \bar{l}_I^2 + \bar{l}_{II}^2 = \text{const.},$$

woraus mit Rücksicht auf $(\bar{l}^2 \mathfrak{p} = 1)$ folgt:

$$\frac{1}{\mathfrak{p}_1} + \frac{1}{\mathfrak{p}_2} = \frac{1}{\mathfrak{p}_I} + \frac{1}{\mathfrak{p}_{II}} = \text{const.}$$

„Die Summe der Reziprokwerte der Parameter reziproker Schrauben eines Büschels $R_{II}$ ist konstant."

Zwei Schraubungen des $R_{II}$ sind entsprechend $\mathfrak{p} = 0$ zu Linien ausgeartet und bilden das Liniengerippe $r_{II}$ dieses Gebietes; sie schließen mit $G_I$ den Winkel $\vartheta_0$ ein, dessen

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \sqrt{-\frac{\mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_{II}}}$$

ist, sind parallel zu den Asymptoten des $\mathfrak{K}$ und zu den Tangenten der $\mathfrak{P}$ im Ursprunge $p$.

## Achsenlagen der Gebiete $R_{II}$. Plückers Cylindroid.

Die Hauptschrauben $L_I$ und $L_{II}$ vom Inhalte 1 sind Summen eines Halbachsenstabes $l_I$ (bzw. $l_{II}$) von $\mathfrak{K}$ und eines hierzu senkrechten Feldes, das in Rechtecksform mit der anderen Halbachsenstrecke $\underline{l}_{II}$ (bzw. $-\underline{l}_I$) des $\mathfrak{K}$ als einer Seite und der zur Hauptebene $G_I G_{II}$ senkrechten Strecke $c$ von der Länge

$$\bar{c} = \frac{1}{\bar{l}_I \, \bar{l}_{II}} = \sqrt{\mathfrak{p}_I \, \mathfrak{p}_{II}}$$

darstellbar ist:

$$\left.\begin{aligned} L_I &= l_I + (\underline{l}_{II} \cdot c) \\ L_I &= l_{II} - (\underline{l}_I \cdot c) \end{aligned}\right\}.$$ Die beliebige $R_{II}$-Schraube vom Inhalte 1

$$\begin{aligned} L &= L_I \cos\omega + L_{II} \sin\omega \\ &= (l_I \cos\omega + l_{II} \sin\omega) + [-\underline{l}_I \sin\omega + \underline{l}_{II} \cos\omega] c \end{aligned}$$

ist hiernach — aber noch nicht, wie etwa die Hauptschrauben, in kanonischer Form, gegeben als Summe eines beliebigen Halbmesserstabes

$$l = l_I \cos\omega + l_{II} \sin\omega$$

des $\mathfrak{K}$ und eines Feldes

$$f = [-\underline{l}_I \sin\omega + \underline{l}_{II} \cos\omega] \cdot c$$

über dem zu $l$ konjugierten Halbmesser $l'$ ($\underline{l}' = -\underline{l}_I \sin\omega + \underline{l}_{II} \cos\omega$) und der Strecke $c$. Die Lage der Achse $G$ von $L$, welche mit $G_I$ den Winkel $\vartheta$ einschließen möge, wird durch jenen Stab bestimmt, in welchen $l$ übergeht, wenn wir zu ihm die orthogonale Projektion des Feldes $f$ auf die Ebene $(lc)$ addieren. Dieser Summand, ein Feld vom Inhalte

$$\bar{c}\,\bar{l}' \cos \underline{|ll'},$$

verschiebt den Stab $l$ entlang der $Z$-Achse, welche wir durch den Hauptpunkt $p = G_{\mathrm{I}} G_{\mathrm{II}}$ und durch $c$ legen, um das Stück

$$z = \frac{\overline{c\,l'} \cos \underline{|ll'}}{\bar{l}} = \frac{\overline{c\,l\,l'} \cos \underline{|ll'}}{\bar{l}^2} = \mathfrak{p} \cos \underline{|ll'}$$

$$(\text{wegen } \overline{c\,l\,l'} = 1 \quad \text{und} \quad \bar{l}^2 \mathfrak{p} = 1);$$

$l$ hat die bzl. $G_{\mathrm{I}}$ u. $G_{\mathrm{II}}$ gemessenen Richtcosinus $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$

$l'$ „ „ „ $\frac{-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} \sin\vartheta}{\mathfrak{p}}$, $\frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} \cos\vartheta}{\mathfrak{p}}$,

so dafs

$$\cos \underline{|ll'} = \frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}}{\mathfrak{p}} \sin\vartheta \cos\vartheta,$$

also

$$\boldsymbol{z = \frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}}{2} \sin 2\vartheta = \mathfrak{h} \sin 2\vartheta}$$

wird $\left(\mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}}{2}\right)$.

„Die Achsenfläche eines Schraubenbüschels $R_{\mathrm{II}}$ wird erhalten, indem man jeden Strahl $G$ des durch die Hauptachsen $G_{\mathrm{I}}$ und $G_{\mathrm{II}}$ bestimmten Strahlenbüschels in der zur „Hauptebene“ $G_{\mathrm{I}} G_{\mathrm{II}}$ senkrechten Richtung um das Stück $z = \mathfrak{h} \sin 2\vartheta$ verschiebt. ($\vartheta = \underline{|G G_{\mathrm{I}}}$.) Unmittelbar ist wieder die Invarianz von $z$, also der ganzen Achsenfläche ersichtlich, falls alle Parameter, also auch $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ um gleiche Stücke geändert werden.[1]) $z = \mathfrak{h} \sin 2\vartheta$ weist auf folgende Konstruktion der Achsenfläche:

„Man verzeichne zwei Sinuswellen von beliebiger Wellenlänge und der Amplitude $\mathfrak{h}$ in einer Ebene und wickle dieselbe auf einen Rotationscylinder so auf, dafs der Anfangspunkt $A$ der ersten Welle (Fig. 9) mit dem Endpunkte der zweiten zusammentrifft, wodurch die Doppelwelle in eine Kurve 4. O. (eine der nächst der Ellipse einfachsten Lissajouschen Schwingungsfiguren) übergeht. Verbindet man nun immer zwei Punkte dieser Kurve, die bzl. der Cylinderachse $Z$ symmetrisch liegen, durch Gerade $G$ (welche $Z$ senkrecht schneiden), so ist der Ort dieser $G$ die verlangte Achsenfläche.“ Diese Achsenfläche ist unter dem Namen Cylindroid bekannt und von Plücker, Ball u. a. untersucht worden. (Ball überträgt den Namen Cylindroid auf das Schraubenbüschel $R_{\mathrm{II}}$ selbst.)

---

1) Bei der Bestimmung der Achsenfläche braucht daher der S. 67, Anm. 1 berührte Fall, sowie der Grenzfall S. 69, Anm. 1 nicht weiter behandelt zu werden, denn man kann sich in diesen Fällen die Achsenfläche als erst dann bestimmt denken, nachdem man durch Vergröfserung aller Parameter um konstante Stücke alle vorkommenden Schraubeninhalte positiv gemacht hat.

Das Cylindroid ist ein Konoid, dessen Erzeugende $G$ die Knotenlinie $Z$ (Aufteilungsachse, eine Doppelgerade dieser Fläche) rechtwinklig schneiden, also auch die *unendlich ferne zu $Z$ senkrechte Gerade $U$* (Doppelgerade im dualen Sinne, wenn das Cylindroid als Ort seiner Tangentialebenen, nicht aber seiner Punkte aufgefafst wird) treffen. In jedem Punkte von $Z$ schneiden sich zwei Erzeugende der Fläche, welche bzl. der winkelhalbierenden Ebenen von

$$G_{\mathrm{I}}Z \quad \text{und} \quad G_{\mathrm{II}}Z$$

symmetrisch liegen. In den Grenzpunkten $z = \pm \mathfrak{h}$ der $Z$, den Zwickpunkten (pinch points) der Fläche fallen diese zwei Erzeugenden in je eine Gerade, „äufserste" Kante oder „Zwickkante" in der betr. winkelhalbierenden Ebene zusammen, für $|z| > \mathfrak{h}$ sind sie nicht mehr reell. $G_{\mathrm{I}} G_{\mathrm{II}}$ und $Z$, die sich im „Hauptpunkte" $p$ des Cylindroides schneiden, sind Symmetrieachsen der Fläche; machen wir dieselbe zu Koordinatenachsen ($x$, $y$, $z$), so wird gemäfs

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}, \quad \sin 2\vartheta = \frac{2 \operatorname{tg} \vartheta}{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

die Gleichung der Cylindroidfläche

$$z = \frac{2\mathfrak{h}xy}{x^2 + y^2},$$

in Determinantenform

$$\begin{vmatrix} z & y \\ 2\mathfrak{h}x, & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die imaginären Geraden (v. Staudts 1. Art.), welche sich in einem beliebigen Punkte $|z| > \mathfrak{h}$ der $Z$ treffen, kann man sich veranschaulichen mittelst der zwei reellen Cylindroidkanten, welche zur Höhe $\frac{\mathfrak{h}^2}{z}$ über der Hauptebene $G_{\mathrm{I}} G_{\mathrm{II}}$ gehören. Zieht man zu diesen Kanten durch den Punkt $z$ der $Z$ Parallele, so bilden diese mit ihren Winkelhalbierenden ein harmonisches Strahlenquadrupel, welches in Staudtscher Weise das imaginäre Geradenpaar darstellt: Das Cylindroid und die Hilfsfläche

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathfrak{h}}{z} & y \\ 2x, & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche von den obigen Parallelen erfüllt wird, haben in einem gegen das vorige um $45^0$ um $Z$ gedrehten System $\xi$, $\eta$, $z$ die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} z, & \xi^2 - \eta^2 \\ \mathfrak{h}, & \xi^2 + \eta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

bezw.

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{h}, & \xi^2 - \eta^2 \\ z, & \xi^2 + \eta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

aus welchen hervorgeht, dafs beide Flächen gegen einander affin sind mit der $\xi z$-Ebene als Affinitätsebene, indem die $\eta$-Ordinate der einen Fläche durch Multiplikation mit $\sqrt{-1}$ in jene der anderen übergeführt wird. Hieraus folgt, dafs bei dieser affinen Transformation der einen Fläche in die andere aus den reellen Geradenpaaren der Ebenen $z =$ const. imaginäre werden und umgekehrt, dafs also die behauptete Staudtsche Darstellung zutreffend ist. Die erwähnte Hilfsfläche hätten wir zugleich mit dem Cylindroide erhalten können, wenn wir (Fig. 9) zugleich mit der zur Cylindroidkonstruktion benutzten Sinus-Doppelwelle die zugehörige Cosecanslinie gleicher Amplitude auf den Cylinder aufgewickelt und dann die diametral gegenüberliegenden Punkte derselben durch Gerade verbunden hätten.

Insbesondere liegen auf dem Cylindroide die *Tangenten* $t_1 t_2$ *aus dem unendlich fernen Punkte der* $Z$ *an den absoluten Kugelkreis.*

Die Schnittkurve des Cylindroids mit einer beliebigen Ebene $W$ ist eine Linie $S = S_0^{3,\,4}$, 3. O., 4. Kl., vom Geschlechte $O$,

Der Projektionskegel des Cylindroids aus einem beliebigen Punkte $w$ projiziert diese Fläche auf eine beliebige Ebene $m$ in eine Linie $s = s_0^{4,\,3}$, 4. O., 3. Kl., vom Geschlechte $O$,

kollinear erzeugbar aus jeder Linie ihrer Art, z. B. aus

den Typen

$$y^2 = x^2(x \pm 1),$$

Fig. 10 und 11,

der Kardioide Fig. 12 oder der Steinerschen Hypocykloide[1]), Fig. 13,

und *reell* kollinear der ersten oder zweiten, je nachdem

der Doppelpunkt $(WZ)$ reelle Tangenten besitzt und entsprechend[2]) nur einer der 3 (in einer Geraden liegenden) Wendepunkte reell *oder* der (reelle) Doppelpunkt $(WZ)$ imaginäre Tangenten und dem-

die Kurve ihre Doppeltangente (Spur von $wU$) in reellen Punkten berührt und entsprechend[2]) nur eine der 3 Spitzen (deren Tangenten in einem Punkte zusammenlaufen) reell ist *oder* die (reelle) Doppel-

1) Vergl. Cremona „Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements" in Crelles Journal Bd. 64, 1865.

2) Vergl. Cayley in der Encyclop. Brit. 9th. ed. „Curve", und Salmon „Higher plane curves", p. 141 (Dublin 1852).

gemäfs die Kurve alle 3 Wendepunkte reell hat.

tangente isoliert ist, (die Kurve in imaginären Punkten berührt) und demgemäfs alle 3 Spitzen reell sind.

Der 1. oder der 2. Fall tritt beim Cylindroid auf

je nachdem $W$ die $Z$ in einem zwischen oder aufserhalb der Zwickpunkte $z = \pm \mathfrak{h}$ gelegenen Punkte $(WZ)$ schneidet, wie aus dem Verhalten der Doppelpunktstangenten erkennbar ist.

Schneidet $W$ die $Z$ in einem Zwickpunkte, so fallen die Doppelpunktstangenten zusammen, der Doppelpunkt wird zur Spitze in diesem Zwickpunkte, $S$ mufs eine Kurve 3. Kl.

$$S = S_0^{3,\,3}$$

je nachdem $w$ sich in dem Raume zwischen oder aufserhalb der „Zwickebenen“ $z = \pm \mathfrak{h}$ befindet, wie aus dem Verhalten der Berührungspunkte der Doppeltangente, der Spur von $wU$ (projiziert durch die Parallelen zu den mit $w$ in gleicher Höhe befindlichen Cylindroidkanten) hervorgeht.

Liegt $w$ in einer Zwickebene, so ziehen sich die Berührungspunkte mit der Doppeltangente in einen zusammen, der dann einen Wendepunkt vorstellt, $s$ mufs eine Kurve 3. O.

$$s = s_0^{3,\,3}$$

mit einer Spitze und einem Wendepunkte werden, reell kollinear z. B. jeder Neilschen Parabel $y^2 = x^3$ (Fig. 14.)

Anmerkung: Ist $w$ unendlich fern, so wird die Doppeltangente der $s_0^{4,\,3}$ durch die unendlich ferne Ebene, und die Berührungspunkte derselben werden durch Strahlen projiziert, die zu den Kreispunkten der Hauptebene führen:

„Die Parallelprojektion des Cylindroids auf jede zur Hauptebene $G_{\mathrm{I}} G_{\mathrm{II}}$ parallele Ebene ist eine Steinersche Hypocykloide.“

## Die Kegelschnitte $S^2$ des Cylindroids und die dieser Fläche umschriebenen Kegel 2. Grades $(ws^2)$.

Die Schnitte $S^2$ des Cylindroids mit einer Tangentialebene $W$ dieser Fläche, d. h. mit einer Ebene, welche eine Cylindroidkante $G$ enthält, haben unendlich ferne Punkte, welche in $W$ durch die oben erwähnten unendlich

Die Kegel 2. Grades, welche ein Cylindroid aus einem seiner Punkte $w$ projizieren, haben in jeder zur Hauptebene parallelen Ebene eine *Parabel* $s^2$ zur Spur, welche (die beiden in diese Ebene fallenden Cylindroidkanten $G_1$ und

fernen Cylindroidkanten $Z_1 Z_2$ ausgestoſsen werden, sind also Ellipsen auf Rotationscylindern durch die Knotenlinie $Z$. (In einem Punkte der $Z$ wird $G$, also auch $W$, von einer Cylindroidkante $K$ getroffen.)

$G_2$ berührt,) die Projektion $w'$ des Punktes $w$ auf diese Bildebene zum Brennpunkte hat und deren Achse parallel ist zu der Cylindroidkante $K$, welche von der durch $w$ gehenden Kante $G$ geschnitten wird. (Der Kegel $(ws^2) = \mathfrak{K}_d$[1]) projiziert den Punkt $(KU)$, hat entlang der betreffenden Kante die Tangentialebene $(wU)$ und projiziert die S. 74 eingeführten Geraden $t_1 t_2$.)

Das Cylindroid kann konstruiert werden als Ort

der Lote aus einem beliebigen Punkte einer der $\infty^2$ Ellipsen $S^2$ auf die Knotenlinie $Z$.

der senkrechten Transversalen von $Z$ in beliebigen Tangentialebenen eines der $\infty^2$ Kegel

$$ws^2 = \mathfrak{K}_d.$$

Hiernach kann ein Cylindroid von gegebener „Spannweite“ $2\mathfrak{h}$ auf folgende Art erzeugt werden:

(Fig. 15.)

Man nimmt auf einem beliebigen Rotationscylinder eine *Ellipse* $S^2$ derart an, daſs die 2 zur Kantenrichtung desselben senkrechten Berührungsebenen der $S^2$, $E_1$ und $E_2$, von einander die Entfernung $2\mathfrak{h}$ haben.

$E_1$ und $E_2$ mögen $S^2$ im Punkte $B_1$, bezw. $B_2$ berühren. Sei $Z$ *eine beliebige Kante des Cylinders*, welche $E_1$ in $A_1$, $E_2$ in $A_2$ trifft, so ist der Ort der aus

(Fig. 16.)

Man verschafft sich einen *Kegel* $\mathfrak{K}_d$ indem man eine Parabel $s^2$ aus einem Punkte $w$ des in ihrem Brennpunkt $F$ auf ihrer Ebene errichteten Lotes projiziert, und eine *Gerade* $Z$ *parallel zur Fokalachse* $(Fw)$, deren Schnittpunkte $A_1$ und $A_2$ $\mathfrak{K}_d$ um $2\mathfrak{h}$ von einander abstehen. Die senkrechten Transversalen von $Z$, welche $\mathfrak{K}_d$ berühren, erfüllen ein Cylindroid mit der Spannweite $A_1 A_2 = 2\mathfrak{h}$, dessen Zwickkanten

1) Der Kegel $(ws^2)$ gehört zu Reyes Kegeln *der Kategorie* $d$:

$$(ws^2) = \mathfrak{K}_d,$$

da die Fokalachse $ww'$, die Schnittlinie von $wt_1$ und $wt_2$, zur Tangentialebene $(wU)$ senkrecht steht. Vergl. Reye, Geometrie der Lage, I, Seite 220. (Leipzig 1886.) Jeder solche Kegel wird von Ebenen umhüllt, welche die zu den Fokalachsen senkrechten Tangentialebenen desselben in einem Normalenpaare schneiden.

den Punkten von $S^2$ auf $Z$ gefällten Lote ein Cylindroid mit den Zwickkanten $A_1B_1$ und $A_2B_2$, von der Spannweite $2\mathfrak{h}$.

die zu $Z$ senkrechten Tangenten des $\mathfrak{K}_a$ in $A_1$ und $A_2$ sind.

Daraus folgt die *Cylindroidkonstruktion* als Ort der *kürzesten Transversalen* der Strahlen eines ebenen *Büschels* und einer festen *Geraden* $Z$, denn die Rolle dieses Büschels spielen in obiger Betrachtung die Strahlen

der Ebene $W$, welche in jenem Punkte von $S^2$ zusammenlaufen, der dem Schnittpunkte von $S^2$ mit $Z$ diametral gegenüberliegt.

durch den Punkt $w$, welche letzteren mit den Punkten der Scheiteltangente der Parabel $s^2$ verbinden.

---

Die zu $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = 0$ gehörige *Parameterkurve* $\mathfrak{P}^*$

$$\mathfrak{p} = -\mathfrak{h} \cos 2\vartheta,$$

aus welcher jede zu einem bestimmten Cylindroide als Achsenfläche gehörige Parameterkurve $\mathfrak{P}$ der Schar

$$\frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}}{2} = \mathfrak{h} = \text{const.}$$

durch gleichmäfsige Veränderung der Radienvektoren gewonnen werden kann, ist die *Projektion der Schnittlinie* $P^*$ des Cylindroides mit der Kugel $K$ um den Hauptpunkt $p$ desselben und dem Radius $\mathfrak{h}$ auf die Hauptebene, wie die mit Rücksicht auf $z = \mathfrak{h} \sin 2\vartheta$ sich ergebende Gleichung

$$z^2 + \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{h}^2$$

lehrt. Hieraus folgt auch, wie Plücker bemerkt, dafs jede $\mathfrak{P}$ dieser Schar die orthogonale auf die Hauptebene ausgeführte Projektion eines Teilschnittes $P$ des Cylindroides mit einer Wulstfläche (Torus) ist, welch letztere von allen Kugeln vom Radius $\mathfrak{h}$ eingehüllt wird, deren Mittelpunkte auf dem Kreise der Hauptebene um den Hauptpunkt $p$ mit dem Radius

$$\frac{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}}{2}$$

liegen. (Vergl. auch die von Ball erwähnte Lewissche Konstruktion des Cylindroides.)

„Die Entfernung $2\mathfrak{h} \cos 2\vartheta$ der *Schnittpunkte jeder Cylindroidkante* $G$ *mit* $K$, *d. h. auch mit* $P^*$, *von einander*, ist gleich dem *Verteilungsparameter* $k$ *des gleichseitigen Tangentialparaboloides* an die Cylindroid-

fläche *entlang der Kante G.*“ Ist nämlich $e$ die auf der Scheiteltangente $G$ des Paraboloides gemessene Entfernung eines beliebigen Punktes $w$ der $G$ vom Centralpunkte $GZ$ des Paraboloides und $\mathfrak{w}$ der Winkel der Tangentialebene des Cylindroides in $\mathfrak{w}$ mit der Centralebene $GZ$, so ist

$$k = e \operatorname{cotg} \mathfrak{w} = e \frac{dz}{d(e\vartheta)} = \frac{dz}{d\vartheta} = 2\mathfrak{h} \cos 2\vartheta.$$

$P^*$, als Schnitt des Cylindroides mit $K$ von der 6. O., hat, wenn wir mit $\psi$ den Winkel des von $p$ zu einem ihrer Punkte führenden Radiusvektors $\mathfrak{r} (= \mathfrak{h})$ gegen die Hauptebene, daher auch gegen $G$ bezeichnen, mit Rücksicht auf $z = \mathfrak{h} \sin \psi$ in den *Polarkoordinaten* $\mathfrak{r}, \vartheta, \psi$ die einfachen Gleichungen

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{h}; \quad \psi = 2\vartheta.$$

Zwei sich (auf $Z$) schneidende Cylindroidkanten

$$G_{(\vartheta)} \quad \text{und} \quad G_{(\vartheta' = 90^\circ - \vartheta)}$$

gehören zu Parametern

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{p} &= \frac{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}}{2} - \mathfrak{h} \cos 2\vartheta \\ \mathfrak{p}' &= \frac{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}}{2} + \mathfrak{h} \cos 2\vartheta \end{aligned} \right\},$$

deren Summe

$$(1) \qquad \mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} = \text{const.}$$

ist, während das Produkt derselben

$$(2) \qquad \mathfrak{p}\mathfrak{p}' = \left(\frac{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}}{2}\right)^2 - \mathfrak{h}^2 \cos^2 2\vartheta = \left(\frac{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathfrak{p}_I - \mathfrak{p}_{II}}{2}\right)^2 + z^2$$
$$= \mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II} + z^2$$

sich vom Produkte der Hauptparameter um das Quadrat der Entfernung der Achsen vom Hauptpunkte $p$ unterscheidet. Für $z^2 = -\mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II}$ ist einer der beiden Parameter Null, es gilt dies, wie schon S. 71 bemerkt, für $\vartheta = \vartheta_0$, dessen

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \sqrt{-\frac{\mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_{II}}}$$

ist.

---

Nun können wir auch besser als oben die Hauptachsen $G_I$ und $G_{II}$ eines $R_{II}$, sowie die Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ bestimmen, falls dieses Schraubenbüschel durch zwei Schrauben $L_1$ und $L_2$ mit den Achsen $G_1$ und $G_2$ und den Parametern $\mathfrak{p}_1$, bezw. $\mathfrak{p}_2$ gegeben ist (Fig. 17).

Sei $\mathfrak{e}$ die kürzeste Entfernung von $G_1$ und $G_2$,

$2\alpha (\gtrless 0)$ der Winkel „ „ „ „ ,

$\varphi$ „ „ der Winkelhalbierenden $G_1$ und $G_2$ mit der gesuchten Richtung von $G_I$,

$z_1$ die kürzeste Entfernung von $G_1$ und $G_I$

$z_2$ „ „ „ „ $G_2$ „ „ ,

so gestatten es die bereits abgeleiteten Relationen $(\vartheta = \varphi \mp \alpha)$

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= \frac{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}}{2} - \frac{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}{2} \cos 2(\varphi - \alpha) \\ \mathfrak{p}_2 &= \frac{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}}{2} - \frac{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}{2} \cos 2(\varphi + \alpha) \end{aligned}\right\} \quad \text{(S. 69)}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= \frac{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}{2} \sin 2(\varphi - \alpha) \\ z_2 &= \frac{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}{2} \sin 2(\varphi + \alpha) \end{aligned}\right\} \quad \text{(S. 72)},$$

nebst $z_2 - z_1 = \mathfrak{e}$, die 5 Stücke $\mathfrak{p}_I$, $\mathfrak{p}_{II}$, $\operatorname{tg} 2\varphi$, $z_1$, $z_2$ durch die bekannten Gröfsen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{e}$, $\alpha$ ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e} = z_2 - z_1 &= (\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I) \cos 2\varphi \sin 2\alpha \\ \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1 &= (\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I) \sin 2\varphi \cos 2\alpha \end{aligned}\right\}$$

$$\textbf{(1)} \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1}{\mathfrak{e}}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_1 &= (\mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_I) - (\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I) \cos 2\varphi \cos 2\alpha \\ \mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I &= \frac{\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1}{\sin 2\varphi \sin 2\alpha} \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_I &= (\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_1) + \frac{\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1}{\operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{tg} 2\alpha} \\ &= (\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_1) + \mathfrak{e} \operatorname{cotg} 2\alpha \\ \mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I &= \sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2} \operatorname{cosec} 2\alpha \end{aligned}\right.$$

$$\left(\text{wegen} \quad \sin 2\varphi = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} = \frac{\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1}{\sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2}}\right)$$

$$(2') \quad \mathfrak{p}_I = \frac{1}{2} \left[(\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_1) + \mathfrak{e} \operatorname{cotg} 2\alpha - \sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2} \operatorname{cosec} 2\alpha\right]$$

$$(2'') \quad \mathfrak{p}_{II} = \frac{1}{2} \left[(\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_1) + \mathfrak{e} \operatorname{cotg} 2\alpha + \sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2} \operatorname{cosec} 2\alpha\right]$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2} \operatorname{cosec} 2\alpha \sin 2(\varphi - \alpha) \\ z_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2} \operatorname{cosec} 2\alpha \sin 2(\varphi + \alpha) \end{aligned}\right\}$$

$$\sin 2(\varphi - \alpha) = \sin 2\varphi \cos 2\alpha - \cos 2\varphi \sin 2\alpha$$
$$\sin 2(\varphi + \alpha) = \sin 2\varphi \cos 2\alpha + \cos 2\varphi \sin 2\alpha \quad \Bigg| \quad \sin 2\varphi = \frac{\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1}{\sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2}}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{\mathfrak{e}}{\sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2} \operatorname{cosec} 2\alpha \frac{(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)\cos 2\alpha - \mathfrak{e}\sin 2\alpha}{\sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2}} \\ z_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2} \operatorname{cosec} 2\alpha \frac{(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)\cos 2\alpha + \mathfrak{e}\sin 2\alpha}{\sqrt{\mathfrak{e}^2 + (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)^2}} \end{aligned} \right\}$$

$$(3') \qquad \boldsymbol{z_1 = \frac{1}{2}[(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)\operatorname{cotg} 2\alpha - \mathfrak{e}]}$$

$$(3'') \qquad \boldsymbol{z_2 = \frac{1}{2}[(\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1)\operatorname{cotg} 2\alpha + \mathfrak{e}].}$$

$G_{\mathrm{I}}$ und $G_{\mathrm{II}}$, selbst parallel zur Ebene der Richtungen $G_1$, $G_2$, schneiden sich senkrecht in jenem Punkte $p$ der kürzesten Transversalen von $G_1$ und $G_2$, welcher von $G_1$, bezw. $G_2$ den Abstand $z_1$, bezw. $z_2$ hat. Die Richtungen der Hauptachsen $G_{\mathrm{I}}$ und $G_{\mathrm{II}}$ erhält man aus denen der Winkelhalbierenden von $G_1$ und $G_2$ durch Drehung um $\varphi$, dessen

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1}{\mathfrak{e}}$$

ist.

Z. B. für $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_0$ sind $G_{\mathrm{I}}$ und $G_{\mathrm{II}}$ die Symmetrieachsen von $G_1$ und $G_2$ und

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}_0 + \frac{\mathfrak{e}}{2}\operatorname{cotg}\alpha;$$

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = \mathfrak{p}_0 - \frac{\mathfrak{e}}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Stehen $G_1$ und $G_2$ zu einander senkrecht, so gehen $G_{\mathrm{I}}$ und $G_{\mathrm{II}}$ durch den Mittelpunkt ihrer Kürzesten

$$\left(z_1 = -\frac{\mathfrak{e}}{2}, \quad z_2 = +\frac{\mathfrak{e}}{2}\right).$$

Schneiden sich $G_1$ und $G_2$, so ist die Spannweite $2\mathfrak{h}$ des Achsen-Cylindroides $= \frac{\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1}{\sin 2\alpha}$; sie wird Null, d. h. statt des Cylindroides tritt das Büschel $G_1 G_2$ ein, falls außerdem $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ ist; $R_{\mathrm{II}}$ heißt in diesem Falle „zirkulär".

Ist $Z$ das Lot des Büschels $G_1 G_2$, so gehören die Tangentialebenen durch $Z$ an den absoluten Kugelkreis auch zu der sich ergebenden Ausartung des Cylindroides, indem sie jede zu $G_1 G_2$ parallele Ebene in einer Geraden $g$ schneiden, welche als eine zu *beliebigem* Parameter $\mathfrak{p} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{l^2}$ (S. 65) gehörige Achse einer

jener beiden Schrauben des zirkulären $R_{II}$ angesehen werden kann, deren Inhalt $\frac{1}{2} L^2$ *und* Längenquadrat des Achsenstabes $\bar{l}^2$ Null ist und welche das imaginäre zirkuläre zu $R_{II}$ gehörige Linienpaar $r_{II}$ (v. Staudts 2. Art) repräsentieren. Der Begriff der „Achse" einer solchen zirkulären Schraube ist nicht mehr eindeutig, sondern jede der $g$ kann als Achse angesehen werden. (Vgl. S. 52 und F. Klein im 47. Bande dieser Zeitschrift S. 252.)

## Achsensystem und Parameterverteilung der reziproken Gebiete $P_{IV}$.

Die allgemeinsten Schraubengebüsche $P_{IV}$ gehören als reziproke Schraubengebiete zu einem Schraubenbüschel $R_{II}$ mit einem Cylindroide als Achsenfläche. Damit eine Schraube $\varLambda$ des $P_{IV}$ mit der Achse $\Gamma$ und dem Parameter $\pi$ zu jenen 3 Schrauben des $R_{II}$ reziprok sei, deren auf der Cylindroidfläche liegende Achsen $G$ von $\Gamma$ getroffen werden, mufs $\Gamma$ eine dieser 3 Achsen $G$ senkrecht schneiden und der Parameter $\pi$ mufs entgegengesetzt gleich sein mit jenem der beiden anderen. Die beiden letzteren Achsen $G$ müssen daher, als zu einem und demselben Parameter $\mathfrak{p} = -\pi$ gehörig, auf dem Cylindroide des $R_{II}$ symmetrisch bezüglich dessen Hauptachsen $G_I$ und $G_{II}$ sein. Die Achsen $\Gamma$ des $P_{IV}$ durch einen beliebigen Punkt $w$ oder in einer beliebigen Ebene $W$ sind daher erzeugbar als die $\infty^1$ Transversalen über je ein Paar von bzl. der Hauptachsen symmetrischen Cylindroidkanten. Alle $\Gamma$ des $P_{IV}$ also, die zu einem bestimmten Parameter $\pi = \text{const.}$ gehören, erfüllen die lineare Kongruenz mit denjenigen Cylindroidkanten $G$ als Leitlinien, denen der Parameter $\mathfrak{p} = -\pi$ zukommt. Für $\pi = 0$ ergiebt sich so das Liniengerippe $\varrho_{IV}$ des $P_{IV}$. Zwei besondere dieser Kongruenzen sind die Systeme der Cylindroidtangenten längs $G_I$ oder $G_{II}$; statt des Cylindroides kann hierbei das gleichseitige Tangentialparaboloid desselben gesetzt werden, welches $G_I$ und $G_{II}$ zu Scheitelgeraden und den Verteilungsparameter $k = 2\mathfrak{h}$ hat. Auch eine dieser Kongruenzen kann $\varrho_{IV}$ sein, in dem Falle, wo sich das Linienpaar $r_{II}$ des $R_{II}$ zu einem Paare unendlichbenachbarter Windschiefer des Cylindroides entlang $G_I$ oder $G_{II}$ zusammenzieht. (Grenzfall S. 69.)

Da jede $\Gamma$ eine Cylindroidkante $G$ senkrecht schneiden mufs, ist der Komplex der $\Gamma$ definiert als Ort der senkrechten Transversalen der Kanten des zu $R_{II}$ gehörigen Cylindroides.

Die Komplexkegel durch einen beliebigen Punkt $w$ werden gebildet von den Loten aus $w$ auf die Cylindroidkanten.

Die Komplexkurven in einer beliebigen Ebene $W$ werden umhüllt von den in $W$ liegenden senkrechten Transversalen der Cylindroidkanten.

Speziell für $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = \mathfrak{p}$, im Falle eines „zirkulären" Gebietes tritt statt der Cylindroidfläche das Büschel der Hauptebene mit $p$ als Zentrum und

die Komplexkegel $w$ sind Orthogonalkegel über den Kreisen der Hauptebene mit $pw'$ als Durchmesser, wenn $w'$ die orthogonale Projektion des Punktes $w$ auf die Hauptebene ist.

die Komplexkurven in $W$ sind Parabeln, deren Scheiteltangente die Spur der Hauptebene in $W$ und deren Brennpunkt die orthogonale Projektion des Hauptpunktes $p$ auf $W$ ist.

Sonst, im allgemeinen Falle, $\mathfrak{p}_I \gtrless \mathfrak{p}_{II}$,

projizieren sich die Fuſspunkte der aus $w$ auf die Cylindroidkanten gefällten Lote auf jede zur Hauptebene parallele Ebene in Punkte eines Kreises, welcher die orthogonale Projektion $w'$ des $w$ auf diese Ebene und den Durchstoſspunkt der letzteren mit $Z$ zu diametral gegenüberliegenden Punkten hat. Die Fuſspunktkurve selbst ist also der Schnitt des Cylindroides mit jenem Rotationscylinder, welcher die $Z$ und die durch $w$ zu ihr gelegte Parallele zu diametral gegenüberliegenden Kanten hat. Diese Schnittlinie kann also nur eine der Ellipsen $S^2$ des Cylindroides[1]) sein, da das Cylindroid, eine Fläche 3. Grades und der Rotationscylinder sonst noch gemein haben 1) die doppelt zu zählende $Z$ selbst und 2) die unendlich-fernen Kanten $t_1$ und $t_2$:

Durch jeden Punkt $w$ geht *ein Kegel des Komplexes der Achsen $\Gamma$ des $P_{IV}$*, dessen Basis die Ellipse $S^2$ des Cylindroides ist, welche sich auf die Hauptebene in den Kreis

umhüllen die Ebenen $G\Gamma$, welche jede Cylindroidkante $G$ mit ihrer in $W$ liegenden senkrechten Transversalen verbinden, *einen dem Cylindroide umschriebenen Kegel $\mathfrak{K}_d$*[1]), denn der Direktionskegel der von diesen Ebenen umhüllten Developpablen repräsentiert einen Kegelschnitt der unendlichfernen Ebene, von dessen gemeinsamer Developpablen mit dem Cylindroide schon 1) das doppelt zu zählende Büschel $U$ und 2) die Ebenenbüschel durch die unendlich-fernen Cylindroidkanten $t_1 t_2$ Teile sind. Es bleibt daher als Developpable, deren Spur in $W$ die gesuchte Komplexkurve wird, nur ein dem Cylindroide umschriebener Kegel $\mathfrak{K}_d$ übrig, der zu $W$ und $U$ normale Fokalachsen hat und dessen Spitze $w$ als Schnittpunkt der zu $W$ parallelen Tangentialebene des Cylindroides mit jener Cylindroidkante konstruiert werden kann, welche zu der in dieser Tangentialebene gelegenen bzl. $G_I$ und $G_{II}$ symmetrisch ist.

*In jeder Ebene $W$ wird von*

---

1) Vgl. S. 75.

mit dem Durchmesser $pw'$ projiziert, wenn $p$ der Hauptpunkt des Cylindroides und $w'$ die orthogonale Projektion des Punktes $w$ auf die Hauptebene vorstellt.

Die Ebene von $S^2$ verbindet den Schnittpunkt der durch $w$ zu $Z$ gelegten Parallelen und des Cylindroides mit jener Cylindroidkante, welche zu der von dieser Parallelen getroffenen Cylindroidkante bzl. $G_I$ und $G_{II}$ symmetrisch ist.

*Dieselbe* Ellipse $S^2$ gehört zu *allen* Punkten $w$, die auf einer Parallelen zu $Z$ liegen.

*den Achsen $\Gamma$ des $P_{IV}$ eine Parabel $s$ umhüllt*, deren Achse parallel ist zur orthogonalen Projektion der $Z$ auf $W$.

$s$ wird aus $w$ durch *einen Kegel $\mathfrak{K}_d$* projiziert, welcher nicht $W$ allein, sondern *jede zu ihr parallele* Ebene in einer Parabel schneidet, die von Achsen $\Gamma$ des $P_{IV}$ umhüllt wird."

Der Komplex der Achsen $\Gamma$ eines Schraubenbüschels $P_{IV}$ ist quadratisch.

Ist $w$ unendlich-fern, so zerfällt der Komplexkegel durch diesen Punkt in das nicht in Betracht kommende Feldbüschel dieser Richtung und das Büschel der Normalen von der Richtung $w$ zu der zu $w$ senkrechten Cylindroidkante.

Ist $W$ parallel zu $Z$, so zerfällt die Parabel des Komplexes in das Parallelbüschel zu $Z$, das als zu $\pi = \infty$ gehörig nicht in Betracht kommt und in jenes Büschel, dessen Zentrum der Schnittpunkt der zu $W$ senkrechten Cylindroidkante mit $W$ ist.

Ist speziell

$w$ auf dem Cylindroide, und zwar auf der Kante $G(\mathfrak{p})$, so zerfällt der Komplexkegel 1) in das Büschel der durch $w$ zu $G$ gelegten Normalen und 2) in das Büschel der Transversalen $\Gamma(\pi = -\mathfrak{p})$ der zu $G(\mathfrak{p})$ bezüglich $G_I$ und $G_{II}$ symmetrischen d. h. zum gleichen Parameter $\mathfrak{p}$ gehörigen Cylindroidkante.

$W$ Tangentialebene des Cylindroides, und zwar durch die Kante $G(\mathfrak{p})$ gelegt, so zerfällt die Parabel 1) in das Büschel der Normalen zu $G$ und 2) in das Büschel $\Gamma(\pi = -\mathfrak{p})$, dessen Zentrum der in $W$ gelegene Spurpunkt jener Cylindroidkante ist, welche zu $G(\mathfrak{p})$ bezüglich $G_I$ und $G_{II}$ symmetrisch liegt.

Ist ganz speziell

$w$ ein Punkt der Knotenlinie $Z$, so legen wir uns durch ihn eine zu $Z$ senkrechte Ebene $W$:

$W$ eine Ebene durch $U$, d. h. senkrecht zu $Z$, so bestimmen wir uns deren Schnittpunkt $w$ mit $Z$:

Es giebt nun durch $w$ in $W$ zwei Achsen $\Gamma'$ und $\Gamma''$ des $P_{IV}$, nämlich jene, welche zu je einer der durch $w$ gehenden und in $W$ liegenden Cylindroidkanten $G'$ und $G''$ des $R_{II}$ senkrecht stehen und mit der anderen entgegengesetzt gleichen Parameter $\pi'$, bezw. $\pi''$ besitzen.

Der Komplexkegel $w$ von Achsen $\Gamma$ artet jetzt aus in die beiden Strahlenbüschel $Z\Gamma'$ und $Z\Gamma''$, welche zum Parameter $\pi'$, bezw. $\pi''$ gehören.

Die von Achsen $\Gamma$ umhüllte Komplexkurve in $W$ artet hier aus in die beiden Parallelbüschel $\Gamma'$ und $\Gamma''$, welche zum Parameter $\pi'$, bezw. $\pi''$ gehören.

Ist $w$ einer der 2 Zwickpunkte, | Ist $W$ eine der 2 Zwickebenen,

des Cylindroides von $R_{II}$, so fallen beide Büschel in eines zusammen, dessen $\frac{\text{Ebene}}{\text{unendlich-fernes Zentrum}}$ zu der betreffenden Zwickkante senkrecht steht.

Sämtliche $\frac{Z \text{ schneidende}}{\text{zu } Z \text{ senkrechte}}$ Achsen $\Gamma$ des $P_{IV}$ kann man erhalten, indem man das Cylindroid des $R_{II}$ bezüglich seiner Hauptebene $G_I G_{II}$ spiegelt und

die Büschel konstruiert, welche die so erhaltenen Kanten des Spiegel-Cylindroides mit $Z$ verbinden.

jede Kante des so erhaltenen Spiegel-Cylindroides einer Parallelverschiebung in einer zu $Z$ senkrechten Richtung unterwirft.

Jeder so gewonnenen $\Gamma$ kommt im $P_{IV}$ der Parameter $\pi = -\mathfrak{p}$ zu, entgegengesetzt gleich jenem $\mathfrak{p}$ der Cylindroidkante $G$ des $R_{II}$, durch deren Spiegelung $\Gamma$ gewonnen wurde.

In kanonischer Weise ist $P_{IV}$ darstellbar durch die Aufteilungsachse $Z$, zu der ein beliebiger Parameter gehört und die Hauptschraubungen mit den Achsen $\Gamma_I = G_I$, $\Gamma_{II} = G_{II}$ und den Parametern $\pi_I = -\mathfrak{p}_I$, $\pi_{II} = -\mathfrak{p}_{II}$. Die Hauptachsen $\Gamma_I$ und $\Gamma_{II}$ sind die einzigen, $Z$ in *einem* Punkte senkrecht schneidenden Achsen des $P_{IV}$, welche auf einander senkrecht stehen. Nur im Falle gleicher Hauptparameter $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = \mathfrak{p}_0$, also eines „zirkulären“ Schraubengebüsches $P_{IV}$ tritt an Stelle der Hauptschrauben ein zu $Z$ senkrechtes Büschel durch den Punkt $p$ der $Z$.[1]) Jede Gerade der Ebene des letzteren, sowie jede des Bündels $p$ gehört als Achse $\Gamma$ zu $P_{IV}$, behaftet mit dem Parameter $\pi_0 = -\mathfrak{p}_0$. Die übrigen Strahlen des Achsenkomplexes $\Gamma$ lassen sich gemäſs der Reziprozitätsbedingung $\pi - \pi_0 = e \cot g \underline{|\Gamma Z}$ der $\Gamma$ gegen

1) Vgl. S. 80.

die $G$ des $P_{\text{II}}$, welche parallel ist zur Ebene $\Gamma Z$, in „zirkulären“ linearen Kongruenzen $\pi = \text{const.}$ anordnen, d. h. in solchen, deren sämtliche Strahlen durch *Rotation um $Z$ aus den Strahlen* jener $Z$ als Scheitelgerade enthaltenden gleichseitig-hyperbolischen *Paraboloidschar* mit dem Scheitel $p$ erhalten werden können, deren Verteilungsparameter $k = \pi - \pi_0$ ist. Die Leitstrahlen jeder solchen linearen Kongruenz werden passend „zirkuläre“ Gerade (imaginär, v. Staudts 2. Art) genannt.

### Übergang zur kanonischen Darstellung

eines durch 4 Schrauben $\Lambda$ mit den Achsen $\Gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ und bestimmten Parametern gegebenen $P_{\text{IV}}$. Entsprechend 1* und 2* S. 65 fertigen wir vorerst zwei Spezialfälle ab.

1*) Schneiden die 4 $\Gamma_i$ eine bestimmte Gerade $G$ senkrecht, so besteht $P_{\text{IV}}$ aus den Schrauben beliebigen Parameters, deren Achsen $\Gamma$ die $G$ senkrecht schneiden. $R_{\text{II}}$ gehört zu $G$ und beliebigem Parameter. Hierher gehören auch die Fälle: $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ schneiden eine $G$ senkrecht, $\Gamma_4$ ist ersetzt durch ein zu $G$ paralleles Feld und: $\Gamma_3 \Gamma_4$ sind ersetzt durch Felder parallel zur kürzesten Transversalen von $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$.

2*) Sind die $\Gamma_i$ parallel einer Ebene $E$, so gehört das Feld $f_0$ derselben zum $R_{\text{II}}$. Zum $P_{\text{IV}}$ gehört ein Feldbüschel einer Richtung $l$, bestimmbar durch 2 Felder, von denen jedes durch Addition dreier Schrauben von den gegebenen 4 gefunden wird, wenn man bewirkt, daſs deren Stabsumme Null ist. Die Schrauben endlichen Parameters in $P_{\text{IV}}$, deren (zu $E$ parallele) *Achsen zu $l$ senkrecht* stehen und deren Parameter beliebig ist, erfüllen die (zu $l$ parallele) „Hauptebene“ des $R_{\text{II}}$, d. h. jene Ebene, in welcher *die senkrechten Transversalen* der letzteren (die Parallelen zu $l$) Schraubenachsen $G$ des $R_{\text{II}}$ sind. Eine der $G$ ist in $R_{\text{II}}$ mit dem Parameter 0 behaftet, also darstellbar durch ihren Stab $l_0$. $l_0$ und $f_0$ repräsentieren $R_{\text{II}}$, und damit $P_{\text{IV}}$ in kanonischer Weise.

---

Im allgemeinen Falle verschafft man sich zuerst das in $P_{\text{IV}}$ vorkommende Feld $U$, indem man eine Vielfachensumme der 4 gegebenen Schrauben derart bildet, daſs die Summe ihrer Stabstrecken Null wird. Alle analog ableitbaren Schrauben, deren Stab zu $U$ senkrecht steht, haben die gleiche Achse, die Aufteilungsachse $Z$. Die kürzesten Transversalen über $Z$ und den $\Gamma$ bestimmen das Cylindroid des $R_{\text{II}}$; dessen Hauptachsen sind auch jene des $P_{\text{IV}}$.

Jetzt können wir auch jedes *durch 5 Schrauben* $A_i (i = 1, \cdots 5)$ gegebene *Schraubengewebe* $P_V$ in *kanonischer Form*, nämlich durch Angabe der reziproken Schraubung $R_I$ darstellen. 2 Quadrupel unter den 5 Schrauben bestimmen je ein zum betreffenden $P_{IV}$ gehöriges Feld. Die Achse von $R_I$ hat die diesen 2 Feldern gemeinsame Richtung und ist identisch mit der Cylindroidkante von dieser Richtung in jedem der $R_{II}$, welche zu einem der obigen $P_{IV}$ reziprok sind. Der Parameter $\mathfrak{p}$ von $R_I$ ist aus der Reziprokalrelation gegen irgend eine $A$ zu bestimmen.

Der Parameter $\pi$ jeder Achse $\Gamma$ des $P_{IV}$, welche eine Cylindroidkante $G(\vartheta)$ des $R_{II}$ in einem von $Z$ um $e$ entfernten Punkte $w$ senkrecht schneiden mufs, ist entgegengesetzt gleich jenem der beiden $R_{II}$-Schrauben, deren Achsen die $\Gamma$ aufserdem noch begegnet. Da aber letztere nicht reell sein müssen, empfiehlt sich die Bestimmung von $\pi$ aus der Reziprokalrelation der $\Gamma_{(\pi)}$ gegen jene Schraube $G_{(90^\circ + \vartheta)}$ des $R_{II}$ mit dem Parameter

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I \sin^2 \vartheta + \mathfrak{p}_{II} \cos^2 \vartheta = \frac{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}}{2} + \frac{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}{2} \cos 2\vartheta,$$

welche zur Projektion der $\Gamma$ auf die Hauptebene des Cylindroides parallel ist: $\pi + \mathfrak{p} = e \operatorname{cotg} \underline{|\Gamma Z}$.

## Das Schraubenbündel $R_{III}$ und das reziproke Bündel $P_{III}$.

Durch 3 nicht zu einem Büschel $R_{II}$ gehörige Schrauben $L_1, L_2, L_3$ mit den Achsen $G_1, G_2, G_3$ und den Parametern $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ ist ein $R_{III}$ festgelegt. Wir betrachten zuerst die Spezialfälle:

1*) $G_1 G_2 G_3$ sind parallel *und* liegen in einer Ebene $E$; die Achsen $G$ des $R_{III}$ sind dann (vgl. S. 66, 2*) alle Strahlen dieses Parallelbüschels, und zwar kommt jeder $G$ ein beliebiger Parameter zu. Zu $R_{III}$ gehört aufserdem das Feldbüschel parallel zu den senkrechten Transversalen $\Gamma$ der $G$ in $E$. Zum Reziprokalbüschel $P_{III}$ gehören alle diese $\Gamma$ als Achsen, belegbar mit beliebigem Parameter, ferner das Büschel der zu $G$ parallelen Felder.

2*) $G_1 G_2 G_3$ sind parallel, *ohne* aber in einer Ebene zu liegen. Trägt man auf den $G_{i (i=1,2,3)}$ von deren Schnittpunkte mit einer beliebigen Ebene $A$ aus bzl. die Parameterstrecken $\mathfrak{p}_i$ ab und sei $B$ die Verbindungsebene der Endpunkte der so abgetragenen Strecken, so gehört zu $R_{III}$ jede Schraube, deren Achse parallel $G_i$ ist und einen Parameter $\mathfrak{p}$ hat, welcher, auf $G$ abgetragen, vom Schnittpunkte der $G$ mit $A$ bis zu jenem mit $B$ reicht. (S. 66). Insbesondere bilden alle zu $G$ parallelen *Transversalen* der Schnittkante $AB$, *deren* Ebene

𝔈 heifsen möge, das Liniengerippe $r_{\mathrm{III}}$ des $R_{\mathrm{III}}$ im Vereine mit folgendem *Feldbüschel* $l$: Nehmen wir $A$ senkrecht zu den $G_i$, dann gehört, wenn $x$ den Normalabstand einer beliebigen Achse $G$ von 𝔈 bedeutet, zu $G$ der Parameter $\mathfrak{p} = x \operatorname{tg} \underline{|AB}$. Geben wir dem auf $G$ fallenden Stab $l_0$ der $R_{\mathrm{II}}$-Schraube $L = l_0 + f_0$ von dieser Achse die Länge 1, so können wir das zu $l_0$ senkrechte Feld $f_0$ in Form eines Rechteckes darstellen, dessen Inhalt $\mathfrak{p}$ ist, dessen Seiten also die Längen $x$ und $\frac{\mathfrak{p}}{x}$ haben mögen. Erstere Seite sei senkrecht zu 𝔈, letztere parallel zur Kante $AB$. Das rechteckige Feld $f'$, welches die erstere Rechtecksseite mit $l_0$ verbindet, liefert, zu $f_0$ addiert, ein *Feld* $f = f' + f_0$, welches *zu* $R_{\mathrm{III}}$ *gehört*, da es gleich $L - l_0' = (l_0 - l_0') + f_0$ ist, wenn $l_0'$ jenen zu $r_{\mathrm{III}}(R_{\mathrm{III}})$ gehörigen Stab der Ebene 𝔈 bedeutet, welcher durch Projektion von $l_0$ auf 𝔈 gewonnen wird. Das zu 𝔈 senkrechte Feld $f$ des $R_{\mathrm{III}}$ schliefst mit den $G$ einen Winkel ein, der gleich $\underline{|AB}$ ist, da seine Tangente gleich dem Verhältnis der Längen der nicht gemeinsamen Rechtecksseiten von $f_0$ und $f$, d. h. $= \frac{\mathfrak{p}}{x} = \operatorname{tg} \underline{|AB}$ ist.

Das Feld von 𝔈 gehört auch zu $r_{\mathrm{III}}(R_{\mathrm{III}})$, *daher auch* jedes aus demselbem und $f$ ableitbare, d. h. *jedes Feld des Büschels, dessen Achse* $l$ in $f$ liegt und mit den $G$ (nach der gehörigen Seite hin) den konstanten Winkel $\underline{|AB} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\mathfrak{p}}{x}$ einschliefst.

Das *Reziprokalbündel* $P_{\mathrm{III}}$ ist erfüllt von allen Schrauben, deren Achsen zu $l$ parallel sind und den entgegengesetzt gleichen Parameter besitzen mit den Schrauben des $R_{\mathrm{III}}$, deren Achsen sie schneiden, so dafs also auch bei den Schrauben des $R_{\mathrm{III}}$ der zugehörige Parameter $\pi$ proportional ist der Entfernung der (zu $l$ parallelen) $P_{\mathrm{III}}$-Achse $\Gamma$ von 𝔈, und zwar mit dem entgegengesetzt gleichen Proportionalitätsfaktor jenes ($\operatorname{tg} \underline{|AB}$), welcher bei $R_{\mathrm{III}}$ auftritt. Das Liniengerippe $\varrho_{\mathrm{III}}$ des $P_{\mathrm{III}}$ besteht hier aus den zu $l$ parallelen Stäben der Ebene 𝔈 und aus dem Büschel der zu $G$ parallelen Felder.

3*) Die $G_i$ ($i = 1, 2, 3$) haben eine gemeinsame kürzeste Transversale $\Gamma_0$. Im Schraubenbündel $R_{\mathrm{III}}$ existiert dann ein Feld $f$ parallel $\Gamma_0$, denn man kann eine Vielfachensumme der drei Schrauben $L_i$ so bestimmen, dafs die Summen der Stabstrecken Null wird. Ferner giebt es in $R_{\mathrm{III}}$ eine Schraube, deren Achse $G_0$ die $\Gamma_0$ in einem Punkte $p$ senkrecht schneidet und deren Parameter *ganz beliebig* ist; wird nämlich aus den $L_i$ eine Schraube $L$ linear abgeleitet, so schneidet ihre Achse stets $\Gamma$ senkrecht, da $\Gamma_0$ gemeinsame Aufteilungsachse aller zu $R_{\mathrm{III}}$ gehörigen Cylindroide ist; wählt man die Ableitungszahlen der Schraube $L$ so, dafs *ihre* Stabstrecke zu $f$ senkrecht wird, so kann im Schrauben

bündel $R_{III}$ zu dieser $L$ ein beliebiges Vielfaches von $f$ addiert werden, d. h. der zur Achse $G_0$ dieser Schraube $L$ gehörige Parameter ist *beliebig.*

$R_{III}$ ist nun ebensogut wie früher durch die $L_i$, durch die Schrauben mit der Achse $G_0$ und beliebigem Parameter und durch die Schraube mit der Achse $G_1$ und dem Parameter $\mathfrak{p}_1$ bestimmt. (Fig. 18). Das zugehörige Reziprokalbündel $P_{III}$ ist ganz analog durch die mit beliebigem Parameter belegbare kürzeste $\Gamma_0$ von $G_0$ und $G_1$ und eine beliebige zu $G_0$ senkrechte Transversale $\Gamma_1$ von $G_0$ und $G_1$ bestimmt, welcher als Schraubenachse in $P_{III}$ der Parameter $\pi_1 = -\mathfrak{p}_1$ zu erteilen ist. Genau wie zu $R_{III}$ das zu $\Gamma_0$ senkrechte einzige Feld $f$ gehört, findet sich in $P_{III}$ nur das durch $G_0$ zu $\Gamma_0$ senkrecht gelegte Feld $\varphi$.

Da jede zu $P_{III}$ reziproke Schraube zu $R_{III}$ gehört und umgekehrt, so stellt jede mit dem Parameter $\frac{\mathfrak{p}_1}{\pi_1}(\mathfrak{p}_1 + \pi_1 = 0)$ belegte zu $\frac{\Gamma_0}{G_0}$ senkrechte Transversale von $\frac{\Gamma_0 \text{ und } \Gamma_1}{G_0 \text{ und } G_1}$ eine Achse des $\frac{R_{III}}{P_{III}}$ vor. Sei $\frac{e_1}{\mathfrak{e}_1}$ die Länge der kürzesten Transversalen von $\frac{G_0 \text{ und } G_1}{\Gamma_0 \text{ und } \Gamma_1}$, so giebt es ein gleichseitiges *hyperbolisches Paraboloid* $\mathfrak{P}_1$ mit den Scheitelgeraden $G_0$ und $\Gamma_0$ (die sich im Scheitel $p$ desselben senkrecht schneiden), welches $G_1$ und $\Gamma_1$ enthält und im Koordinatensystem mit der $\Gamma_0$ als $x$-, der $G_0$ als $y$- und der durch $p$ zu $\Gamma_0 G_0$ senkrechten $z$-Achse die Gleichung $xy = \varkappa_1 z$ hat.

$$\varkappa_1 = e_1 \operatorname{cotg} \underline{|G_0 G_1} = \mathfrak{e}_1 \operatorname{cotg} \underline{|\Gamma_0 \Gamma_1}$$

ist der Verteilungsparameter von $\mathfrak{P}_1$. Die Geradenschar $\frac{G}{\Gamma}$ des Paraboloides $\mathfrak{P}_1$ ist erfüllt von jenen zu $\frac{R_{III}}{P_{III}}$ gehörigen Achsen, deren Parameter den konstanten Wert $\frac{\mathfrak{p}_1}{\pi_1}$ hat.[1]) Da keine Verwechslung möglich wird, sei von jetzt ab mit $\frac{G_1}{\Gamma_1}$ jene Gerade der Schar $\frac{G}{\Gamma}$ auf $\mathfrak{P}_1$ bezeichnet, welche mit der Zentralebene $45^0$ einschließt, also von $\frac{G_0}{\Gamma_0}$ die kürzeste Entfernung $e_1 = \mathfrak{e}_1 = \varkappa_1$ hat.

*„Jede senkrechte Transversale von* $\frac{\Gamma_0}{G_0}$ *ist eine Achse* $\frac{G}{\Gamma}$ *des* $\frac{R_{III}}{P_{III}}$, belegbar mit einem bestimmten Parameter $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ — abgesehen von den in die Hauptebene $G_0 \Gamma_0$ fallenden senkrechten Transversalen, denen, außer der mit beliebigen Parametern verbunden zu denkenden $\frac{G_0}{\Gamma_0}$, der Parameter $\infty$ zukommt, weshalb sie bloß das Feld $\frac{f}{\varphi}$ vorstellen.

1) Nur $G_0$ und $\Gamma_0$ ist jedes beliebigen Parameters fähig.

*Auf jedem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloide* $\mathfrak{P}$ $(\varkappa y = xz)$ ($\varkappa$ beliebig) *über* $G_0$ *und* $\Gamma_0$ *als Scheitelgeraden* repräsentiert die zu $\frac{G_0}{\Gamma_0}$ gehörige Geradenschar das System der Achsen des $\frac{R_{III}}{P_{III}}$, welche zu einem *konstanten Parameter* $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ $(\mathfrak{p} + \pi = 0)$ gehören. $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ unterscheidet sich dem absoluten Werte nach von $\frac{\mathfrak{p}_1}{\pi_1}$ um gerade soviel, als der Verteilungsparameter $\varkappa$ des Paraboloides $\mathfrak{P}$ von $\varkappa_1$, jenem des Paraboloides $\mathfrak{P}_1$“:

Die $Z$-Achse unseres Koordinatensystems gehört als Schraubenachse zu $\frac{R_{III}}{P_{III}}$, wenn wir sie mit dem Parameter

$$\frac{\mathfrak{p}_0 = \pm \varkappa_1 + \mathfrak{p}_1}{\pi_0 = \mp \varkappa_1 + \pi_1}$$

belegen; dies folgt aus der Reziprokalrelation gegen $\frac{\Gamma_1(\pi_1)}{G_1(\mathfrak{p}_1)}$:

$$\frac{\pm(\mathfrak{p}_0 + \pi_1) = \varkappa_1 \operatorname{tg} 45^0}{\mp(\pi_0 + \varphi_1) = \varkappa_1 \operatorname{tg} 45^0} \left(\mathfrak{p}_{\substack{0\\1}} + \pi_{\substack{0\\1}} = 0\right)$$

wobei die oberen oder unteren Vorzeichen — beidemal gleichzeitig — gelten, je nachdem über das Parametervorzeichen verfügt wird wie auf S. 51 oder umgekehrt. Hienach gehört zu $\frac{R_{III}}{P_{III}}$ als zum Parameter $\frac{\mathfrak{p}_0}{\pi_0}$ gehörige Achsenschar

1) Das Büschel $p$ der Ebene $\frac{G_0 \varphi = yz}{\Gamma_0 f = xz}$, weil ableitbar aus den zu $\frac{\mathfrak{p}_0}{\pi_0}$ gehörigen $\frac{Z \text{ und } G_0}{Z \text{ und } \Gamma_0}$,

2) Das Büschel der zu $Z$ parallelen Strahlen der Ebene $\frac{\Gamma_0 f = xz}{G_0 \varphi = yz}$, weil aus $\frac{f}{\varphi}$ und $\frac{Z(\mathfrak{p}_0)}{Z(\pi_0)}$ ableitbar.

Das Büschelpaar 1) 2) repräsentiert eine ausgeartete Paraboloidschar $\frac{\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0}{\pi = \pi_0}$.

In *jeder* Ebene $\frac{E}{\mathfrak{E}}$ durch $\frac{\Gamma_0}{G_0}$ liegt *ein Strahl* $\frac{G(\mathfrak{p}_0)}{\Gamma(\pi_0)}$ des Büschels 1) *und eine Gerade* der Schar $\frac{G(\mathfrak{p}_1)}{\Gamma(\pi_1)}$ des Paraboloides $\mathfrak{P}_1$; letztere Gerade kann speziell $\frac{G_1}{\Gamma_1}$ selbst sein, wenn $\frac{E}{\mathfrak{E}}$ gegen die Hauptebene unter $45^0$ geneigt ist; *jede* Gerade in $\frac{E}{\mathfrak{E}}$ parallel zu den *beiden* ist also, weil aus den durch die beiden repräsentierten Schraubungen linear ableitbar, eine Achse $\frac{G}{\Gamma}$ im $\frac{R_{III}}{P_{III}}$. Nehmen wir nun speziell $\frac{E}{\mathfrak{E}}$ durch $\frac{G_1}{\Gamma_1}$, also

unter $45^0$ gegen die Hauptebene an; dann ist jede zu $\frac{\Gamma_0}{G_0}$ senkrechte Gerade $\frac{G}{\Gamma}$ dieser Ebene, welche die kürzeste Entfernung $\varkappa$ von $\frac{G_0}{\Gamma_0}$ haben möge — so dafs $\varkappa$ Verteilungsparameter des Paraboloides $\mathfrak{P}$ (durch $\frac{G}{\Gamma}$ mit den Scheitelgeraden $G_0$ und $\Gamma_0$) wird — um eine Schraubung des $\frac{R_{\text{III}}}{P_{\text{III}}}$ vorzustellen, mit einem Parameter $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ $(\mathfrak{p}+\pi=0)$ zu belegen, welcher sich aus der Reziprokalrelation der $\frac{G(\mathfrak{p})}{\Gamma(\pi)}$ gegen $\frac{Z(\pi_0)}{Z(\mathfrak{p}_0)}$: $\frac{\mathfrak{p}_0=\pm\varkappa+\mathfrak{p}}{\pi_0=\mp\varkappa+\pi}$ $\left(\text{wie oben } \frac{\mathfrak{p}_0=\pm\varkappa_1+\mathfrak{p}_1}{\pi_0=\mp\varkappa_1+\pi_1}\right)$ bestimmen läfst, sich also wirklich der behaupteten Gleichung

$$\frac{\mp(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_1)=\varkappa-\varkappa_1}{\pm(\pi-\pi_1)=\varkappa-\varkappa_1} \quad \text{gemäfs verhält.}$$

Das Liniengerippe $\frac{r_{\text{III}}}{\varrho_{\text{III}}}$ des $\frac{R_{\text{III}}}{P_{\text{III}}}$ besteht aus der zu $\frac{G_0}{\Gamma_0}$ gehörigen Schar jenes Paraboloides $\mathfrak{P}(xy=xz)$ dessen $\varkappa$, $\mathfrak{p}=0$ entsprechend, $\varkappa=\mp\pi_0=\pm\mathfrak{p}_0$ ist; für $\mathfrak{p}_0=\pi_0=0$ speziell ist $\frac{r_{\text{III}}}{\varrho_{\text{III}}}$ das unter (1) (2) erwähnte Büschelpaar.

Durch jeden Punkt $\frac{\mu(e,0,0)}{m(0,\mathfrak{e},0)}$ der $\frac{\Gamma_0}{G_0}$ geht ein Büschel von zu $\frac{\Gamma_0}{G_0}$ senkrechten Achsen des $\frac{R_{\text{III}}}{P_{\text{III}}}$. Trägt man auf jeder dieser Achse nicht den zugehörigen Parameter $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ selbst, sondern, und zwar von $\frac{\mu}{m}$ aus $\frac{\varrho=-\mathfrak{p}_0+\mathfrak{p}}{\varrho=-\pi_0+\mathfrak{p}}$ ab, so erfüllen die Endpunkte der so abgetragenen Strecken bei festem $\frac{\mu}{m}$ $\frac{\varrho=e\operatorname{tg}|\underline{GZ}}{\varrho=\mathfrak{e}\operatorname{tg}|\underline{\Gamma Z}}$ [1]) die Kurve $\mathfrak{C}$ der Fig. 1 $\left(\text{dort ist } \frac{|\underline{GZ}=\vartheta}{|\underline{\Gamma Z}=\vartheta}\right)$, deren Gleichung $\frac{z^2(y^2+z^2)-e^2y^2=0}{z^2(x^2+z^2)-\mathfrak{e}^2x^2=0}$ lautet, daher, wenn der Punkt $\frac{\mu}{m}$ auf $\frac{\Gamma_0}{G_0}$ variiert, den Kegel 4. O. $\frac{z^4+y^2(z^2-x^2)=0}{z^4+x^2(z^2-y^2)=0}$, welcher obige $\mathfrak{C}$ aus $p$ projiziert.

4*) Die Achsen $G_1\,G_2\,G_3$ der drei Schrauben, welche ein Gebiet $R_{\text{III}}$ bestimmen, seien parallel zu einem ebenen Felde $\varphi$, *ohne aber* dieselbe

---

1) Die Reziprokalrelation der $\frac{G(\mathfrak{p})}{\Gamma(\pi)}$ gegen $\frac{Z(\pi_0)}{Z(\mathfrak{p}_0)}$ besagt nämlich:

$$\frac{\pi_0+\mathfrak{p}=e\operatorname{tg}|\underline{GZ}}{\mathfrak{p}_0+\pi=\mathfrak{e}\operatorname{tg}|\underline{\Gamma Z}}$$

kürzeste Transversale za besitzen.[1]) Auf den zwei linearen Schraubenbüscheln, welche z. B. die erste dieser Schrauben mit je einer der übrigen verbinden, können wir uns je eine gewifs reelle Schraube — an Stelle der zu $G_2$, bzw. $G_3$ gehörigen — bestimmen, welche zum gleichen Parameter $\mathfrak{p}_1$ gehört wie $G_1$, so dafs wir, um keine Bezeichnungen zu häufen, gleich annehmen dürfen, dafs die zu $\varphi$ parallelen Achsen $G_1$ $G_2$ $G_3$ *zum gleichen Parameter* $\mathfrak{p}_1$ *gehören.* (Schneiden sich zwei von diesen drei Achsen, etwa $G_1$ und $G_2$, wobei $G_3$ parallel ist zur Ebene $G_1 G_2$, so gehört zu $R_{III}$ aufser dem Büschel $G_1 G_2$ noch das ebenfalls zu $\mathfrak{p}_1$ gehörige Parallelbüschel, welches $G_3$ mit dem zu ihm parallelen Strahle des Büschels $G_1 G_2$ verbindet. Dieser Fall bietet jedoch insofern keine Besonderheit, als auch im allgemeinsten zu 4*) gehörigen Falle sich ein derartiges Büschelpaar konstanten Parameters ergeben wird, welches hier nur von vornherein gegeben wäre.)

— Eine Besonderheit liegt vor, wenn die ein $R_{III}$ bestimmenden zu $\mathfrak{p}_1$ gehörigen $G_1 G_2 G_3$ in einer Ebene liegen. Das ganze Geradenfeld derselben ist dann Ort der mit $\mathfrak{p}_1$ belegten Achsen des $R_{III}$ und gleichzeitig Ort der mit dem Parameter $\pi_1 = -\mathfrak{p}_1$ versehenen Achsen des reziproken $P_{III}$. Zum Liniengerippe $\frac{r_{III}}{\varrho_{III}}$ des $\frac{R_{III}}{P_{III}}$ gehört aufser dem Felde $f = \varphi$ der Achsenebene die Gesamtheit der zirkulären imaginären Geraden v. Staudts 2. Art, welche darstellbar sind in der Form $L = L_1 + \sqrt{-1}\, L_2$, wobei $L_1$ und $L_2$ inhaltsgleiche Schrauben bedeuten, deren zu $\frac{\mathfrak{p}_1}{\pi_1}$ gehörige gleich lange Achsenstäbe in der Achsenebene liegen und sich senkrecht schneiden. Der Name „Gerade“ für $L$ selbst ist durch die Geltung der Gleichung $L^2 = 0$ $(L_1^2 = L_2^2,\ L_1 L_2 = 0)$ gerechtfertigt. Diesen $L$ kann jeder beliebige Parameter zugeschrieben werden und man kann jede Staudtsche imaginäre zirkuläre Gerade (1. Art) des Feldes $\mathfrak{E} = \varphi$ als Achse einer solchen $L$ ansehen. Vgl. S. 80.—

Im allgemeinen Falle 4*) ist das Paraboloid $G_1 G_2 G_3$ ungleichseitig, da sonst der Fall 3*) vorläge. Die *ganze Schar* $G_1 G_2 G_3 \ldots$ desselben stellt die zu $\mathfrak{p}_1$ in $R_{III}$ gehörige Achsenschar vor; die andere Schar $\Gamma$ dieses Paraboloides, mit dem Parameter $\pi_1 = -\mathfrak{p}_1$ belegt, gehört zum Reziprokalgebiete $P_{III}$. Das Direktionsfeld $f$ der letzteren Schar gehört zu $R_{III}$, ebenso wie $\varphi$ zu $P_{III}$. Die gleiche Überlegung lehrt, dafs die Achsen aller $\infty^1$ Schrauben, die in $\frac{R_{III}}{P_{III}}$

---

1) diesen Fall 4* behandelt N. Zantscheffsky analytisch in seiner Abhandlung: „Die Schraubenlehre und ihre Anwendung auf die Mechanik“ p. 63—67. (In russischer Sprache, Odessa 1889.)

einen beliebigen konstanten Parameter $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ besitzen, ungleichseitige Paraboloidscharen erfüllen, deren Direktionsebene $\frac{\varphi}{f}$ ist, und zwar beide auf demselben Paraboloide, falls $\mathfrak{p} + \pi = 0$ ist. Wir wollen die Lagen dieser Paraboloide untersuchen.

$G_0(\mathfrak{p}_1)$ sei die Scheitelgerade und $\mathfrak{e}_1$ der Verteilungsparameter der Schar $G_1 G_2 G_3$, = der kürzesten Entfernung der Scheitelgeraden dieses Paraboloides von jener Geraden gleicher Schar, welche mit der ersteren $45^0$ einschliefst, = der auf der Scheitelgeraden $\Gamma_0(\pi_1)$ der anderen Schar gemessenen Entfernung $S_1 E_1$ (Fig. 19) des Scheitels $S_1 = G_0 \Gamma_0$ von jener Geraden $G(\mathfrak{p}_1)$, deren Verbindungsebene mit $\Gamma_0(\pi_1)$ gegen die Zentralebene $(G_0 \Gamma_0)$ unter $45^0$ geneigt ist. Jede Paraboloidschar $\mathfrak{p} = -\pi = \text{const.}$ von Achsen $\frac{G}{\Gamma}$ des $\frac{R_{\text{III}}}{P_{\text{III}}}$ hat das Direktionsfeld $\frac{\varphi}{f}$, also sind die Scheitelgeraden $\frac{G_0(\mathfrak{p})}{\Gamma_0(\pi)}$ derselben zu denen der Schar $\mathfrak{p}_1 = -\pi_1 = \text{const.}$, also zu $\frac{G_0(\mathfrak{p}_1)}{\Gamma^0(\pi_1)}$ parallel; daher mufs die zur Achse $\frac{G_0(\mathfrak{p})}{\Gamma_0(\pi)}$ gehörige Schraube aus der Schraube $\frac{G_0(\mathfrak{p}_1)}{\Gamma_0(\pi_1)}$ und dem Felde $\frac{f}{\varphi}$ linear ableitbar sein und es wird $\frac{G_0(\mathfrak{p})}{\Gamma_0(\pi)}$ aus $\frac{G_0(\mathfrak{p}_1)}{\Gamma_0(\pi_1)}$ durch Parallelverschiebung entlang der Achse $Z$ des Paraboloides $(\mathfrak{p}_1)$ um ein Stück $z$ erhalten, welches der Gleichung

$$\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1 = z \operatorname{tg} \alpha \quad (\alpha = \underline{|G_0 \Gamma_0} = \underline{|G_0 f}, \text{ Winkel der Direktionsebenen } \varphi \text{ und } f)$$

genügt. (S. 66, 2*.)

Um aufser den jetzt bekannten Scheitelgeraden $\frac{G_0(\mathfrak{p})}{\Gamma_0(\pi)}$ der Schar $\mathfrak{p} = -\pi = \text{const.}$ noch deren Verteilungsparameter $\mathfrak{e}$ und damit das betreffende Paraboloid vollständig zu erkennen, berücksichtigen wir, dafs jene zu $G(\mathfrak{p}_1)$ parallele Gerade $G(\mathfrak{p})$ dieser Schar, welche von der Scheitelgeraden $G_0(\mathfrak{p})$ die auf $\Gamma_0(\pi)$ gemessene Entfernung $\mathfrak{e}$ hat, als Achse zu einer $R_{\text{III}}$-Schraube gehört, welche aus der Schraube $G(\mathfrak{p}_1)$ und $f$ linear ableitbar sein mufs, daher mit $G(\mathfrak{p}_1)$ durch eine Ebene verbunden wird, welche im Felde $f$ eine zu $G(\mathfrak{p})$ senkrechte Spur hat, so dafs diese Spur $H$ der Ebene $G(\mathfrak{p}_1) \,.\, G(\mathfrak{p})$ in der Ebene $\Gamma_0 Z = Zf$ mit $Z$ den Winkel $\alpha$ einschliefsen mufs. [$G(\mathfrak{p}_1)$ liegt in der winkelhalbierenden Ebene von $\Gamma_0 G_0$ und $\Gamma_0 Z$ und steht senkrecht zum Lote $E_1 L$ zu $G_0$ in der ersteren und zur Geraden $H$ der letzteren Ebene, daher ist

$$\underline{|H \Gamma_0} = \underline{|(L E_1) \,.\, \Gamma_0} = 90^0 - \alpha,$$

woraus $\underline{|HZ} = \alpha$ folgt.]

$G(\mathfrak{p})$ kann hienach — bei beliebigem $\mathfrak{p}$ — jede zu $G(\mathfrak{p}_1)$ parallele Transversale von $H$ sein; das aus dem Schnittpunkte $E$ von $G(\mathfrak{p})$ mit $H$ auf $Z$ gefällte Lot ist eine Scheitelgerade $\Gamma_0(\pi)$ des zu $\mathfrak{p}$ (bezw. $\pi = -\mathfrak{p}$) gehörigen Paraboloides und seine Länge $ES$ ist der Verteilungsparameter $\mathfrak{e}$ desselben. Es gilt (absolut genommen)

$$\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_1 = z \operatorname{tg} \alpha = \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1$$

d. h. von einem Paraboloid zum anderen ändern sich der Verteilungsparameter und der Schraubenparameter um gleiche Stücke.

„Die Paraboloidscharen $\mathfrak{p} = -\pi =$ const. von Achsen des $\frac{R_{III}}{P_{III}}$ haben sämtlich parallele Scheitelgerade und die gleiche Paraboloidachse $Z$. Eine feste Gerade $\frac{H}{H'}$, welche mit $Z$ den Winkel $\alpha$ der Direktionsebenen $f$ und $\varphi$ der Paraboloide einschließt, verbindet jene Punkte aller Scheitelgeraden $\frac{\Gamma_0}{G_0}$, deren Tangentialebenen an das betreffende Paraboloid unter $45^0$ gegen $Z$ geneigt sind".

*Eine dieser Paraboloidscharen ist in ein Büschelpaar* ausgeartet, jene nämlich, für welche $\mathfrak{e} = 0$ und entsprechend

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{p}_0, \quad \pi = -\mathfrak{p}_0 = \pi_0$$

ist; sie wird zum Büschel mit dem Zentrum $M = HZ = H'Z$ der Ebene $\frac{ZG_0 = Z\varphi}{Z\Gamma_0 = Zf}$ und zum Büschel der zu $Z$ parallelen Strahlen der Ebene $\frac{Z\Gamma_0 = Zf}{ZG_0 = Z\varphi}$ ausarten.

Eine dieser Paraboloidscharen bildet, $\mathfrak{p} = -\pi = 0$ entsprechend, das Liniengerippe $\frac{r_{III}}{\varrho_{III}}$ von $\frac{R_{III}}{P_{III}}$. Ist speziell das eben erwähnte Büschelpaar das Liniengerippe, so liegt ein besonderer zu III'), S. 61, gehöriger Fall vor.

„Die $\infty^1$ Paraboloide $\mathfrak{p} = -\pi =$ const., oder, was auf dasselbe hinauskommt, *sämtliche* $\infty^2$ zu $\frac{\varphi}{f}$ parallele *Achsen* $\frac{G}{\Gamma}$ *des* $\frac{R_{III}}{P_{III}}$ *umhüllen einen Kegel* $\mathfrak{K}_d$ *2. Grades, welcher M zum Scheitel, die Ebenen* $Z\varphi$ *und* $Zf$ *zu Tangentialebenen und zu diesen Ebenen senkrechte Fokalachsen d und* $\delta$ *hat*":

(Fig. 20.) In jede beliebige zu $\varphi$ parallele Ebene $\mathfrak{E}$ fallen $\infty^1$ Strahlen $G$, Achsen des $R_{III}$; von diesen $G$ geht eine durch jeden Punkt $P$ der Schnittlinie $t$ der $\mathfrak{E}$ mit $(Zf)$, nämlich jene, welche dem Paraboloide $\mathfrak{P}(\mathfrak{p} = -\pi = \text{const.})$ angehört, dessen Scheitelgerade $\Gamma_0(\pi)$ das von $P$ auf $Z$ gefällte Lot ist. (Die andere Scheitelgerade $G_0(\mathfrak{p})$

dieses Paraboloides geht durch den Scheitel $S = \Gamma_0 Z$, liegt in der Ebene $Z\varphi$ senkrecht zu $Z$. — $t$ stellt übrigens selbst eine $R_{\text{III}}$-Achse vor, da sie ein Strahl des zu $\mathfrak{p}_0$ gehörigen Parallelbüschels ist. —) Möge wie oben die durch $M$ in der Ebene $Zf$ unter dem Winkel $\alpha$ mit $Z$ verlaufende Gerade $H$ die $\Gamma_0(\pi)$ in $E$ schneiden, so ist das Stück $\mathfrak{e} = SE$ der Verteilungsparameter des Paraboloides $\mathfrak{P}$. Die Tangentialebene $\Gamma_{0(\pi)} G$ des $\mathfrak{P}$ in $P$ schliefst daher mit der Zentralebene dieses Paraboloides einen Winkel ein, dessen goniometrische Tangente $= \frac{x}{\mathfrak{e}}$ ist, wenn das Stück $SP$ mit $x$ bezeichnet wird. Die durch $P$ gehende Gerade $G$ schliefst also mit ihrer orthogonalen Projektion $G'$ auf die Zentralebene einen Winkel $\omega$ ein, dessen

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{x}{\mathfrak{e}} \sin \alpha$$

ist, denn $\alpha$ ist auch der Winkel von $G'$ mit $\Gamma_0(\pi)$.

Die durch $M$ senkrecht zu $(Z\varphi)$ gehende Gerade $d$, die wir als Fokalachse des $\mathfrak{K}_d$ nachzuweisen haben, möge $\mathfrak{E}$ im Punkte $F$ treffen. Der Winkel $\omega'$, welchen $PF$ mit ihrer orthogonalen Projektion $PI$ auf die Gerade $t$ einschliefst, hat die

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{IF}{PI};$$

nun ist $IF = x \cos \alpha$, wie sich aus dem bei $F$ rechtwinkeligen Dreieck $MFI$ ergiebt, da $IM = PS = x$ und $\underline{|FIM} = \alpha$ ist;

$$PI = SM = \mathfrak{e} \operatorname{cotg} \alpha,$$

wie aus dem bei $S$ rechtwinkeligen Dreiecke $SME$ folgt, in dem $SE = \mathfrak{e}$ und $\underline{|SME} = \alpha$ ist; folglich haben wir

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{x \cos \alpha}{\mathfrak{e} \operatorname{cotg} \alpha} = \frac{x}{\mathfrak{e}} \sin \alpha = \operatorname{tg} \omega, \quad \omega' = \omega,$$

daher $G$ *senkrecht zu* $FP$. Da $F$ und $t$ in jeder Ebene $\mathfrak{E}$ des Parallelebenenbüschels $\varphi$ fest liegen, $P$ aber auf $t$ beliebig ist, so erkennen wir, dafs die in $\mathfrak{E}$ fallenden Strahlen $G$ (Achsen in $R_{\text{III}}$) eine *Parabel* mit dem Brennpunkte $F$ und der Scheiteltangente $t$ umhüllen. Da aber auch $\mathfrak{E}$ parallel verschoben werden kann, wobei $F$ auf $d$ wandert und $t$ in $Zf$ sich parallel verschiebt, umhüllen alle $G$ den Kegel $\mathfrak{K}_d$, welcher die obige Parabel aus $M$ projiziert und $d$ zur Fokalachse hat.

Alle Tangenten des $\mathfrak{K}_d$, welche zu $\varphi$ parallel sind, stellen Achsen $G$ des $R_{\text{III}}$ vor, nur die in $Z\varphi$ liegenden und nicht durch $M$ gehenden Geraden (welche $\mathfrak{K}_d$ in einem Punkte der Kante $G_0(\mathfrak{p}_0)$ berühren,

*nicht*, indem in $Z\varphi$ *blofs* das zu $\mathfrak{p}_0$ gehörige Büschel des Punktes $M$ von Achsen $G$ des $R_{III}$ erfüllt wird.

Das Achsensystem $G$ der zu $\varphi$ parallen Tangenten des $\mathfrak{K}_d$ ist hiernach von der 2. Ordnung und 1. Klasse, denn durch jeden Puukt $w$ des Raumes gehen die beiden Tangenten $G$ an die Schnittparabel des $\mathfrak{K}_d$ mit $\mathfrak{E} = w\varphi$ und in jede Ebene $W$ fällt die zu $\varphi$ parallele und nicht in $(Z\varphi)$ gelegene Tangente an den Kegelschnitt $(W \,.\, \mathfrak{K}_d)$.

Genau so zeigt sich, dafs jede (zu $f$ parallele) Achse $\Gamma$ des $P_{III}$ denselben Kegel $\mathfrak{K}_d$, welcher auch die zu $f$ senkrechte Fokalachse $\delta$ besitzt, berührt, und dafs umgekehrt alle zu $f$ parallelen Tangenten dieses Kegels Achsen in $P_{III}$ sind, aufser den nicht durch $M$ gehenden Geraden der Ebene $Zf$.

Trifft eine beliebige Achse $\frac{G}{\Gamma}$ des $\frac{R_{III}}{P_{III}}$ die Ebene $\frac{Zf}{Z\varphi}$ in einem Punkte $\frac{P}{\Pi}$, welcher von der durch $M$ zu $Z$ senkrecht gelegten Ebene die Entfernung $z$ hat, so bestimmt man den Parameter $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ derselben mit Rücksicht darauf, dafs (absolut genommen)

$$(\text{vgl. } \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{e} - \mathfrak{e}_1), \quad \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{e}(-0) = z \operatorname{tg} \alpha$$

sein mufs.

## Allgemeiner Fall $\frac{R_{III}}{P_{III}}$

eines Schraubenbündels, dessen Achsen alle möglichen Richtungen des Raumes besitzen. Er tritt ein, wenn die Schrauben $G_1(\mathfrak{p}_1)$, $G_2(\mathfrak{p}_2)$, $G_3(\varphi_3)$, welche $R_{III}$ bestimmen, Achsen haben, welche *nicht* zu einer Ebene parallel sind. Wieder können wir, wie im Spezialfalle 4*) ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_1$ voraussetzen, so dafs alle Geraden der Hyperboloidschar $G_1 G_2 G_3$ zum Parameter $\mathfrak{p}_1$ gehörige Schraubenachsen des $R_{III}$ vorstellen, während die andere Schar dieses Hyperboloides $F_1$ von den mit dem Parameter $\pi_1 = -\mathfrak{p}_1$ behafteten Achsen $\Gamma$ des Reziprokalbündels $P_{III}$ erfüllt ist.

Die Achsen aller $\infty^1$ Schrauben des $\frac{R_{III}}{P_{III}}$, welche einen beliebigen Parameter $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ besitzen, gehören zu einer Schar $\frac{G(\mathfrak{p})}{\Gamma(\pi)}$ eines Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$, und zwar desselben Hyperboloides, wenn $\mathfrak{p} + \pi = 0$ ist. Hierbei kann für einen bestimmten Parameter — und dies geschieht wirklich, wie wir zeigen werden — die eine Schar $G(\mathfrak{p})$ zu einem Paare von Büscheln (Zentrum $M$, Ebene $\mu$; und Zentrum $N$, Ebene $\nu$) mit einem gemeinsamen Strahle $MN = \mu\nu$ ausarten, wobei

die Schar $\Gamma(\pi)$ $(\mathfrak{p} + \pi = 0)$ das Büschelpaar der gleichen Büschelebenen $\mu$, $\nu$, aber mit vertauschten Zentren $N$, $M$ wird.

Eines dieser Hyperboloide $\mathfrak{p} = -\pi = 0$ wird in seiner einen Geradenschar das Liniengerippe $r_{\text{III}}$ von $R_{\text{III}}$, in der anderen das Gerippe $\varrho_{\text{III}}$ des reziproken $P_{\text{III}}$ darbieten. (Der Fall III′ (S. 61) ist jener, wo gerade für $\mathfrak{p} = -\pi = 0$ statt eines Hyperboloides ein Büschelpaar $\frac{M\mu,\ N\nu}{N\mu,\ M\nu}$ sich ergiebt.)

Wie liegen die $\infty^1$ Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ $(\mathfrak{p} = -\pi$ beliebig, konstant) und was für ein Strahlensystem erfüllen die $\infty^1$ Achsen $\frac{G}{\Gamma}$ des Bündels $\frac{R_{\text{III}}}{P_{\text{III}}}$? Dieses *Strahlensystem ist identisch mit der u. a. von E. Waelsch* („Über eine Strahlenkongruenz beim Hyperboloide“, Wiener Ber. 95. Bd. S. 781—801, „Über das Normalensystem u. die Centrafl. alg. Fl.“ Halle 1888) *untersuchten Kongruenz* $K\left(\frac{G}{\Gamma}\right)$, (3. O. 2. Kl.), *welche von den kürzesten Transversalen je zweier Erzeugenden derselben Schar* $\frac{\Gamma(\pi_1)}{G(\mathfrak{p}_1)}$ *eines Hyperboloides* $F_1$ *gebildet wird;* wobei statt $F_1$ mit seiner Geradenschar jedes Hyperboloid $F(\mathfrak{p})$ mit seinen $\frac{\Gamma(\pi)}{G(\mathfrak{p})}$ eintreten kann.

Eine solche kürzeste Transversale $\frac{G}{\Gamma}$ könnte nämlich als Achse einer Schraube $\frac{L}{\Lambda}$ des $\frac{R_{\text{III}}}{P_{\text{III}}}$ einen beliebigen Parameter $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ besitzen, wenn sie bloſs zu den beiden Schrauben des $\frac{P_{\text{III}}}{R_{\text{III}}}$ mit den von ihr senkrecht geschnittenen Achsen $\frac{\Gamma(\pi_1)}{G(\mathfrak{p}_1)}$ reziprok sein sollte; erteilt man ihr nun einen solchen Parameter $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$, welcher sie noch mit einer dritten, von den beiden vorigen linear unabhängigen, Schraube des $\frac{R_{\text{III}}}{P_{\text{III}}}$ reziprok macht, so repräsentiert sie eine zum ganzen Schraubenbündel $\frac{P_{\text{III}}}{R_{\text{III}}}$ reziproke, also zu $\frac{R_{\text{III}}}{P_{\text{III}}}$ gehörige Schraube. In gleicher Weise wie zu $F_1$, gehört dieselbe Kongruenz $K\left(\frac{G}{\Gamma}\right)$ zu allen $\infty^1$ Hyperboloiden $F(\mathfrak{p})$. Die Symmetrieachsen $G_{\text{I}} = \Gamma_{\text{I}}$, $G_{\text{II}} = \Gamma_{\text{II}}$, $G_{\text{III}} = \Gamma_{\text{III}}$ des Hyperboloides $F_1$ sind Symmetrieachsen der Kongruenz $K\left(\frac{G}{\Gamma}\right)$, also eines jeden der $\infty^1$ Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$. $K(G)$ und $K(\Gamma)$, die „rechte“ und „linke“ Kongruenz, gehen ebenso wie die Scharen eines jeden der Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ in einander über, wenn eine Spiegelung an einer der Symmetrie-

ebenen $G_{II}G_{III}$, $G_{III}G_{I}$, $G_{I}G_{II}$ vorgenommen wird. Die $G_i = \Gamma_i$ $(i = \text{I, II, III})$ stellen uns, wenn wir sie mit geeigneten Parametern $\frac{\mathfrak{p}_i}{\pi_i}$ $(i = \text{I, II, III})$, den Hauptparametern', versehen, die drei „Hauptschrauben“ $\frac{L_i}{\Lambda_i}$ des $\frac{R_{III}}{P_{III}}$ vor und eignen sich zur kanonischen Darstellung dieses Schraubenbündels. Die $\frac{\mathfrak{p}_i}{\pi_i}$ $(\mathfrak{p}_i + \pi_i = 0)$ sind aus den Halbachsen $a_i$ des Hyperboloides $F_1$, ebensogut aber auch aus denen irgend eines anderen der $\infty^1$ Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ ableitbar, weshalb wir von nun ab den Index 1 bei $\mathfrak{p}_1$ weglassen. $\frac{x^2}{a_I^2} + \frac{y^2}{a_{II}^2} + \frac{z^2}{a_{III}^2} = 1$ (ein Halbachsenquadrat z. B. $a_{III}^2$ negativ, $a_{III}$ imaginär, $a_{III}\sqrt{-1}$ reell) ist die auf das Achsensystem der $G_i$ bezogene Gleichung des Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$. Um $\mathfrak{p}_i$, den zu einer der gemeinsamen Symmetrieachsen gehörigen Parameter zu bestimmen, benutzen wir die Reziprozitätsbedingung $\mathfrak{p} + \pi = \mathfrak{e}\,\mathrm{tg}\,\underline{|G\Gamma}$ der $G_i(\mathfrak{p}_i)$ gegen eine jener Schrauben des $P_{III}$, deren Achse $\Gamma$ eine der beiden anderen Symmetrieachsen des Hyperboloides schneidet, so dafs $\mathrm{tg}\,\underline{|G_i\Gamma}$ aus den Halbachsenverhältnissen zweier der $a_i$ sich ergiebt, während $\mathfrak{e}$ gleich dem dritten unter den $a_i$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_I &= \mathfrak{p} - \frac{a_{III}a_{II}\sqrt{-1}}{a_I} \\ \mathfrak{p}_{II} &= \mathfrak{p} - \frac{a_{III}a_{I}\sqrt{-1}}{a_{II}} \\ \mathfrak{p}_{III} &= \mathfrak{p} - \frac{a_{I}a_{II}\sqrt{-1}}{a_{III}} \end{aligned}\right\},$$

woraus $a_I a_{II} a_{III}\sqrt{-1} = -(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_I)(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{III})$ resultiert, weshalb gefolgert werden kann:

$$\left\{\begin{aligned} a_I^2 &= -(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{III}) \\ a_{II}^2 &= -(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{I}) \\ a_{III}^2 &= -(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{I})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{II}) \end{aligned}\right.$$

*Die Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ haben hiernach die Gleichung*

$$\frac{x^2}{(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{III})} + \frac{y^2}{(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{I})} + \frac{z^2}{(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{I})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{II})} + 1 = 0$$

oder

$$F(\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_I)x^2 + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{II})y^2 + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{III})z^2 + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_I)(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{III}) = 0.$$

Diese Gleichung stellt für Werte von $\mathfrak{p}$, die sich zwischen den extremsten beiden der Hauptparameter $\mathfrak{p}_i$ befinden, ein einschaliges Hyperboloid, und nur, wenn $\mathfrak{p}$ aufserhalb dieser Grenzen angenommen wird, eine imaginäre Mittelpunktsfläche 2. Ordnung vor, erfüllt von imaginären Geraden von Staudts 2. Art. Das Hyperboloid, welches die Liniengerippe $\frac{r_{III}}{\varrho_{III}}$ des $\frac{R_{III}}{P_{III}}$ trägt,

$$-F(o) = \mathfrak{p}_I x^2 + \mathfrak{p}_{II} y^2 + \mathfrak{p}_{III} z^2 + \mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II} \mathfrak{p}_{III} = 0$$

ist reell, wenn einer der $\mathfrak{p}_i$ ein anderes Vorzeichen hat, als die beiden anderen.

Eins der Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ — und aufser diesem reellen noch zwei konjugiert-imaginäre — ist zum Ebenenpaare $\mu, \nu$ ausgeartet: Sei $\mathfrak{p}_{II}$ der algebraisch zwischen $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{III}$ gelegene Wert, so wird $\mu, \nu$ durch $F(\mathfrak{p}_{II}) = 0$ oder durch $\frac{z}{x} = \pm \sqrt{-\frac{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III}}}$ dargestellt. Die Punkte $M, N$ $(x = 0,\ z = 0,\ y = \pm \sqrt{-(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)})$ sind die Zentra jener beiden Büschel $\frac{M\mu,\ N\nu}{N\mu,\ M\nu}$ von Achsen $\frac{G(\mathfrak{p}_{II})}{\Gamma(\mathfrak{p}_{II})}$ des $\frac{R_{III}}{P_{III}}$, welche die eine reelle ausgeartete Hyperboloidschar repräsentieren und „Basisbüschel“ genannt werden sollen. Ihre Ebenen, die „Basisebenen“ $\mu$ *und* $\nu$ *sind die gemeinsamen zyklischen Ebenen aller Hyperboloide* $F(\mathfrak{p})$. Die Basisbüschel bestimmen die Kongruenz $K\binom{G}{\Gamma}$ als System der kürzesten Transversalen über je einem Strahle beider:

„Die durch einen beliebigen Punkt $w$ gehenden Strahlen $\frac{G_1\, G_2\, G_3}{\Gamma_1\, \Gamma_2\, \Gamma_3}$ der Kongruenz $K\binom{G}{\Gamma}$ können konstruiert werden als die gemeinsamen Kanten jener beiden Orthogonalkegel, welche zu Orthogonalkanten haben: 1) $wM$ und das Lot aus $w$ auf $\frac{\nu}{\mu}$, 2) $wN$ und das Lot aus $w$ auf $\frac{\mu}{\nu}$. Von der gemeinsamen, die Hauptachse $MN = \mu\nu = G_{II}$ senkrecht schneidenden Kante beider Kegel ist abzusehen.“

„Die beiden Strahlen $\frac{G_1\, G_2}{\Gamma_1\, \Gamma_2}$ der Kongruenz $K\binom{G}{\Gamma}$ in einer beliebigen Ebene $W$ können konstruiert werden als die gemeinsamen Tangenten jener beiden Parabeln, welche 1) die Spur von $\nu$ in $W$ zur Scheiteltangente und die orthogonale Projektion von $\frac{M}{N}$ auf $W$ zum Brennpunkte, 2) die Spur von $\mu$ in $W$ und die orthogonale Projektion von $\frac{N}{M}$ auf $W$ zum Brennpunkte haben. Von der die $G_{II}$ senkrecht schneidenden, sowie von der unendlich fernen gemeinsamen Parabeltangente ist abzusehen.“

Ordnen wir

$$F(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^3 - A_1 \mathfrak{p}^2 + A_2 \mathfrak{p} - A_3 = 0,$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III} \\ A_2 &= \mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III} + \mathfrak{p}_{III}\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II} + x^2 + y^2 + z^2 \\ A_3 &= \mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III} + \mathfrak{p}_I x^2 + \mathfrak{p}_{II} y^2 + \mathfrak{p}_{III} z^2 \end{aligned}\right\},$$

so folgt bzl. der Parameter $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ der drei Schrauben des $R_{III}$, deren Achsen $G_1 G_2 G_3$ durch den beliebigen Punkt $w(x, y, z)$ gehen, welche also, wie wir sagen wollen, zu $w$ gehören:

1) $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}$ für alle Punkte $w$ des Raumes konstant.

2) $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III} + \mathfrak{p}_{III}\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II} + (x^2 + y^2 + z^2)$. Die Summe der Produkte je zweier zu $w$ gehöriger Parameter unterscheidet sich von der zum Hauptpunkte $p$ gehörigen analogen Produktensumme der Hauptparameter um das Quadrat der Strecke $pw$, ist also auf allen Kugeln um $p$ konstant.

3) $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III} + \mathfrak{p}_I x^2 + \mathfrak{p}_{II} y^2 + \mathfrak{p}_{III} z^2$.

Alle Punkte $w$ des Raumes können hiernach in $\infty^2$ Kurven $\mathfrak{C}$ 4. Ordnung aufgereiht werden, längs welcher die drei Parameter $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3$ einzeln konstant bleiben. *Die* $\mathfrak{C}$ *sind die Schnitte der Kugeln* um den Hauptpunkt $p$ mit den durch $p$ gehenden *Kegeln, deren cyklische Ebenen* $\mu$, $\nu$ *sind.*

Den drei zu $w$ gehörigen Werten $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3$ von $\mathfrak{p}$ entsprechen drei Hyperboloide $F(\mathfrak{p}_1)$, $F(\mathfrak{p}_2)$, $F(\mathfrak{p}_3)$, welche sich in der *durch* $w$ gehenden $\mathfrak{C}$ durchsetzen. Die Geraden durch $w$ von der anderen Schar jedes dieser drei Hyperboloide sind die zu $w$ gehörigen Achsen $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ in $P_{III}$. Die Tangentialebenen $G_1 \Gamma_1$, etc. der drei zu $w$ gehörigen Hyperboloide schneiden sich in der Tangente $C$ an die $\mathfrak{C}$ des $w$.

Die drei zu einem beliebigen *Punkte* $w$ gehörigen *Achsen* $G_1 G_2 G_3$ des $R_{III}$ und die drei durch $w$ gehenden Achsen $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ des $P_{III}$ *bilden Polarecken,* wobei die nicht zu einander senkrechten Kanten beider Ecken zu entgegengesetzt gleichen Parametern gehören; denn sonst könnte nicht jede der drei zu $w$ gehörigen Schrauben des $R_{III}$ zu jeder der drei ebensolchen des

*Zwei der Hyperboloide* $F(\mathfrak{p})$ *berühren eine beliebige Ebene* $W$, denn in $W$ fallen zwei Kanten $\genfrac{}{}{0pt}{}{G_1\, G_2}{\Gamma_1\, \Gamma_2}$ des in $\genfrac{}{}{0pt}{}{R_{III}}{P_{III}}$ enthaltenen $\genfrac{}{}{0pt}{}{R_{II}}{P_{II}}$, dessen Cylindroidkanten parallel $W$ sind.[1]) Jede der beiden $G$ mufs zu einer der beiden $\Gamma$ normal sein und in $R_{III}$ den entgegengesetzt gleichen Parameter besitzen als die andere

1) Dies erkennt man auch aus der in $\mathfrak{p}$ quadratischen Gleichung der $F(\mathfrak{p})$ in Ebenenkoordinaten $u$, $v$, $w$, $1$:

$$(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{III})u^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)v^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II})w^2 + 1 = 0$$

oder
$$\mathfrak{p}^2(u^2 + v^2 + w^2) - \mathfrak{p}[(\mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})u^2 + (\mathfrak{p}_{III} + \mathfrak{p}_I)v^2 + (\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II})w^2]$$
$$+ [\mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III}u^2 + \mathfrak{p}_{III}\mathfrak{p}_I v^2 + \mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II}w^2 + 1] = 0,$$

welche für jede gegebene Ebene die beiden berührenden $F(\mathfrak{p})$ liefert.

$P_{III}$ reziprok sein. Diese sechs Achsen liegen auf einem Kegel 2. Ordnung und die gemeinsamen Höhenebenen beider Polarecken schneiden sich in der Geraden $C$ des Punktes $w$.

$\Gamma$ in $P_{III}$; sonst könnten nicht die zwei durch $G_1 G_2$ repräsentierten Schrauben gegen die zu $\Gamma_1 \Gamma_2$ gehörigen reziprok sein. Da also $G_1 G_2$ und $\Gamma_1 \Gamma_2$ Normalwinkel sind, schneiden sich die zu einer und die zur anderen, $W$ *berührenden* Fläche $F(\mathfrak{p})$ gehörigen Geraden in $W$ *unter gleichem Winkel.*

Alle $F(\mathfrak{p})$ haben aufser den vier Kreispunkten der beiden Basisebenen $\mu$, $\nu$ noch die vier Lote der Basisbüschel als Fokalachsen gemeinsam, d. h. alle $F(\mathfrak{p})$ berühren die vier Paare konjugiert-komplexer Tangentialebenen des absoluten Kugelkreises, welche durch die in $M$ und $N$ zu $\mu$ und $\nu$ errichteten Senkrechten gelegt werden können.

Die Koordinaten $u$, $v$, $w$, 1 dieser Tangentialebenen erhält man nämlich, wenn man die Koeffizienten von $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p}$, 1 der in Ebenenkoordinaten geschriebenen Gleichung (S. 99 Anm.) des Systems $F(\mathfrak{p})$ gleich Null setzt.

$$\left.\begin{array}{l} u^2 + v^2 + w^2 = 0 \\ (\mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}) u^2 + (\mathfrak{p}_{III} + \mathfrak{p}_I) v^2 + (\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}) w^2 = 0 \\ \mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III} u^2 + \mathfrak{p}_{III}\mathfrak{p}_I v^2 + \mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II} w^2 = -1 \end{array}\right\} \text{d. h.} \quad \begin{array}{l} u^2 = \dfrac{1}{(\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_I)(\mathfrak{p}_I - \mathfrak{p}_{II})} \\ v^2 = \dfrac{1}{(\mathfrak{p}_I - \mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})} \\ w^2 = \dfrac{1}{(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_I)} \end{array}$$

Diese Gleichungen lehren, dafs die gemeinsamen Tangentialebenen aller $F(\mathfrak{p})$ aus einer von ihnen durch Spiegelung an den Symmetrieebenen gewonnen werden können, z. B. aus jener, welche auf den Achsen $G_I$, $G_{II}$, $G_{III}$ die Stücke

$$+\sqrt{(\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_I)(\mathfrak{p}_I - \mathfrak{p}_{II})}, \quad +\sqrt{(\mathfrak{p}_I - \mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})}, \quad +\sqrt{(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_I)}$$

abschneidet und daher die durch das Zentrum $M(0, +\sqrt{\mathfrak{p}_I - \mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})}, 0)$ gelegte und zu einer Basisebene senkrechte reelle Gerade (*Fokalachse*) enthält.

Der obige Satz kann auch so ausgesprochen werden:

„Alle Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ projizieren sich orthogonal auf eine der Basisebenen $\mu$, $\nu$ in ein (doppelt zu zählendes) Konfokalsystem von Kegelschnitten mit den Zentren $M$, $N$ der Basisbüschel als gemeinsamen Brennpunkten.“

Dies folgt auch ohne Zuhilfenahme von Ebenenkoordinaten aus einer Konstruktion der bezüglich $\mu$, $\nu$ konzyklischen Flächen $F(\mathfrak{p})$, die sich mit Rücksicht darauf ergiebt, dafs jede $F(\mathfrak{p})$ zu den Symmetrie-

ebenen der zwei Basisbüschelpaare symmetrisch und von Achsen des Schraubenbündels erfüllt ist, welche als kürzeste Transversale über je einem Strahle eines der beiden Büschel eines Basispaares konstruiert werden können:

Es seien $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei Kreise um den Hauptpunkt $p$ (Mittelpunkt von $MN$), von gleichem, sonst *beliebigem* Radius, und bzw. in den Ebenen $\mu$ und $\nu$ gelegen; sei ferner $P_1$ ein z. B. auf $\mathfrak{K}_1$ variabler Punkt, so erfüllen die zwei durch $P_1$ gehenden zu $P_1M$ senkrechten Transversalen von $\mathfrak{K}_2$ (eine sei $P_1P_2$, mit dem Punkte $P_2$ auf $\mathfrak{K}_2$; die andere $P_1P_2'$) je eine Schar gleicher Art eines der beiden durch $\mathfrak{K}_1$ und durch $\mathfrak{K}_2$ gehenden Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$. Die z. B. zu $P_1P_2$ durch $P_2$ in $\nu$ gelegte Senkrechte geht nämlich durch $N$; daher ist $P_1P_2$ eine kürzeste Transversale über je einem Strahle $P_1M$ des Büschels $M\mu$ und $P_1N$ des Büschels $N\nu$, also eine Erzeugende eines der beiden durch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gehenden Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$.

$P_1P_2$ projiziert sich daher orthgonal auf $\mu$ in das durch $P_1$ zu $P_1M$ in $\mu$ gelegte Lot, berührt also stets den Kegelschnitt in $\mu$, welcher $M$ und $N$ zu Brennpunkten hat, wenn $P_1$ auf $\mathfrak{K}_1$ variiert; dieser Kegelschnitt ist hierbei die orthogonale Projektion des von $P_1P_2$ erfüllten Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$, welches $\mu$ und $\nu$ in $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ schneidet. (In denselben projiziert sich noch eine zweite durch dieselben Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gehende Fläche des Systems, da man statt des Punktes $P_2$ auch $P_2'$ auf $\mathfrak{K}_2$ hätte nehmen können.)

Aufser den auf Hyperboloiden $F(\mathfrak{p})$ angeordneten zu bestimmten Parameter gehörigen Achsen $\frac{G}{\Gamma}$ des $\frac{R_{\rm III}}{P_{\rm III}}$ sind noch alle jene zu unbestimmtem Parameter gehörige Geraden $\frac{g}{\gamma}$ (Staudts 1. Art, vgl. S. 80 Anm.) als Achsen im Schraubenbündel anzusehen, welche aus den in jedem der zwei Basisbüschel $\frac{M\mu,\ N\nu}{M\nu,\ M\mu}$ des $\frac{R_{\rm III}}{P_{\rm III}}$ vorkommenden zirkulären Strahlen durch Parallelverschiebung entlang des Büschellotes hervorgehen.

Nur in einem der konzyklischen sphärischen Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ (S. 99) können sich die $F(\mathfrak{p})$ durchsetzen, entlang einer $\mathfrak{C}$ wird also auch die *von den* $F(\mathfrak{p})$ *umhüllte Brennfläche der Kongruenz* $K\left(\frac{G}{\Gamma}\right)$, nämlich $\left(\text{gemäfs } F(\mathfrak{p}) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{p}} = 0\right)$ die Fläche 6. Ordnung[1])

$$4A_1^3A_3 - A_1^2A_2^2 - 18A_1A_2A_3 + 27A_3^2 + 4A_2^3 = 0$$

---

1) 6. O. und 4. *Klasse*, wie sich durch Nullsetzen der Diskriminante der in $\mathfrak{p}$ quadratischen Gleichung (S. 99, Anm. 1) ergiebt.

E. W. Hyde hat in den Annals of Mathematics, II. ser. vol. 2, No. 4 (Mass.,

(mit dem absoluten Kugelkreis als Kuspidalkurve) von *jeder* $F(\mathfrak{p})$ berührt. Diese Berührungskurve $\mathfrak{C}$ ist gleichzeitig Schnittrest der Brennfläche mit einem anderen Hyperboloide $F(\mathfrak{p}')$. *In jedem Punkte* $w$ *einer beliebigen solchen* $\mathfrak{C}$ *der Brennfläche entarten* die oben erwähnten *Polarecken*, indem zwei von den zu $w$ gehörigen drei Achsen $\frac{G}{\Gamma}$ in zwei unendlich benachbarte Gerade $\frac{G_0}{\Gamma_0}$ einer bestimmten Ebene (Brennebene von $\frac{G_0}{\Gamma_0}$) zusammenrücken. Außer diesen Geraden $\frac{G_0}{\Gamma_0}$ des Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ durch $w$ geht durch diesen Punkt noch eine Gerade $\frac{G'}{\Gamma'}$, eine $\frac{R_{III}}{P_{III}}$-Achse mit dem Parameter $\frac{\mathfrak{p}'}{\pi'}$, wobei $\mathfrak{p}' + \pi' = 0$ sein muſs, da $G'$ und $\Gamma'$ jenem Hyperboloide $F(\mathfrak{p}')$ zugehören, welches auſser den beiden unendlich benachbarten $F(\mathfrak{p})$ noch zu $w$ gehört. Die zum Parametar $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ $(\mathfrak{p} + \pi = 0)$ gehörigen $\frac{G_0}{\Gamma_0}$ der $F(\mathfrak{p})$ müssen zur Ebene $\frac{\Gamma_0 \Gamma'}{G_0 G'}$ senkrecht stehen und zu $\frac{G'}{\Gamma'}$ senkrechte Brennebenen besitzen, da sonst nicht jede der beiden in der bzl. Brennebene unendlich benachbarten zu $w$ gehörigen Schrauben $\frac{G_0(\mathfrak{p})}{\Gamma_0(\pi)}$ sowie die $\frac{G'(\mathfrak{p}')}{\Gamma'(\pi')}$ zu jeder analogen $\frac{\Gamma_0(\pi)}{G_0(\mathfrak{p})}$ und zu der $\frac{\Gamma'(\mathfrak{p}')}{G'(\mathfrak{p}')}$ reziprok sein könnte.

Hiernach ist jeder der konzyklischen sphärischen Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ der Brennfläche „Orthogonalpunktskurve“ des Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$, welches entlang $\mathfrak{C}$ die Brennfläche berührt und zugleich „Grenzpunktskurve“ jenes anderen Hyperboloides $F(\mathfrak{p}')$, welches (die Brennfläche entlang einer anderen $\mathfrak{C}'$ berührt und) $\mathfrak{C}$ zum Restschnitte mit der Brennfläche hat. Unter dem Kummerschen „Grenzpunkt“ eines Kongruenzstrahles $\frac{G'}{\Gamma'}$ ist hierbei, wie gebräuchlich, einer jener beiden Punkte verstanden, *zwischen* welchen die kürzesten Transversalen über $\frac{G'}{\Gamma'}$ und den unendlich benachbarten Strahlen der Kongruenz $\frac{K(G)}{K(\Gamma)}$, (d. h. jene senkrechten Transversalen $\frac{\Gamma}{G}$ der $\frac{G'}{\Gamma'}$, welche das Achsencylindroid jenes $\frac{P_{II}}{R_{II}}$ in $\frac{P_{III}}{R_{III}}$ erfüllen, dessen Hauptebene zu $\frac{G'}{\Gamma'}$ senkrecht steht) *reell* sind, *in* welchen also selbst die erwähnten kürzesten Transversalen (in die Zwickkanten z. B. $\frac{\Gamma_0}{G_0}$ des erwähnten Cylindroides) zusammen-

---

1901) diese Fläche untersucht und anschauliche Figuren zu derselben geliefert. (Insb. Fig. 2 der Abhandlung: On a surface of the sixth order which is touched by the axes of all screws reciprocal to three given screws.)

rücken, und *aufserhalb* welcher diese Kürzesten (Cylindroidkanten) imaginär sind. [Über die Beziehung zwischen den Radien der die „Orthogonalpunktskurve" eines beliebigen Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ liefernden Kugel Monges und der anderen, die „Grenzpunktskurve" des $F(\mathfrak{p})$ ausschneidenden Kugel etc. vgl. die zitierte Abhandlung von E. Waelsch.]

Die „Brennfläche" und die „Grenzfläche" von $K\left(\frac{G}{\Gamma}\right)$ sind identisch; jeder Strahl $\frac{G'}{\Gamma'}$ dieser Kongruenz, dessen Grenzpunkte durch $\frac{\Gamma_0}{G_0}$ und die andere Zwickkante des obigen Cylindroides *getroffen* werden, *berührt* die Brennfläche aufserdem noch *in jenen zwei Punkten*, seinen Brennpunkten, in welchen er von den *im Reziprokalgebiet zum entgegengesetzt gleichen Parameter* gehörigen und ihn *senkrecht schneidenden* Achsen (Kanten des erwähnten Cylindroides) getroffen wird; denn jede der letzteren spielt zusammen mit $\frac{G'}{\Gamma'}$ dieselbe Rolle wie oben die durch den Punkt $w$ gehenden Zwickkanten $\frac{\Gamma_0}{G_0}$ und $\frac{G_0}{\Gamma_0}$, sie bestimmt mit $\frac{G'}{\Gamma'}$ die Tangentialebene der Brennfläche im betreffenden Brennpunkte. Die Brennebene jedes Brennpunktes der $\frac{G'}{\Gamma'}$ steht senkrecht zur zweiten Cylindroidkante, welche aufser der obigen noch durch den Brennpunkt geht. Die ersteren beiden Grenzpunkte, durch die zum Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ des betreffenden Strahles gehörige „Grenzpunktskugel" getroffen, und die auf der konzentrischen Kugel Monges liegenden „Brennpunkte" (oder „Orthogonalpunkte" bzl. $F(\mathfrak{p})$) sind symmetrisch bezüglich des Punktes $m$, des „Mittelpunktes" (Hauptpunkt des obigen Cylindroides), in welchen sich der Hauptpunkt $p$ des $\frac{R_{\text{III}}}{P_{\text{III}}}$ orthogonal auf den Kongruenzstrahl projiziert. Die von diesen Punkten $m$ der Kongruenzstrahlen erfüllte „Mittelfläche" soll alsbald angegeben werden, vorerst wollen wir jedoch die *Beziehung zwischen der Richtung einer Schraubenachse* des $\frac{R_{\text{III}}}{P_{\text{III}}}$ *und dem Parameter* $\frac{\mathfrak{p}}{\pi}$ derselben kennen lernen. Die Achsen $\Gamma$ des $P_{\text{III}}$ gehören zu Schrauben dieses Gebietes, deren Parameter $\pi$ entgegengesetzt gleich ist jenem ($\mathfrak{p}$) der parallelen Achse in $R_{\text{III}}$, sodafs die Untersuchung bzl. $R_{\text{III}}$ genügt:

Nach dem Schnittsatze linearer Gebiete giebt es zu jeder Schraube $L$ des $R_{\text{III}}$ in letzterem ein reziprokes $R_{\text{II}}$. Wir geben den Hauptschrauben $L_i$ ($i = \text{I, II, III}$) des $R_{\text{III}}$ den Inhalt 1, sodafs ihre Stablänge $\bar{l}_i$ die „Charakteristik" der Hauptschrauben wird. Aus der Entwickelung S. 68 etc. über charakteristische Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ eines $R_{\text{III}}$ folgt, dafs die Mittelpunktsfläche 2. Ordnung mit den auf die Achsen $G_i$ der $L_i$

fallenden Halbachsen $l_i = \pm\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{p}_i}}$ ($\mathfrak{p}_i$ Hauptparameter) eine für $R_{\mathrm{III}}$ *charakteristische Fläche* 2. Ordnung ($\mathfrak{K}$) wird:

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} x^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} y^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} z^2 = 1,$$

indem *jeder Halbmesser $l$ von* ($\mathfrak{K}$) — welcher die Richtkosinus $c_1 c_2 c_3$ haben möge — Charakteristik jener Schraube $L$ des $R_{\mathrm{III}}$ wird, deren Achse zu ihm parallel ist, so daſs sich $\mathfrak{p} = \frac{1}{l^2}$ als Parameter für letztere ergiebt. Das zu $L$ reziproke in $R_{\mathrm{III}}$ enthaltene Schraubenbüschel $R_{\mathrm{II}}$ hat die zu $\bar{l}$ bzl. ($\mathfrak{K}$) konjugierte Ebene $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} c_1 x + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} c_2 y + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} c_3 z = 0$ zur Direktionsebene. Nebenbei folgt hieraus oder aus dem Satze: „Die Summe der Quadrate dreier konjugierter Halbmesser einer Fläche ($\mathfrak{K}$) ist konstant“:

„Die Summe der Reziprokwerte der Parameter dreier korreziproker Schrauben des $R_{\mathrm{III}}$ ist konstant:“

$$\frac{1}{\mathfrak{p}_1} + \frac{1}{\mathfrak{p}_2} + \frac{1}{\mathfrak{p}_3} = \frac{1}{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}} + \frac{1}{\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}},$$

da die zugehörigen Schrauben die parallelen konjugierten drei Halbmesser von ($\mathfrak{K}$) zu Charakteristiken haben. Hieran läſst sich der H. Everettsche Beweis des Satzes anschlieſsen: „Die Summe der Reziprokwerte der Parameter ($\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_6$) von 6 korreziproken Schrauben des Raumes ($R_{\mathrm{VI}}$) ist Null“: 3 von den 6 Schrauben bestimmen ein $R_{\mathrm{III}}$, die übrigen dessen Reziprokalgebiet $P_{\mathrm{III}}$. Also gilt auſser obiger Gleichung noch $\frac{1}{\mathfrak{p}_4} + \frac{1}{\mathfrak{p}_5} + \frac{1}{\mathfrak{p}_6} = \frac{1}{\pi_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{\pi_{\mathrm{II}}} + \frac{1}{\pi_{\mathrm{III}}}$, wobei die $\pi_i = -\mathfrak{p}_i$ die Hauptparameter des $P_{\mathrm{III}}$ sind. Die angeschriebenen Gleichungen liefern den behaupteten Satz $\frac{1}{\mathfrak{p}_1} + \cdots + \frac{1}{\mathfrak{p}_6} = 0$.

Aus diesem Satze und dem für korreziproke Schrauben eines $\frac{R_{\mathrm{II}}}{P_{\mathrm{II}}}$ (S. 70) abgeleiteten $\frac{1}{\mathfrak{p}_1} + \frac{1}{\mathfrak{p}_2} = \mathrm{const.}$ läſst sich für „4 korreziproke Schrauben eines $\frac{R_{\mathrm{IV}}}{P_{\mathrm{VI}}}$“ nachweisen, daſs die „Summe der Reziprokwerte der Parameter derselben konstant“ ist; $\frac{P_{\mathrm{II}}}{R_{\mathrm{II}}}$ braucht zu diesem Zwecke nur als Reziprokalbüschel von $\frac{R_{\mathrm{IV}}}{P_{\mathrm{IV}}}$ angenommen zu werden. Analog bzl. der Parameter von 5 korreziproken Schrauben eines Schraubengewebes. — Die Summe der Parameter, welche zu allen Tripeln normaler $R_{\mathrm{III}}$-Achsen gehören, ist konstant, d. h. es gilt

$$\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}},$$

wenn $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3$ Parameter dreier Schrauben des $R_{\text{III}}$ vorstellen, *deren Achsen auf einander senkrecht stehen*, wie sich daraus folgern läſst, daſs in jedem $R_{\text{II}}$ die Summe der Parameter zweier Schrauben konstant ist, wenn deren Achsen zu einander normal sind. —

Statt durch ($\mathfrak{K}$) die Parameter der Schrauben aller Achsenrichtungen darzustellen, kann man von einem Punkte $p$ aus parallel zur Achse jeder $R_{\text{III}}$-Schraube, deren Parameter $\mathfrak{p} = \frac{1}{\bar{l}^2}$ abtragen und die als Ort der sich ergebenden Endpunkte gewonnene „Parameterfläche" ($\mathfrak{P}$) zur Veranschaulichung der Parameterverteilung benutzen. (Vgl. S. 69.) Auf den durch $p$ mit den Richtkosinus $c_1, c_2, c_3$ $(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1)$ gelegten Strahl entfällt der aus ($\mathfrak{K}$) $\mathfrak{p}_{\text{I}} x^2 + \mathfrak{p}_{\text{II}} y^2 + \mathfrak{p}_{\text{III}} z^2 = 1$ ableitbare Parameter

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\text{I}} c_1^2 + \mathfrak{p}_{\text{II}} c_2^2 + \mathfrak{p}_{\text{III}} c_3^2 \;\Big(x = \lambda c_1, \quad y = \lambda c_2, \quad z = \lambda c_3; \quad \lambda^2(\mathfrak{p}_{\text{I}} c_1^2 + \cdots) = 1;$$

$$x^2 = \frac{c_1^2}{\mathfrak{p}_{\text{I}} c_1^2 + \cdots} \text{ etc.}; \quad \bar{l}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\mathfrak{p}_{\text{I}} c_1^2 + \cdots} = \frac{1}{\mathfrak{p}}\Big),$$

so daſs *die Gleichung von* ($\mathfrak{P}$), wobei von hier ab $x$, $y$, $z$ die Koordinaten der Punkte dieser Fläche bedeuten sollen, also $\mathfrak{p} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $c_1^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ etc. zu setzen ist, lautet:

$$\boldsymbol{(x^2 + y^2 + z^2)^3 - (\mathfrak{p}_{\text{I}} x^2 + \mathfrak{p}_{\text{II}} y^2 + \mathfrak{p}_{\text{III}} z^2)^2 = 0}.$$

Da $\mathfrak{p}$ als Länge der Projektion einer Strecke $(\mathfrak{p}_{\text{I}} c_1, \mathfrak{p}_{\text{II}} c_2, \mathfrak{p}_{\text{III}} c_3)$ auf die Strecke $(c_1, c_2, c_3)$ aufgefaſst werden kann, ergiebt sich folgende Konstruktion der Parameterfläche ($\mathfrak{P}$):

„Es sei $\mathfrak{K}_i$ $(i = \text{I, II, III})$ die um $p$ mit dem Radius $\mathfrak{p}_i$ beschriebene Kugel und es treffe ein beliebiger Halbmesser jede $\mathfrak{K}_i$ im Punkte $\mathfrak{P}_i$ (wenn die $\mathfrak{p}_i$ gleiche Vorzeichen haben; hat einer dieser drei Hauptparameter ein anderes Vorzeichen als die beiden anderen, so ist die Verlängerung des Halbmessers über $p$ hinaus mit der betreffenden $\mathfrak{K}_i$ zu schneiden); mögen sich die drei durch $\mathfrak{P}_i$ senkrecht zu den Hauptachsen $G_i$ des $R_{\text{III}}$ gelegten Ebenen in $M$ schneiden ($OM$ hat die Projektion $\mathfrak{p}_{\text{I}} c_1$, $\mathfrak{p}_{\text{II}} c_2$, $\mathfrak{p}_{\text{III}} c_3$ auf die Hauptachsen), so ist die *orthogonale Projektion* von $M$ auf den benutzten Halbmesser ein Punkt von ($\mathfrak{P}$) und *erfüllt diese Fläche*, wenn der Halbmesser durch $p$ variiert."

Aus einer so konstruierten Parameterfläche ($\mathfrak{P}$) werden alle zu einer bestimmten Achsenkongruenz $K\binom{G}{\Gamma}$ gehörigen durch Veränderung aller von $p$ abgetragenen Radienvektoren um konstante Stücke gewonnen (vgl. S. 63). Die so erhaltene Schar solcher ($\mathfrak{P}$) repräsentiert

die bei gegebener Achsenkongruenz möglichen Parameterverteilungen anschaulicher als das Büschel

$$(\mathfrak{p}_{\rm I} + \lambda)x^2 + (\mathfrak{p}_{\rm II} + \lambda)y^2 + (\mathfrak{p}_{\rm III} + \lambda)z^2 = 1 \quad (\lambda \text{ beliebig})$$

der zugehörigen $(\mathfrak{K})$, welches auch den zum absoluten Kugelkreis führenden Kegel enthält.

Die Achsenkongruenzen $K(G)$ des $R_{\rm III}$ und $K(\Gamma)$ des $P_{\rm III}$ sind bzl. des Hauptpunktes $p$ und der Hauptebenen $G_{\rm I} G_{\rm II}$ etc. symmetrisch, daher sind es die beiden zugehörigen Kummerschen Mittelflächen auch; wir brauchen also wieder nur $R_{\rm III}$ zu betrachten. Jede Schraube $L$ des $R_{\rm III}$ (mit dem Inhalte 1) wird sich, weil aus den drei Hauptschrauben $L_i$ linear ableitbar, als Summe eines Halbmesserstabes $l$ (Richtkosinus $c_1$, $c_2$, $c_3$) der charakteristischen Fläche 2. Ordnung $(\mathfrak{K})$ $(\mathfrak{p}_{\rm I} x^2 + \cdots = 1)$ und eines Feldes der bzl. $(\mathfrak{K})$ zu $l$ konjugierten Ebene $\mathfrak{E}$ $(\mathfrak{p}_{\rm I} c_1 x + \cdots = 0)$ darstellen lassen (vgl. S. 71); um von dieser Darstellungsform der $L$ zur kanonischen überzugehen, brauchen wir nur den durch $p$ gehenden Stab $l$ in der in $\mathfrak{E}$ gelegenen zu $l$ senkrechten Richtung um ein Stück $pm$ zu verschieben. $m$ erfüllt hierbei die gesuchte Mittelfläche, wenn $l$ alle möglichen Halbmesser bei $(\mathfrak{K})$ einnimmt. Die den Determinanten der Matrix (der Projektionen des Lotes zu $\mathfrak{E}$ und des $l$)

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{p}_{\rm I} c_1, & \mathfrak{p}_{\rm II} c_2, & \mathfrak{p}_{\rm III} c_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}$$

proportionalen Richtkosinus von $pm$ werden:

$$\frac{c_2 c_3 (\mathfrak{p}_{\rm II} - \mathfrak{p}_{\rm III})}{\sqrt{c_2^2 c_3^2 (\mathfrak{p}_{\rm II} - \mathfrak{p}_{\rm III})^2 + \cdots}}, \cdots, \cdots$$

und die Länge $\varrho$ des Verschiebungsstückes mufs gemäfs (S. 52) $\varrho = \mathfrak{p} \operatorname{tg} \alpha$ sein, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\rm I} c_1^2 + \mathfrak{p}_{\rm II} c_2^2 + \mathfrak{p}_{\rm III} c_3^2$ den Parameter der Schraube $L$ und $\alpha$ den Winkel von $l$ mit dem Lote zu $\mathfrak{E}$ bedeutet. Mit Rücksicht auf

$$\cos \alpha = \frac{\mathfrak{p}_{\rm I} c_1^2 + \mathfrak{p}_{\rm II} c_2^2 + \mathfrak{p}_{\rm III} c_3^2}{\sqrt{\mathfrak{p}_{\rm I}^2 c_1^2 + \mathfrak{p}_{\rm II}^2 c_2^2 + \mathfrak{p}_{\rm III}^2 c_3^2}} = \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathfrak{p}_{\rm I}^2 c_1^2 + \mathfrak{p}_{\rm II}^2 c_2^2 + \mathfrak{p}_{\rm III}^2 c_3^2}} \quad \text{und}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}_{\rm I}^2 c_1^2 + \cdots}} \sqrt{c_2^2 c_3^2 (\mathfrak{p}_{\rm II} - \mathfrak{p}_{\rm III})^2 + \cdots} \quad \text{wird} \quad \varrho = \sqrt{c_2^2 c_3^2 (\mathfrak{p}_{\rm II} = \mathfrak{p}_{\rm III})^2 + \cdots}$$

und wir erhalten als Projektionen des Verschiebungsstückes $\varrho = pm$:

$$x = c_2 c_3 (\mathfrak{p}_{\rm II} - \mathfrak{p}_{\rm III}), \quad y = c_3 c_1 (\mathfrak{p}_{\rm III} - \mathfrak{p}_{\rm I}), \quad z = c_1 c_2 (\mathfrak{p}_{\rm I} - \mathfrak{p}_{\rm II}),$$

woraus mit Hilfe von $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ $c_1, c_2, c_3$ zu eliminieren ist

$$\left.\begin{aligned} c_2^2 c_3^2 (\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})^2 &= x^2 \\ c_3^2 c_1^2 (\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{I})^2 &= y^2 \\ c_1^2 c_2^2 (\mathfrak{p}_{I} - \mathfrak{p}_{II})^2 &= z^2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} c_1^2 &= \frac{\lambda}{x^2}(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})^2 \\ c_2^2 &= \frac{\lambda}{y^2}(\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{I})^2, \\ c_3^2 &= \frac{\lambda}{z^2}(\mathfrak{p}_{I} - \mathfrak{p}_{II})^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\lambda\left[\frac{(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})}{x^2} + \cdots\right] = 1, \quad \lambda = \frac{x^2 y^2 z^2}{(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})^2 y^2 z^2 + \cdots}$$

$$c_1^2 c_2^2 c_3^2 [(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})^2 + \cdots] = c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2 + c_3^2 z^2$$

$$\frac{\lambda^3}{x^2 y^2 z^2}(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})^2 (\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{I})^2 (\mathfrak{p}_{I} - \mathfrak{p}_{II})^2 [(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})^2 + \cdots] = \lambda[(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})^2 + \cdots]$$

$$\lambda = \frac{\pm\, xyz}{(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{I})(\mathfrak{p}_{I} - \mathfrak{p}_{II})};$$

es ergeben sich als Mittelflächen der Kongruenzen $K(G)$ und $K(\Gamma)$ die Steinerschen Flächen 4. Ordnung

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{xyz(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{I})(\mathfrak{p}_{I} - \mathfrak{p}_{II})} \\ &\boldsymbol{\mp [(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})^2 y^2 z^2 + (\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{I}) z^2 x^2 + (\mathfrak{p}_{I} - \mathfrak{p}_{II}) x^2 y^2] = 0.} \end{aligned}$$

(Vgl. Kummer, Schröter, Cayley in Crelles Journal Bd. 64, 1864, etc.)[1] Ein affines Bild dieser Fläche ist in L. Brills Verlage in Darmstadt (9. Serie Nr. 3) als Modell erhältlich.

Ist speziell $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$, so sind die $F(\mathfrak{p})$ Rotationshyperboloide, die cyklischen Ebenen $\mu$, $\nu$, sowie die Mittelfläche der Achsenkongruenzen $K\binom{G}{\Gamma}$ des $R_{III}$ und $P_{III}$ fallen in die Hauptebene $G_I G_{II}$, die Zentren $M$, $N$ in deren Hauptpunkt $p$. Die Brennfläche wird eine Rotationsfläche[2]), ebenso die charakteristische Fläche 2. Ordnung ($\mathfrak{K}$) und die Parameterfläche ($\mathfrak{P}$). $K(G)$ ist erfüllt von jenen Strahlen, welche aus den Kanten des durch die Schraubungen $G_I(\mathfrak{p}_I)$ und $G_{III}(\mathfrak{p}_{III})$ bestimmten Cylindroides durch Rotation um $G_{III}$ gewonnen werden können.

Insbesondere für $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = \mathfrak{p}_{III}$ gehen alle Achsen des $R_{III}$ durch den Hauptpunkt $p$ und haben gleiche Parameter $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I$. Reelle Schrauben von anderem Parameter giebt es nicht; das Liniengeripppe $r_{III}$ ist eines der Systeme der Erzeugenden (Staudts Gerade 2. Art) der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + \mathfrak{p}_I^2 = 0$ mit dem imaginären Radius, dessen Quadrat $(-\mathfrak{p}_I^2)$; jede zirkuläre zu beliebigem Parameter gehörige Gerade $g$

---

1) Näheres in Ernesto Pascal „Repertorio di Matematiche superiori: II. Geometria“ Milano 1900, p. 474 etc. „La superficie romana di Steiner“.

2) Vgl. Fig. 3 der (S. 101, Anm. 1) angeführten Abhandlung E. W. Hydes.

v. Standts 1. Art, welche auf einer Tangentialebene des Kegels $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ liegt, kann (vgl. S. 80) als „Achse“ einer solchen Linie angesehen werden. Das andere System der Erzeugenden dieser Kugel bildet das Liniengerippe $\varrho_{III}$ des reziproken $P_{III}$. Zu $P_{III}$ gehören als Achsen aufser den zirkulären Achsen $g$ des $\varrho_{III}$ wiederum die Strahlen des Bündels $p$, aber mit dem Parameter $\pi = -\mathfrak{p} = -\mathfrak{p}_I$ behaftet.

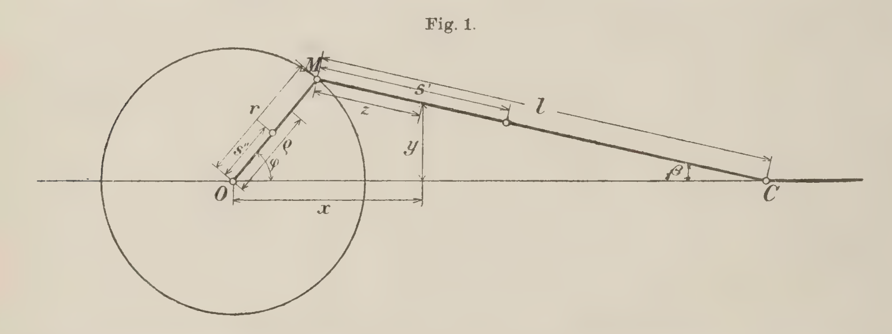
---

# Zur geometrischen Behandlung des Massenausgleiches bei vierkurbeligen Schiffsmaschinen.

Von F. Jung in Prag.

Den Ausgleich der Massenwirkungen bei mehrkurbeligen Schiffsmaschinen haben nach Schlick besonders Schubert und Lorenz eingehend behandelt und zwar vornehmlich auf rechnerischem Wege.[1])

Fig. 1.




Im Folgenden sollen einige Sätze über Vierkurbelmaschinen, welche die Genannten gefunden haben, auf geometrischem Wege unter möglichst beschränkter Verwendung von Rechnung abgeleitet werden. Einzelne ergeben sich hiebei in besonders einfacher Gestalt. Die Sätze auf S. 115 und 120 scheinen in dieser Form noch nicht gegeben zu sein.

Als Ausgangspunkt möge der Ausdruck für die Bewegungsgröfse und den Massendruck eines Getriebes in der Gleitbahnrichtung dienen. Die Aufstellung desselben werde im Anschlusse an Prof. Lorenz zunächst vorgenommen. Die Gleitbahn gehe durch den Drehpunkt $O$ (Fig. 1)

1) Vergl. Lorenz, Dynamik der Kurbelgetriebe, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1900, auch selbständig, Leipzig, Teubner, 1901; Schubert, Theorie des Schlickschen Massenausgleichs, Leipzig, Göschen, 1901.

der Kurbel und sei zur $x$-Achse gewählt, ihre Normale durch $O$ zur $y$-Achse, die positiven Achsenrichtungen nach rechts und oben. Für einen Punkt der Schubstange ist

$$x = r\cos\varphi + z\cos\beta,$$

wo die Buchstaben die aus der Figur ersichtliche Bedeutung haben ($z$ ist vom Punkte $M$ aus gerechnet). Wird der Winkel $\beta$ durch $\varphi$ ausgedrückt mittels der Beziehung

$$r\sin\varphi = l\sin\beta,$$

so hat man

$$x = r\cos\varphi + z\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2},$$

und die Wurzel nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe verwandelt giebt

$$x = r\cos\varphi + z\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2 - \frac{1}{2^3}\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^4 - \frac{1}{2^4}\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^6 - \cdots\right].$$

Ersetzt man hierin die Potenzen von $\sin\varphi$ durch Ausdrücke in den Vielfachen von $\varphi$ mit Hilfe der Formeln

$$\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi),$$

$$\sin^4\varphi = \tfrac{1}{2^3}(3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi),$$

$$\sin^6\varphi = \tfrac{1}{2^5}(10 - 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi - \cos 6\varphi),$$

u. s. w., so folgt

$$\begin{aligned}
x = r\cos\varphi + z\Big\{1 &- \left[\tfrac{1}{2^2}\left(\tfrac{r}{l}\right)^2 + \tfrac{3}{2^6}\left(\tfrac{r}{l}\right)^4 + \tfrac{10}{2^9}\left(\tfrac{r}{l}\right)^6 + \cdots\right] \\
&+ \cos 2\varphi\left[\tfrac{1}{2^2}\left(\tfrac{r}{l}\right)^2 + \tfrac{4}{2^6}\left(\tfrac{r}{l}\right)^4 + \tfrac{15}{2^9}\left(\tfrac{r}{l}\right)^6 + \cdots\right] \\
&- \cos 4\varphi\left[\tfrac{1}{2^6}\left(\tfrac{r}{l}\right)^4 + \tfrac{6}{2^9}\left(\tfrac{r}{l}\right)^6 + \cdots\right] \\
&+ \cos 6\varphi\left[\tfrac{1}{2^9}\left(\tfrac{r}{l}\right)^6 + \cdots\right] \\
&- \cdots\Big\} \\
= r\cos\varphi + z(c_0 &+ c_1\cos 2\varphi - c_2\cos 4\varphi + c_3\cos 6\varphi \cdots),
\end{aligned}$$

wo $c_0, c_1, \ldots$ die Ausdrücke bedeuten, mit welchen $\cos 0\varphi, \cos 2\varphi, \ldots$ multipliziert erscheinen.

Die Kurbel drehe sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit $\varepsilon$, dann ist

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\varphi\cdot\varepsilon + z(-c_1\sin 2\varphi\cdot 2\varepsilon + c_2\sin 4\varphi\cdot 4\varepsilon - c_3\sin 6\varphi\cdot 6\varepsilon + \cdots),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -r\cos\varphi\cdot\varepsilon^2 + z(-c_1\cos 2\varphi\cdot 2^2\varepsilon^2 + c_2\cos 4\varphi\cdot 4^2\varepsilon^2 - c_3\cos 6\varphi\cdot 6^2\varepsilon^2 + \cdots).$$

Bezeichnet $G$ das Gewicht der Schubstange, $s'$ den Abstand ihres Schwerpunktes vom Kurbelzapfen $M$, so ist ihre Bewegungsgröfse $X'_G$, bezw. ihr Massendruck $X_G$ in der $x$-Richtung

$$X'_G = \int_{z=0}^{l} \frac{dG}{g}\frac{dx}{dt}, \qquad X_G = \int_{z=0}^{l} \frac{dG}{g}\frac{d^2x}{dt^2},$$

oder nach Einsetzung der obigen Ausdrücke für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$ und mit Rücksicht darauf, dafs

$$\int_0^l z\,dG = Gs',$$

$$\text{(1a)}\quad X'_G = \frac{G}{g}\varepsilon[-r\sin + s'(-2c_1\sin 2\varphi + 4c_2\sin 4\varphi - 6c_3\sin 6\varphi + \cdots)],$$

$$X_G = \frac{G}{g}\varepsilon^2[-r\cos\varphi + s'(-4c_1\cos 2\varphi + 16c_2\cos 4\varphi - 36c_3\cos 6\varphi + \cdots)].$$

Wenn man in dem Ausdrucke für $x$ $z = 0$ setzt und $\varrho$ für $r$ schreibt, wo $0 < \varrho < r$, so stellt er die Abszisse eines Kurbelpunktes dar, für $z = l$ die des Kreuzkopfes. Dieselbe Einsetzung in die Ausdrücke für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$ liefert die betreffenden Geschwindigkeiten, bezw. Beschleunigungen. Es sei $K$ das Gewicht der Kurbel, $s''$ der Abstand ihres Schwerpunktes von $O$, $Q$ das Gewicht aller mit dem Kreuzkopfe auf der Gleitbahn bewegten Teile (Kolbenstange, Kolben). Wegen

$$\int_{\varrho=0}^{r} \varrho\,dK = Ks''$$

hat man weiter

$$X'_K = -\frac{K}{g}\varepsilon s''\sin\varphi,$$

$$X_K = -\frac{K}{g}\varepsilon^2 s''\cos\varphi,$$

$$\text{(1b)}\quad X'_P = \frac{P}{g}\varepsilon[-r\sin\varphi + l(-2c_1\sin 2\varphi + 4c_2\sin 4\varphi - \cdots)],$$

$$X_P = \frac{P}{g}\varepsilon^2[-r\cos\varphi + l(-4c_1\cos 2\varphi + 16c_2\cos 4\varphi - \cdots)].$$

An einer gemeinsamen Welle sollen $n$ Kurbelgetriebe wirken, deren Gleitbahnen in derselben durch die Welle gehenden Ebene liegen. Jedes Getriebe giebt als eben bewegtes System als resultierende Massenwirkung einen Druck, der sich der Gröſse und Richtung nach ändert. Die Massendrucke der $n$ Getriebe bilden ein räumliches Kräftesystem, und es wird nun nach den Bedingungen für das fortdauernde Gleichgewicht gefragt, dem „Massenausgleiche" der $n$-kurbeligen Maschine. Um die Aufgabe zu vereinfachen, gestattet man sich folgende Vernachlässigung: Es wird angenommen, daſs die Massendrucke der Getriebe stets die Welle schneiden; thatsächlich entfernen sie sich nur nicht weit davon. Dies vorausgesetzt, läſst sich nach Schlick[1]) zeigen, daſs die $y$-Komponenten der Massendrucke sich durch rotierende Gegengewichte ausgleichen lassen. Diese erzeugen in der $x$-Richtung die Wirkungen

$$(1\text{c}) \qquad X_B' = \varepsilon\left[\frac{K}{g}s'' + \frac{G}{g}\frac{r}{l}(l - s')\right]\sin\varphi,$$

$$X_B = \varepsilon^2\left[\frac{K}{g}s'' + \frac{G}{g}\frac{r}{l}(l - s')\right]\cos\varphi,$$

die zu den früheren hinzuzufügen sind. Der Massenausgleich ist gleichbedeutend mit dem fortdauernden Gleichgewichte der Gesamtdrucke $X$:

$$(1) \qquad X' = X_K' + X_G' + X_P' + X_B', \qquad X = X_K + X_G + X_P + X_B.$$

Sie und die Bewegungsgröſsen werden, wie ersichtlich, durch Reihen dargestellt fortschreitend nach den Cosinus, bezw. Sinus der Vielfachen von $\varphi$.

Verwendet man nach Prof. Föppl[2]) zur Aufstellung der Massenausgleichsbedingungen die Bewegungsgröſsen, so findet man, daſs stetes Gleichgewicht dann herrscht, wenn es zwischen ihren $x$-Komponenten, als Kräfte betrachtet, dauernd besteht.

Anknüpfend an die Form der Kräfte $X$ und Bewegungsgröſsen $X'$ fassen wir eine periodische Funktion einer Veränderlichen $\varphi$ ins Auge, welche sich darstellen läſst in Gestalt einer konvergenten trigonometrischen Reihe, enthaltend nur die Cosinus oder nur die Sinus der Vielfachen von $\varphi$,

$$(2) \qquad f(\varphi) = a + a'\cos\varphi + a''\cos 2\varphi + a'''\cos 3\varphi + \cdots,$$

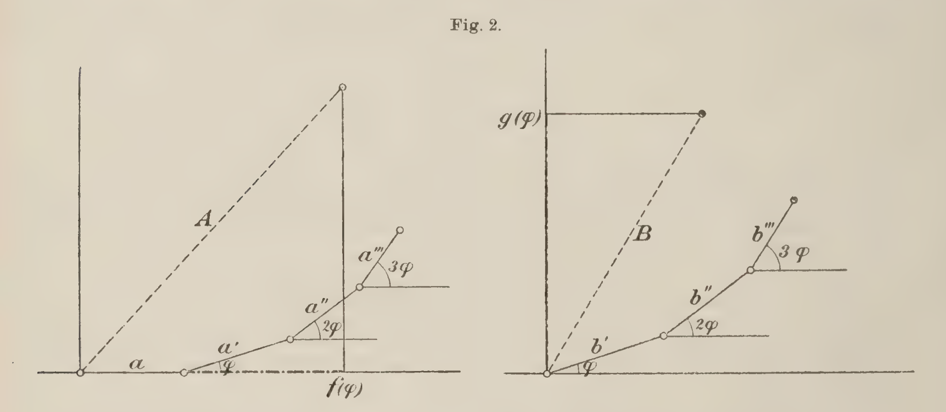
$$g(\varphi) = \qquad b'\sin\varphi + b''\sin 2\varphi + b'''\sin 3\varphi + \cdots.$$

1) Lorenz, a. a. O. S. 32.

2) Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik: IV. Dynamik. Leipzig, Teubner. 1. Aufl. 1899. S. 127 f.

Betrachtet man die Glieder rechts als Längen, so erscheinen sie als Projektionen von Strecken $a$, $a'$, $a''$, ..., bezw. $b'$, $b''$, ..., welche mit einer willkürlich gewählten Richtung die Winkel 0, $\varphi$, $2\varphi$, ..., bezw. $\varphi$, $2\varphi$, ... einschliefsen, auf diese Richtung, bezw. eine zu ihr normale (Fig. 2). $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ ist also die Projektion eines gebrochenen Linienzuges aus den Strecken $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, oder der Schlufslinie $A$, $B$ desselben. Wächst nun $\varphi$ gleichförmig, so dreht sich die Strecke $a^{(i)}$, d. h. ihr Endpunkt und zugleich Anfangspunkt von $a^{(i+1)}$, um ihren Anfangspunkt, der zugleich Endpunkt von $a^{(i-1)}$ ist, mit der Winkelgeschwindigkeit $i\varepsilon$, wenn $\varepsilon$ die der Strecke $a'$ ist; dasselbe gilt von $b^{(i)}$. Die Schlufslinie $A$, $B$ ändert sich dabei stetig, ihre Projektion ist nach Gröfse und Sinn in jedem Augenblicke der Wert von $f(\varphi)$, $g(\varphi)$. Im Folgenden wird angenommen, $f(\varphi)$ oder $g(\varphi)$ sei die Gröfse eines

Fig. 2.




„Linienteiles“ einer Geraden, also z. B. die Gröfse einer Kraft, wie oben. Diese letztere Deutung wollen wir auch im Nachstehenden festhalten, ohne zu vergessen, dafs die Betrachtungen für Linienteile überhaupt gelten. Dann sind auch die Strecken $a^{(i)}$, $A$, bezw. $b^{(i)}$, $B$ als Kräfte anzusehen mit gemeinsamem Angriffspunkte.

Die Aufgabe, deren geometrische Behandlung weiterhin erfolgen soll, ist ein Fall der nachstehenden allgemeineren: An verschiedenen Punkten einer starren Geraden wirken normal $n$ periodisch veränderliche Parallelkräfte, ihre Gröfsen seien ausschliefslich $X_i = f_i(\varphi + \alpha_i)$, oder ausschliefslich $X_i' = g_i(\varphi + \alpha_i)$, $(i = 1, \ldots n)$, also von gleicher Periode, aber verschiedener Phase; unter welchen Bedingungen besteht ein „vollkommener Ausgleich“, d. h. Gleichgewicht in jedem Augenblicke? Dazu ist im allgemeinen erforderlich, dafs die Kräfte $A_i$, bezw. $B_i$ stets im Gleichgewicht sind, und hierzu notwendig und hinreichend, dafs dies von $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ für sich, $a_1'$, $a_2'$, ... $a_n'$, bezw. $b_1'$, $b_2'$, ... $b_n'$

für sich, u. s. w. zutrifft. Die Kräfte $a_1^{(i)}, \ldots a_n^{(i)}$, bezw. $b_1^{(i)}, \ldots b_n^{(i)}$ drehen sich nämlich mit derselben Winkelgeschwindigkeit $i\varepsilon$, ändern also gegenseitig ihre Richtung nicht, daher drehen sich ihre Resultierenden ohne Gröſsenänderung auch mit derselben Winkelgeschwindigkeit. Die Resultierenden der $a_m^{(i)}$ und $a_m^{(k)} (m = 1, \ldots n)$ aber haben die verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten $i\varepsilon$ und $k\varepsilon$, ändern demnach gegenseitig ihre Richtung und können somit nicht stets im Gleichgewicht sein, da ihre Gröſse unveränderlich ist. Der Ausgleich heiſst von der $m$ten Ordnung, wenn die Kräftesysteme $a_i, a_i', \ldots a_i^{(m)}$, bezw. $b_i', \ldots b_i^{(m)} (m = 1, \ldots n)$ im steten Gleichgewichte sind. Bei dem Mehrkurbelgetriebe sind die $\alpha_i$ offenbar die Winkel, welche die Kurbeln einschlieſsen mit der einen Seite einer beliebigen, aber fest mit ihnen verbunden gedachten, von der Welle begrenzten Halbebene und, da es nur auf die relativen Kraftgröſsen ankommt,

$$a_i = 0,\ a_i' = b_i' = \left(P + G\frac{s'}{l}\right) \tag{2a}$$

bei gleicher Kurbellänge. $\left(\text{Vollständig } a_i' = -\varepsilon^2 r \frac{1}{g}\left(P + G\frac{s'}{l}\right)\right)\cdot$

Nunmehr werde ein System von vier Kräften der genannten Art betrachtet, wirkend an einer starren Geraden $l$, und nach dem Ausgleiche erster Ordnung gefragt. Da es hauptsächlich um den Massenausgleich bei Vierkurbelmaschinen sich handelt, so ist $a_i = 0 (i = 1, \ldots 4)$ zu setzen und man kann sagen: Der Ausgleich erster Ordnung ist erreicht, wenn zwischen den vier zur Geraden $l$ normalen Kräften $a_1', a_2', a_3', a_4'$ Gleichgewicht besteht. Daraus lassen sich einige Sätze über die gegenseitige Lage und Richtung der $a_i'$ ableiten.

Sollen vier Kräfte an einem starren Körper einander das Gleichgewicht halten, so müssen die Kraftstrahlen einer Regelschar zweiter Ordnung angehören.[1]) Im vorliegenden Falle schneiden alle Kräfte die Gerade $l$, folglich muſs sie zur Leitschar der Regelschar gehören. Diese wird bekanntlich aus je zwei Strahlen der Leitschar, z. B. $l$ und $l'$, durch projektive Ebenenbüschel, $(l)$ und $(l')$, projiziert, wobei natürlich das Büschel $(l')$ auch die Schnittpunkte der Regelschar mit der Geraden $l$ projiziert. Diese Punktreihe $[l]$ liegt also mit dem Ebenenbüschel $(l')$ perspektiv und ist folglich projektiv zu dem Büschel $(l)$. Mit anderen Worten: Ordnet man jedem Schnittpunkte eines Regelscharstrahles mit einem bestimmten Leitstrahle $l$ die Verbindungsebene

---

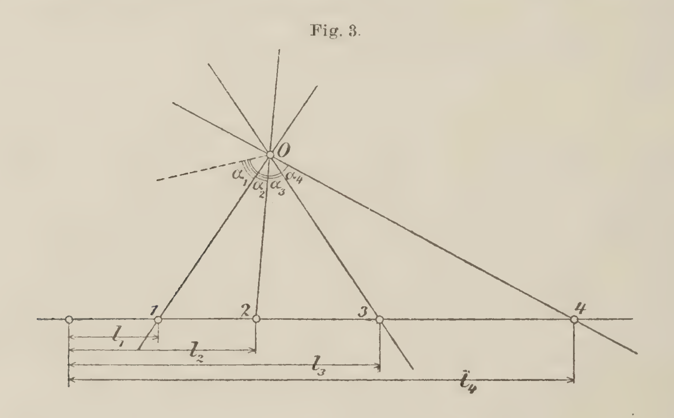
1) Vergl. z. B. Schell, Theorie der Bewegung und Kräfte, 2. Aufl. 1879/80, 2. Bd. S. 35; Henneberg, Statik der starren Systeme, 1886. S. 192

dieses mit dem Regelscharstrahle zu, so ist die Schnittpunktreihe $[l]$ dem Büschel $(l)$ der Verbindungsebenen projektiv. Es folgt dies übrigens auch unmittelbar aus der Eindeutigkeit der Zuordnung. In metrischer Beziehung hat man das Ergebnis: das Doppelverhältnis von vier Elementen der einen Art ist gleich dem der entsprechenden Elemente der anderen Art. Sind $l_1, l_2, l_3, l_4$ die Abstände der vier Schnittpunkte auf $l$ von irgend einem Anfangspunkte, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die Winkel der entsprechenden Verbindungsebenen mit irgend einer durch $l$ begrenzten Halbebene, so ist also

$$(3) \qquad (1, 2, 3, 4) = \frac{l_3 - l_1}{l_3 - l_2} : \frac{l_4 - l_2}{l_4 - l_2} = \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)} : \frac{\sin(\alpha_4 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_4 - \alpha_2)}.$$

Das Ebenenbüschel $(l)$ kann mit der Punktreihe $[l]$ in perspektive Lage gebracht werden, ebenso das Strahlenbüschel, in welchem das

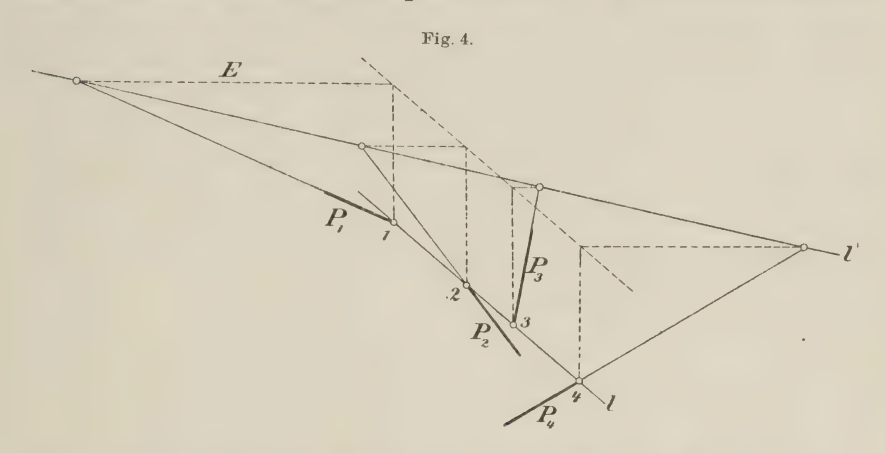
Fig. 3.




Ebenenbüschel $(l)$ von einer nicht in ihm enthaltenen Ebene geschnitten wird. Die vier Kräfte müssen für das Gleichgewicht im allgemeinen der einen Geradenschar eines einfachen Hyberboloides angehören; in dem besonderen Falle, dafs sie alle einer gegebenen Ebene $E$ parallel sein sollen, geht die Regelschar über in die eine Geradenschar eines hyperbolischen Paraboloides. Daher ist hier die Konstruktion der Kraftstrahlen besonders einfach. Man ziehe eine zu $l$ windschiefe Gerade $l'$ und schneide beide durch vier zu $E$ parallele Ebenen; die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte in jeder Ebene sind dann vier zulässige Kraftstrahlen. Hier giebt ein ebener Schnitt des Büschels $(l)$ parallel $E$ die Kraftrichtungen selbst, daher mufs sich (Fig. 3) der Kräfteplan in perspektive Lage bringen lassen zum Plane der Kraftangriffspunkte auf $l$, dem „Abstandsplane". Wenn endlich $E$ normal steht zu $l$, so gilt dasselbe; das hyperbolische Paraboloid ist gleichseitig. Das ist der Fall, von welchem ausgegangen wurde (Fig. 4).

Auf die Vierkurbelmaschine angewendet lautet das bisherige Ergebnis: Für den Massenausgleich erster Ordnung (Schlickschen Ausgleich) ist notwendig, dafs die Kurbeln zu einer Geradenschar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides gehören, d. h. eine zur Welle windschiefe Gerade schneiden. Der Kurbelplan läfst sich dann in perspektive Lage bringen zum Abstandsplane.[1]) Im Folgenden erhält man aus jedem Satze den entsprechenden für die Vierkurbelmaschine

Fig. 4.




durch Vertauschung des Wortes Kraft mit Kurbel, Kraftgröfse mit „Getriebegewicht" $P + G\frac{s'}{l}$, daher sprechen wir nur von den Kräften.

Von den sechs Werten, welche das Doppelverhältnis je nach seiner Bildungsweise annehmen kann, bestimmen wir etwa jenen, bei welchem die Abstände zwischen je zwei aufeinander folgenden Kraftangriffspunkten vorkommen

$$(1, 3, 2, 4) = \frac{l_2 - l_1}{l_2 - l_3} : \frac{l_4 - l_1}{l_4 - l_3} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)} : \frac{\sin(\alpha_4 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_4 - \alpha_3)}.$$

Heifst der Abstand der Angriffspunkte $i$ und $k$ $l_{ik}$, der Winkel der zugehörigen Kraftstrahlen $\alpha_{ik}$, wo durch die Zeiger zugleich der Durchlaufungssinn angedeutet ist, so wird

$$\text{(3a)} \qquad -(1, 3, 2, 4) = \frac{l_{12} l_{34}}{l_{23} l_{14}} = \frac{\sin\alpha_{12} \sin\alpha_{34}}{\sin\alpha_{23} \sin\alpha_{14}}.$$

Bei symmetrischem Abstandsplane, wenn $L$ die Entfernung der äufseren, $l$ die der inneren Angriffspunkte von einander ist, also

$$l_{14} = L, \quad l_{23} = l, \quad l_{12} = l_{34} = \frac{(L - l)}{2},$$

1) Bezüglich dieses zweiten Satzes vergl. Schubert, a. a. O. S. 30.

wird das Doppelverhältnis

$$-(1, 3, 2, 4) = \frac{(L-l)^2}{4Ll}. \tag{3b}$$

Wählt man vier Kraftstrahlen den gefundenen Bedingungen gemäfs, so ist für das Gleichgewicht weiter erforderlich, dafs sich das Kräftepolygon schliefst. Es mufs also auf den bereits gegebenen Kraftstrahlen der Sinn und die Gröfse der Kräfte so angenommen werden, dafs dies zustande kommt. Da ergiebt sich zunächst, dafs der Winkel zwischen zwei im Kräfteplane aufeinander folgenden Kräften kleiner sein mufs als 180°, sonst liefse sich durch das Zentrum $O$ (Fig. 5) ein Strahl $S$ so ziehen, dafs alle Kraftrichtungen nach der einen Seite desselben weisen würden, und nach dieser fiele auch die Resultierende, welche dann nicht verschwinden kann. Auf den Kraftstrahlen werde willkürlich ein Sinn als positiv bezeichnet, z. B. $OA$, $OB$, ... (Fig. 6). Wir beginnen bei $A$ und nehmen die Kraftrichtung etwa positiv, ebenso auf $B$. Sollte das nun auch bei $C$ geschehen, so würde der eben besprochene Fall eintreten, mag man auf $D$ den Kraftsinn positiv oder negativ wählen, wie aus der Figur ersichtlich ist. Auf $C$ mufs also der Kraftsinn negativ sein, auf $D$ dagegen aus demselben Grunde wieder positiv. Die Figur zeigt, dafs die Kraftrichtungen symmetrisch verteilt sind bezüglich eines Strahles $T$ durch $O$ im Winkelraume $(A, B)$; er sei weiterhin die „Trennungsachse" genannt. Wir finden, dafs dies überhaupt die einzig mögliche Kraftverteilung ist. Wäre die Kraft auf $B$ negativ gemacht worden, so kommt das darauf hinaus, dafs in der Figur mit $B$ statt mit $A$ begonnen wird. Die folgende Kraft $D$ ist dort positiv; soll sie auch negativ sein, so beginnt man mit $D$. Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft. Dasselbe Ergebnis bekommt man durch Annahme je zweier entgegengesetzt gleichen Kräfte $R$ auf beliebigen Strahlen durch $O$ und Zerlegung jeder nach je zwei anderen der gegebenen Strahlen (Fig. 7). Man kann sagen: Das allgemeine Bild der Kraftrichtungsanordnung wird gewonnen, indem man auf den Strahlen durch $O$ von irgend einem angefangen der Reihe nach abwechselnd den entgegengesetzten Sinn zur Kraftrichtung macht, wie sich erkennen läfst beim Durchlaufen des Kräfteplanes Fig. 6 von der Trennungsachse $T$ aus.

Fig. 5.

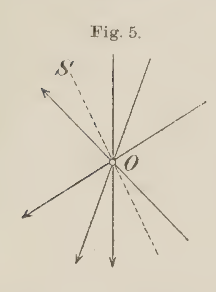
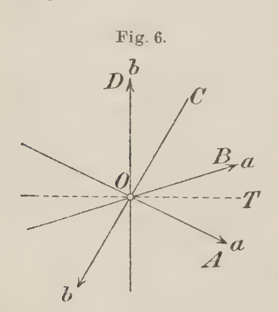



Fig. 6.



Wenn der Kräfteplan vorliegt, so ist nun zu untersuchen, wann sein Schnitt mit einer Geraden als Abstandsplan angesehen werden darf. Wir müssen uns vergegenwärtigen, dafs aufser den bis jetzt aufgestellten Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften, die einer Ebene parallel sind, noch das Verschwinden des Gesamtmomentes für irgend eine Gerade zu fordern bleibt, die nicht parallel ist der Ebene, welcher die Leitscharstrahlen der Kraftstrahlen parallel sind.[1]) Diese Bedingung läfst sich auch in etwas anderer Form geben, besser geeignet für die hier verwendete Betrachtungsweise: Die Projektion des Kräftesystems auf irgend eine Ebene durch $l$ darf keine von den Anordnungen in Fig. 8 zeigen, denn in beiden Fällen ist das System der in der Projektionsebene liegenden Komponenten gleichwertig einem Kräftepaare, da die Resultierende als Projektion derjenigen der gegebenen Kräfte nach Voraussetzung verschwindet. Als Abstandsplan ist demnach ein Schnitt des Kräfteplanes dann unstatthaft, wenn bei Projektion

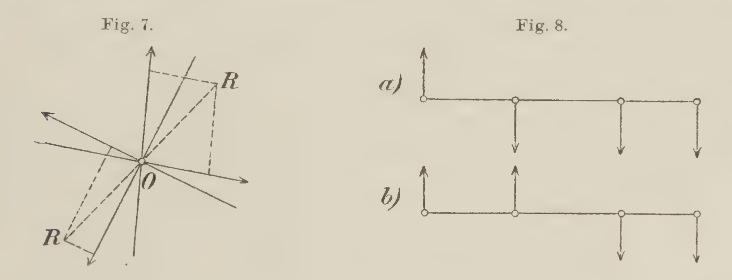


Fig. 7. Fig. 8.

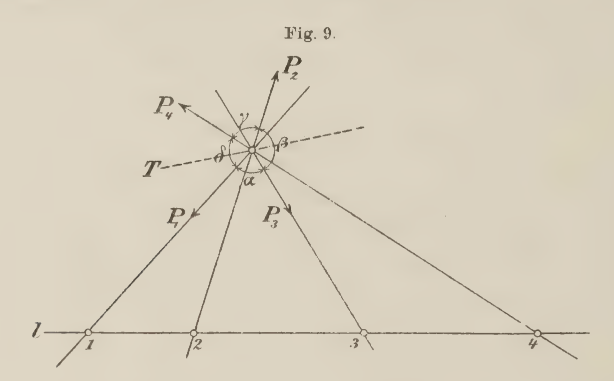
des Kräfteplanes auf Strahlen des Büschels ($O$) die Projektion einer Aufsenkraft allein auf die eine Seite von $O$ fallen kann, entsprechend der Anordnung a) in Fig. 8. Bezüglich der b) werden wir uns demnächst überzeugen, dafs sie durch die letzte Bedingung im Vereine mit den früheren bereits ausgeschlossen ist.

Im Kräfteplane seien die beiden der Trennungsachse zunächstliegenden Kraftrichtungen mit $a$, die beiden andern mit $b$ bezeichnet. „Benachbart“ beziehe sich bei Richtungen auf den Kräfte-, bei Kräften auf den Abstandsplan. Dann ist die Summe der Winkel zwischen einer $b$-Richtung und den beiden benachbarten immer gröfser als $180^0$, denn um zu einer derselben von $b$ aus zu gelangen, mufs man stets den Strahl der andern überschreiten, wie aus Fig. 6 erkennbar. Es giebt also durch $O$ immer einen die Richtung $b$ von den drei anderen beiderseits trennenden Strahl, und die Projektion von $b$ auf den Normalstrahl jenes fällt allein auf die eine Seite von $O$. Bei den $a$-Richtungen

1) Vergl. Henneberg, a. a. O. S. 194.

kann das nicht geschehen, hier ist augenscheinlich die Summe der Winkel gegen die Nachbarrichtungen immer kleiner als $180^0$. Als letzte Gleichgewichtsbedingung folgt demnach: Abstandspläne sind nur jene geraden Schnitte des Kräfteplanes, bei welchen keine $b$-Richtung Aufsenkraft wird, oder anders, bei welchen beide $a$-Richtungen Aufsen-, die $b$ Innenkräfte sind. Damit ist aber die Schnittrichtung schon vollkommen begrenzt, sie mufs innerhalb desselben Winkels $(a, a)$ liegen, wie die Trennungsachse (Fig. 9). Wegen der symmetrischen Anordnung des Kräfteplanes haben die Schnittpunktpläne beiderseits von $O$ dieselbe Eigenart. Sie läfst sich ausdrücken durch den Satz: Nachbarkräfte weisen stets nach entgegengesetzten Seiten der Trennungsachse, bezw. im Raume der Trennungsebene, welche durch die Gerade $l$ und die Trennungsachse bestimmt ist; umgekehrt können nach derselben

Fig. 9.




Seite der Trennungsachse (-ebene) weisende Kräfte nicht benachbart sein.[1]) Der die Trennungsachse enthaltende Winkel der äufseren Kräfte mufs kleiner sein als der der inneren, $(a, a) < (b, b)$. Dafs die Ausschliefsung des Falles b) Fig. 8 mit erfolgt ist, geht daraus hervor, dafs eine Aufsen- und ihre Nachbarkraft nie benachbarte Richtungen haben, ihre Richtungen werden getrennt durch jene der anderen Aufsenkraft (vergl. Fig. 6); fällt ihre Projektion also auf dieselbe Seite von $O$, so thut das auch die der anderen Aufsenkraft.

Will man das Doppelverhältnis so bilden, dafs darin die Winkel zwischen den benachbarten Kraftrichtungen vorkommen, so ist das schon in dem früheren Ausdrucke für (1, 2, 3, 4) geleistet. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien die Winkel, begonnen von einer Aufsenkraft (Fig. 9), dann ist

$$\alpha = \alpha_3 - \alpha_1, \quad 180^0 - \beta = \alpha_3 - \alpha_2, \quad \gamma = \alpha_4 - \alpha_2, \quad 180^0 - \delta = \alpha_4 - \alpha_1,$$

1) Vergl. Schubert, a. a. O. S. 29 in etwas anderer Form.

also

(3c) $$(1, 2, 3, 4) = \frac{l_3 - l_1}{l_3 - l_2} : \frac{l_4 - l_1}{l_4 - l_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} : \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}.$$

Bei symmetrischem Abstandsplane ist nach der früheren Bezeichnung

$$l_3 - l_1 = l_4 - l_2 = \frac{L + l}{2},$$

und daher

(3d) $$(1, 2, 3, 4) = \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin\beta \sin\delta} = \frac{(L + l)^2}{4 L l}.$$ [1])

Symmetrie des Kräfte- und Abstandsplanes sind von einander unabhängig, die Schnittrichtung, welche mit dem Kräfteplane einen Abstandsplan erzeugt, ist ja innerhalb der angegebenen Grenzen willkürlich. Setzt man aber Symmetrie der Kraftgröfsen im Abstandsplane voraus, so zieht sie zunächst dieselbe im Kräfteplane nach sich. $P_i$ sei die Kraft im Angriffspunkt $i$. Es seien im Kräfteplane z. B. die Aufsenkräfte $P_1, P_4$ angenommen von beliebiger Richtung, aber gleicher Gröfse. Damit ist die Resultierende $R$ dieser beiden bestimmt, sie halbiert den Winkel $(a, a)$. Ihr mufs von den Innenkräften $P_2, P_3$ das Gleichgewicht gehalten werden und da diese beide gleich grofs sein sollen, so mufs $R$ auch ihren Winkel $(b, b)$ halbieren; der Kräfteplan wird also bezüglich $R$ symmetrisch.[2]) Ferner ist offenbar

(4) $$\frac{R}{2} = P_a \cos\frac{(a, a)}{2} = P_b \cos\frac{(b, b)}{2}$$ [3]),

wo gesetzt wurde

$$P_1 = P_4 = P_a, \quad P_2 = P_3 = P_b.$$

Da nach Früherem $(a, a) < (b, b)$, so folgt daraus oder auch unmittelbar aus der Anschauung

(4a) $$P_a < P_b$$ [4]),

die Aufsenkräfte müssen kleiner sein als die Innenkräfte.

Um den Zusammenhang der Kraftgröfsen mit ihren Abständen zu ermitteln, mufs man die Kraftmomente für geeignet gewählte Achsen heranziehen. Als solche bieten sich im Angriffspunkte $i$ die drei zu den Kräften $P_k$, $P_m$, $P_n$ $(i, k, m, n = 1, 2, 3, 4)$ parallelen Geraden $h_{ik}$, $h_{im}$, $h_{in}$, weil jede von zwei Kräften geschnitten wird, z. B. $h_{ik}$

1) Vergl. Schubert, a. a. O. S. 34.
2) Desgl. S. 43.
3) Desgl. S. 45.
4) Desgl. S. 47.

von $P_i$ und $P_k$[1]), deren Moment also verschwindet. Das Moment des ganzen Kräftesystems für die Achse $h_{ik}$ rührt her von den zur Ebene $(l, h_{ik})$ normalen Komponenten der beiden noch übrigen Kräfte $P_m$, $P_n$, und da Gleichgewicht herrscht, müssen ihre Momente entgegengesetzt gleich sein

$$P_m \sin(m,k) \cdot l_{im} = P_n \sin(n,k) \cdot l_{ni},$$

und daraus erhält man

$$\text{(5a)} \qquad \frac{P_m \sin(m,k)}{P_n \sin(n,k)} = \frac{l_{ni}}{l_{im}}.$$

Ebenso finden sich für die zu $h_{ik}$ parallelen Achsen $h_{mk}$, $h_{nk}$ Gleichungen, welche sich mit der vorigen vereinigen lassen in der Beziehung

$$\text{(5)} \qquad \frac{P_m \sin(m,k)}{l_{ni}} = \frac{P_n \sin(n,k)}{l_{im}} = \frac{P_i \sin(i,k)}{l_{mn}}.$$

Gleichung (5a) sagt aus: Die Projektionen zweier Kräfte $P_m$, $P_n$ auf die Normalebene (im Kräfteplane Normale) einer dritten $P_k$ verhalten sich umgekehrt wie die Abstände der zugehörigen Angriffspunkte $m$, $n$ vom vierten $i$. Durch die Beziehung (5) wird ausgedrückt: Von den Projektionen dreier Kräfte $P_m$, $P_n$, $P_i$ auf die Normalebene (Normale) der vierten $P_k$ ist jede proportional dem Abstande der beiden andern von einander. Die eben gefundenen Beziehungen lassen sich auch ableiten, wenn man die Momente der Kräfte $P_i$ für die Punkte $C$ der Geraden $l$ benützt, $M_{ci}$. Stellen wir die Momente durch ihre Achsen dar[2]), so mufs bei Gleichgewicht das Momentenpolygon sich stets schliefsen. Die Strahlen des Momentenplanes für die Punkte $C$ erhält man durch Drehung des Kräfteplanes um $90^0$; alle Momentenpolygone haben parallele Seiten. Für einen Kraftangriffspunkt $i$ wird $M_{ii} = 0$, das Momentenviereck zum Dreiecke, in welchem keine Seite normal steht zu $P_i$. Es ist

$$M_{ik} : M_{im} : M_{in} = \sin(m,n) : \sin(n,k) : \sin(k,m),$$

und da

$$M_{ik} = P_k l_{ik}, \ldots$$

so folgt daraus

$$\frac{P_m l_{im}}{P_n l_{in}} = \frac{\sin(n,k)}{\sin(k,m)},$$

d. h. die Gleichungen (5a), und ähnlich die anderen.

Sind die Kraftgröfsen im Abstandsplane symmetrisch verteilt, so mufs im Momentenplane für einen auf der Geraden $l$ aufserhalb der

---

1) Von $P_k$ im Unendlichen.

2) Auf die vorliegende Aufgabe zuerst von Taylor angewendet.

Kräfte gelegenen Punkt $C$ die Summe der Projektionen von $M_{c1}$ und $M_{c4}$ auf die Normale zu $R$ gleich und entgegengesetzt sein der von $M_{c2}$ und $M_{c3}$, also wenn $l_i$ jetzt den Abstand $Ci$ bedeutet,

$$P_a(l_1 + l_4)\cos\frac{(a, a)}{2} = P_b(l_2 + l_3)\cos\frac{(b, b)}{2},$$

oder mit Rücksicht auf die Beziehung (4)

(6) $$l_1 + l_4 = l_2 + l_3, \text{ oder } l_2 - l_1 = l_4 - l_3\,[1]),$$

d. h. auch der Abstandsplan mufs symmetrisch sein. Durch Projektion auf $R$ ergiebt sich

$$P_a l_1 \sin\frac{(a, a)}{2} + P_b l_3 \sin\frac{(b, b)}{2} = P_a l_4 \sin\frac{(a, a)}{2} + P_b l_2 \sin\frac{(b, b)}{2}$$

und daraus nach dem eben Gefundenen

(7) $$P_a L \sin\frac{(a, a)}{2} = P_b l \sin\frac{(b, b)}{2}\,[2]);$$

wegen $(a.\ a) > (b,\ b)$ folgt daraus

$$P_b l < P_a L, \text{ oder } \frac{l}{L} < \frac{P_a}{P_b}.\,[3])$$

Nun möge noch erörtert werden, wie mit Hilfe der gewonnenen Sätze die Aufgabe auf konstruktivem Wege sich behandeln läfst. Da die Längen- und Krafteinheit beliebig gewählt werden können, so handelt es sich nur um die relativen Kraftgröfsen, bezw. Lagen der Angriffspunkte. Die Bezeichnung sei immer so vorausgesetzt, dafs sie Fig. 9 entspricht. Denkt man etwa die Angriffspunkte durch ihren Abstand von 1 gegeben und $l_{12}$, $P_1$ als Einheiten genommen, so erscheinen als Bestimmungsstücke drei Kräftewinkel, drei Kräfte- und zwei Abstandsverhältnisse,

$$\frac{P_2}{P_1},\quad \frac{P_3}{P_1},\quad \frac{P_4}{P_1},\quad \frac{l_{13}}{l_{12}},\quad \frac{l_{14}}{l_{12}}.$$

Daraus ist zu entnehmen, dafs die Angabe von $n$ Kraftgröfsen, bezw. Angriffspunkten als Wahl von $n - 1$, bezw. $n - 2$ Bestimmungsstücken anzusehen ist.

Es seien drei Winkel gegeben, d. h. der Kräfteplan, abgesehen von den Kraftgröfsen, und damit die Trennungsachse nnd der Richtungsbereich für den perspektiven Abstandsplan. Diesen festzulegen ist dann noch eine vierte Angabe nötig, es seien drei Angriffsspunkte

1) Vergl. Schubert, a. a. O. S. 44.

2) Desgl. S. 45.

3) Desgl. S. 47.

z. B. 1, 2, 4, etwa bestimmt durch $\frac{l_{12}}{l_{14}} = \frac{2}{3}$. Bringen wir sie zum Kräfteplane in perspektive Lage[1]), so ergiebt sich der Angriffspunkt 3 als Schnitt der Geraden $l$ mit Strahl 3. Von den Kraftgröfsen verschafft der Satz (5) sofort drei. Auf einer Kraftnormalen, z. B. von $P_3$ (Fig. 11), wird von $O$ aus, um $P_1$ zu finden, nach der Seite dieses die Strecke $l_{24}$ aus dem gefundenen Abstandsplane aufgetragen[2]); die Parallele zu $P_3$ durch den so erhaltenen Punkt $1'$ schneidet auf dem $P_1$-Strahle die Gröfse von $P_1$ ab. Ebenso folgt $P_2$ und $P_4$, während man $P_3$ am einfachsten aus den gefundenen Kräften als Schlufsseite ihres Polygons erhält. Da deren Richtung schon bekannt ist, so wird damit gleichzeitig die Genauigkeit der Konstruktion geprüft.

Als andere Voraussetzung seien die vier Kraftgröfsen, z. B.

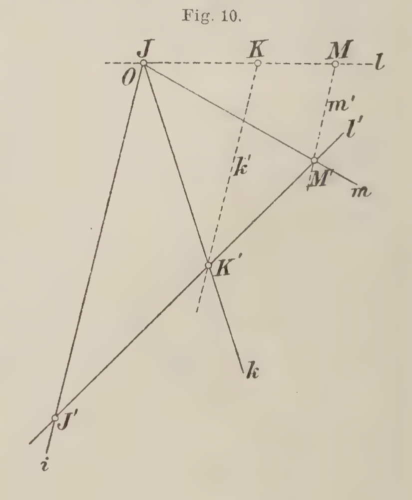
$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = 4 : 3 : 3{\cdot}5 : 2,$$

bekannt. Bildet man aus ihnen in irgend einer Reihenfolge ein Viereck, so ist zur Festlegung dieses als Kräftepolygones für das Gleichgewicht abermals eine vierte Bedingung notwendig, das seien drei Angriffspunkte, z. B. 1, 3, 4, bestimmt durch $\frac{l_{13}}{l_{14}} = \frac{1}{3}$. Halten wir eine Viereckseite fest, so ist die richtige Stellung des so entstandenen „Kurbelvierecks", und damit die gesuchten Kräftewinkel, wieder gekennzeichnet durch die Beziehung (5). Es werden die Viereckseiten in der Reihenfolge des Kräfteplanes angeordnet, $P_1$, $P_3$, $P_2$, $P_4$, dann mache man die Kraft, deren Angriffspunkt nicht gegeben ist, $P_2$, zum „Stege". Wird das Kurbelviereck parallel zu diesem auf eine Stegnormale projiziert, so bilden nach (5) die drei Eckpunktprojektionen, wenn es sich mit

1) Hier liegt die Aufgabe vor, drei Punkte einer Geraden $l$ in perspektive Lage zu bringen mit drei entsprechenden Strahlen eines Büschels. Da jedoch statt der Punktgruppe jede ihr ähnliche benützt werden kann, so vereinfacht dies die Konstruktion. Sie läfst sich beispielsweise folgendermafsen ausführen (Fig. 10). Man legt die Gerade $l$ so, dafs einer der Punkte, $I$, in den Büschelscheitel $O$ fällt und zieht durch die beiden andern $K$, $M$ Parallele $k'$, $m'$ zu Strahl $i$. Die Verbindungsgerade $l'$ der Schnittpunkte $(k, k')$ und $(m, m')$ schneidet dann das Büschel in einer zur gegebenen ähnlichen Punktgruppe $I'$, $K'$, $M'$.

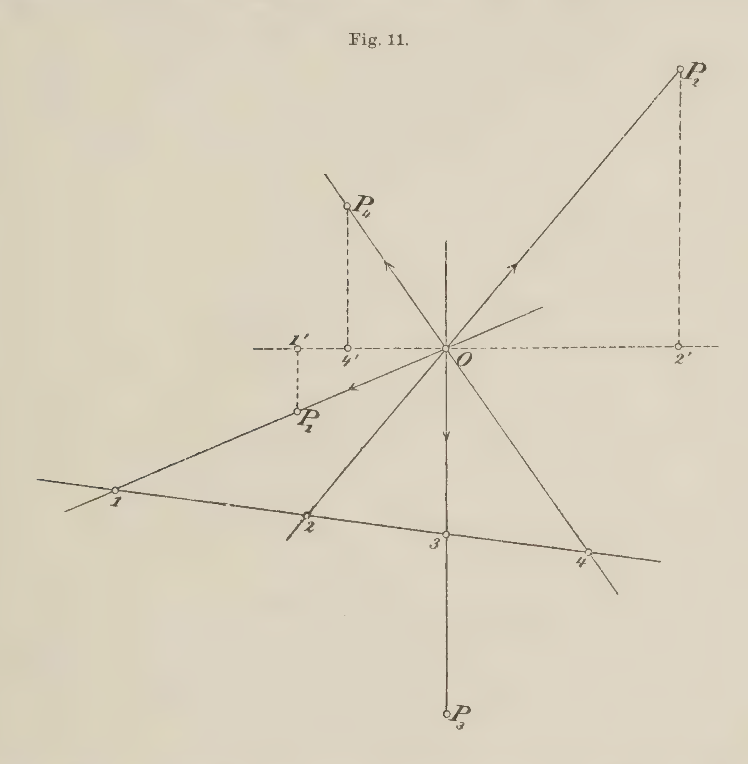
2) oder irgend ein bestimmter Bruchteil derselben, in der Figur die Hälfte.

Fig. 10.



dem gesuchten Kräftepolygone deckt, eine zum Abstandsplane ähnliche Punktgruppe. Um das Viereck daraufhin in seinen verschiedenen Stellungen leicht prüfen zu können, lege man den Abstandsplan, soweit er bekannt ist, in irgend einem Maſsstabe normal zum Steg nach der Vierecksseite hin so, daſs der Angriffspunkt, 1, der „Koppel“-Kraft auf jenem liegt, und verbinde seine Punkte, 3, 4, mit einem beliebigen $C$ des Steges; dann giebt jede Stegnormale als Schnitt mit den drei Geraden durch $C$ eine zum Abstandsplane ähnliche Punktgruppe. Schneidet man also $Ci$ mit der Stegparallelen durch den Endpunkt der „Kurbel“

Fig. 11.

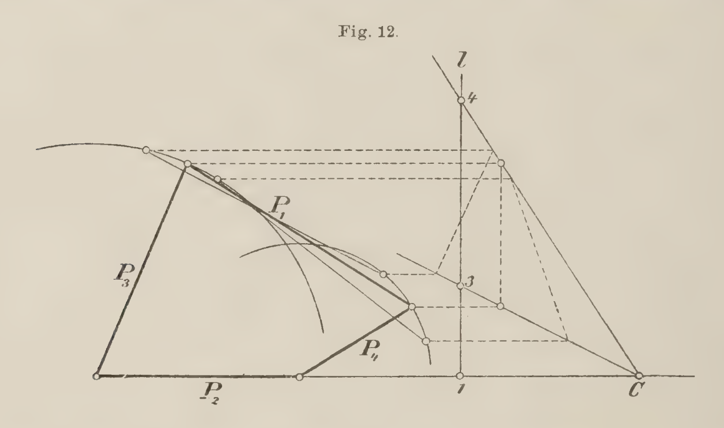



$P_k$, wo $i + k$, so liegen für die richtige Stellung diese Schnittpunkte auf einer Stegnormalen. Dieser Umstand ermöglicht eine Näherungskonstruktion, indem man um die Stegendpunkte Kreise mit den Kräften $P_3$, $P_4$ als Halbmessern beschreibt, deren Richtungen benachbart sind jener mit unbekanntem Angriffspunkte, und auf ihnen die Strecke der Koppelkraft, $P_1$, mit ihren Endpunkten so lange verschiebt, bis die erwähnten Schnittpunkte die verlangte Lage haben (Fig. 12). Für die Genauigkeit dieser Konstruktion ist es offenbar am günstigsten, wenn die Winkel zwischen dem Stege einer- und $Ci$, $Ck$ andererseits sich von $45^0$ nicht zu weit entfernen. Nach Bestimmung der Kraft-

richtungen kann man den Abstandsplan nach dem früheren Verfahren vervollständigen, oder man projiziert das ermittelte Kräfteviereck auf die Normale einer anderen Seite, z. B. $P_4$; die Projektionspunktgruppe ist ähnlich der 3, 2, 1 des Abstandsplanes und so ist der fehlende Punkt 2 bestimmt.

Wenn alle vier Angriffspunkte gegeben sind, z. B. $l_{ik}:l_{im}:l_{in}$, also der Abstandsplan, und drei Kraftgröfsen, $P_k:P_m:P_n$, so sind in den Momentendreiecken der Angriffspunkte nur die drei von $P_i$ herrührenden Seiten unbekannt, das des Punktes $t$ also vollständig bestimmt, und dadurch in den anderen je zwei Seiten von bekannter Gröfse auch der Richtung nach, so dafs schon eines die vierte Momentenrichtung giebt. (Die weiteren Ausführungen Schubert a. a. O. S. 38 f.) Zu bemerken ist hier, dafs man die drei Kraftgröfsen, bezw. den Abstandsplan nicht

Fig. 12.




ganz willkürlich annehmen kann. Die Momente für den Punkt $i$ müssen solche Gröfsen haben, dafs sie ein Dreieck bilden können, also

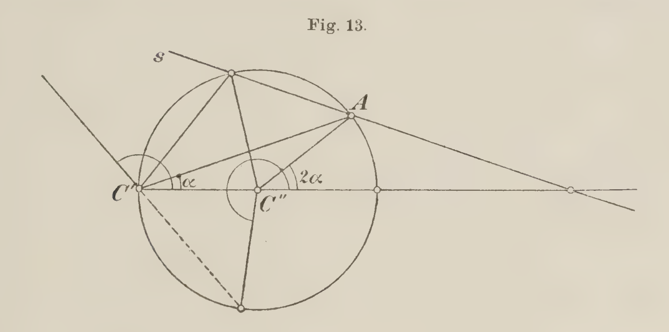
$$|P_n l_{in} - P_m l_{im}| < P_{ik} l_{ik} < P_m l_{im} + P_n l_{in},$$

$$i, k, l, m = 1, 2, 3, 4.$$

Schliefslich wollen wir noch in Erwägung ziehen, ob bei einem System von vier Kräften der früher mit $f_i$, bezw. $g_i$ bezeichneten Art, normal in einer Ebene wirkend an einer starren Geraden, der Ausgleich zweiter Ordnung erreichbar ist. Es müssen dann aufser den Kräften $a_i'$ gleichzeitig die Kräfte $a_1''$, $a_2''$, $a_3''$, $a_4''$ für sich im Gleichgewichte sein, welche mit den ersteren gemeinsame Angriffspunkte haben, während der Winkel zwischen zwei Kraftrichtungen $a_i''$, deren entsprechende $a_i'$ benachbart sind, doppelt so grofs ist als dort. Die Gleichgewichtsbedingungen für die $a_i''$ sind also dieselben wie für die $a_i'$, folglich müssen sich die Kräftepläne beider in perspektive Lage

bringen lassen, soll der Ausgleich zweiter Ordnung erzielt werden. Während eine $a'$-Richtung einen vollen Winkel einmal durchläuft, beschreibt die entsprechende $a_i''$-Richtung denselben zweimal. Die beiden Büschel sind also nicht eindeutig auf einander bezogen, somit nicht projektiv und lassen sich folglich auch nicht in perspektive Lage bringen. Der Ausgleich zweiter Ordnung ist mithin bei vier Kräften unmöglich. Doch sei dies auch auf konstruktivem Wege dargethan. Um zu einer $a'$-Richtung in einfacher Weise die entsprechende $a''$ zu finden, läſst sich der Umstand benützen, daſs in einem Kreise ein Zentriwinkel doppelt so groſs ist, als der Peripheriewinkel über dem-

Fig. 13.




selben Bogen, was auch dann gilt, wenn ein Schenkel des letzteren den Kreis nur rückwärts verlängert schneidet. Wählt man einen Kreispunkt $C'$ zum Scheitel der $a'$-, den Mittelpunkt $C''$ zu dem der $a''$-Richtungen, und die Gerade $C'C''$ zur gemeinsamen Anfangsrichtung, so sind $C'A$, $C''A$ zwei entsprechende Richtungen, wenn $A$ ein Kreispunkt ist (Fig. 13). Umgekehrt sieht man, daſs entsprechende Richtungen der Büschel $a'$ und $a''$, wenn diese eine Richtung entsprechend gemein haben, einander auf einem Kreise schneiden. Daraus geht hervor, daſs auf einer Geraden $s$ einander nie vier entsprechende Strahlen schneiden können, wie für die perspektive Lage notwendig wäre, sondern nur drei, die Richtungen, welche von den Schnittpunkten der Geraden $s$ mit dem Strahle $C'C''$ und dem Kreise bestimmt werden.

Prag, 31. Dezember 1901.

---

# Die Festigkeit ebener Platten bei normaler konstanter Belastung.

Von H. Heimann in Berlin.

Der Versuch, die von Kirchhoff und Clebsch[1]) gegebene umfassende Theorie der Deformation dünner Platten für die wichtigsten Fälle der Praxis in möglichst einfacher Weise abzuleiten, dürfte zuerst von Grashof[2]) unternommen sein. Mit Recht bemängelt v. Bach[3]) diese Ableitung, insofern sie nur die in Wirklichkeit sehr selten eintretenden Grenzfälle — freie Auflage, bezw. absolut feste Einspannung — berücksichtigt. Die durch v. Bach aufgestellte Näherungstheorie, welche jeweilig durch Versuch zu bestimmende Erfahrungskoeffizienten benützt, reicht zwar für die Bedürfnisse praktischer Berechnung völlig aus, gestattet jedoch keinen genauen Einblick in das Wesen der eintretenden Deformation.

Es ist klar, daſs bei Kenntnis der Zustandsgleichungen von Platten durch Belastungsversuche an solchen wertvolle Aufschlüsse über Elastizitätsmodul, Querkontraktionskoeffizient und den Geltungsbereich des Hookschen Gesetzes gewonnen werden können. Die eintretenden Randverschiebungen bei beliebiger Einspannung und die maximale Durchbiegung sind leicht zu messen, konstante Belastungen durch Flüssigkeitsdruck auf das genaueste herzustellen, sodaſs alle Vorbedingungen für einen Vergleich der wirklich eintretenden Verhältnisse mit den von der Theorie geforderten gegeben sind.

Dies rechtfertigt den Versuch, jene Gleichungen in besonderer Weise zu entwickeln, zumal da diese Entwicklung, wie in einem späteren Aufsatze gezeigt werden soll, prinzipiell auch auf krumme Platten anwendbar bleibt. Weiterhin wird sich zeigen, daſs eine Integration dieser Gleichungen für den Fall der fest eingespannten Ellipse und des beliebig eingespannten Kreises in einfacher Weise möglich ist.

Im folgenden werden die von Clebsch angewandten Bezeichnungen benutzt. Nur wird der Querkontraktionskoeffizient statt mit $\mu$ mit $\frac{1}{m}$ bezeichnet. Die $x, y$ Ebene wird in die Plattenmittelebene gelegt.

1) Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig 1862. S. 264 u. f.
2) Grashof, Die Festigkeitslehre, Berlin 1878. S. 300 u. f.
3) Bach, Elastizität u. Festigkeit, Berlin 1894. S. 378 u. f.

Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie lauten nun:

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta u + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial e}{\partial x} = 0, \\ \Delta v + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial e}{\partial y} = 0, \\ \Delta w + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial e}{\partial z} = 0; \end{cases}$$

dabei bedeutet:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^3}, \quad e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Zu diesen Gleichungen treten noch die Oberflächenbedingungen hinzu. Zum Teil wirken auf die Oberflächenelemente bekannte äufsere Kräfte, zum Teil sind für die Elemente bestimmte mefsbare Verschiebungen gegeben. Im vorliegenden Falle sind beispielsweise die auf die ebenen Begrenzungsflächen wirkenden Pressungen gegeben, die am zylindrischen Rand eintretenden Verschiebungen zu messen.

Unter Berücksichtigung der Stetigkeit und Endlichkeit der eintretenden Verschiebungen setze man

$$(2)\qquad \begin{cases} u = \varphi_0 + z\varphi_1 + \cdots z^n\varphi_n + \cdots \\ v = \psi_0 + z\psi_1 + \cdots z^n\psi_n + \cdots \\ w = \chi_0 + z\chi_1 + \cdots z^n\chi_n + \cdots, \end{cases}$$

wobei $\varphi$, $\chi$, $\psi$ Funktionen von $x$ und $y$ allein sind.

Eliminiert man $u$, $v$, $w$ mittels der Gleichungen (2) aus (1) und fafst die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $z$ zusammen, so erhält man statt (1) das System (3):

$$(3)\begin{cases} a_n) & \Delta\varphi_n + (n+2)(n+1)\varphi_{n+2} + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y} + (n+1)\chi_{n+1}\right\} = 0 \\ b_n) & \Delta\psi_n + (n+2)(n+1)\psi_{n+2} + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y} + (n+1)\chi_{n+1}\right\} = 0 \\ c_n) & \Delta\chi_n + (n+2)(n+1)\chi_{n+2} + \dfrac{m}{m-2}(n+1)\left\{\dfrac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_{n+1}}{\partial y} + (n+2)\chi_{n+2}\right\} = 0, \end{cases}$$

dabei ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, und $n$ nimmt alle Werte von 0 bis $\infty$ an.

Aus der Form der Gleichungen (3) folgt, dafs 6 Funktionen, etwa $\varphi_0$, $\psi_0$, $\chi_0$, und $\varphi_1$, $\psi_1$, $\chi_1$, beliebig und die übrigen durch sie bestimmt sind. Diese 6 Funktionen sind so zu wählen, dafs den Grenzbedingungen genügt wird.

Im vorliegenden Falle lauten die Grenzbedingungen:

$$t_{13} = 0, \quad t_{23} = 0, \quad t_{33} = p_1 \text{ bezw. } p_2$$

für $z = \pm\delta$, wenn $\delta$ die halbe Plattendicke bedeutet. Ferner $u$, $v$, $w$ am zylindrischen Rande = bestimmten meſsbaren Gröſsen.

Drückt man $t_{13}$, $t_{23}$, $t_{33}$ durch die Verschiebungen aus, so erhält man bei Vernachlässigung der Glieder mit $\delta^4$, $\delta^5 \cdots$ (dünne Platten) folgende Gleichungen:

$$\varphi_1 + \frac{\partial \chi_0}{\partial x} + \delta\left(2\varphi_2 + \frac{\partial \chi_1}{\partial x}\right) + \delta^2\left(3\varphi_3 + \frac{\partial \chi_2}{\partial x}\right) + \delta^3\left(4\varphi_4 + \frac{\partial \chi_3}{\partial x}\right) = 0$$

$$\varphi_1 + \frac{\partial \chi_0}{\partial x} - \delta\left(2\varphi_2 + \frac{\partial \chi_1}{\partial x}\right) + \delta^2\left(3\varphi_3 + \frac{\partial \chi_2}{\partial x}\right) - \delta^3\left(4\varphi_4 + \frac{\partial \chi_3}{\partial x}\right) = 0$$

$$\psi_1 + \frac{\partial \chi_0}{\partial y} + \delta\left(2\psi_2 + \frac{\partial \chi_1}{\partial y}\right) + \delta^2\left(3\psi_3 + \frac{\partial \chi_2}{\partial y}\right) + \delta^3\left(4\psi_4 + \frac{\partial \chi_3}{\partial y}\right) = 0$$

$$\psi_1 + \frac{\partial \chi_0}{\partial y} - \delta\left(2\psi_2 + \frac{\partial \chi_1}{\partial y}\right) + \delta^2\left(3\psi_3 + \frac{\partial \chi_2}{\partial y}\right) - \delta^3\left(4\psi_4 + \frac{\partial \chi_3}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{m-1}{m-2}\cdot\chi_1 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right) + \delta\left\{2\cdot\frac{m-1}{m-2}\chi_2 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)\right\}$$
$$+\delta^2\left\{3\cdot\frac{m-1}{m-2}\chi_3 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right)\right\} + \delta^3\left\{4\frac{m-1}{m-2}\chi_4 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y}\right)\right\}$$
$$= p_1\cdot\frac{m+1}{m\cdot E}$$

$$\frac{m-1}{m-2}\chi_1 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right) - \delta\left\{2\cdot\frac{m-1}{m-2}\cdot\chi_2 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)\right\}$$
$$+\delta^2\left\{3\cdot\frac{m-1}{m-2}\chi_3 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right)\right\} - \delta^3\left\{4\cdot\frac{m-1}{m-2}\chi_4 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y}\right)\right\}$$
$$= p_2\cdot\frac{m+1}{m\cdot E}$$

$$\varphi_1 + \frac{\partial \chi_0}{\partial x} + \delta^2\left(3\varphi_3 + \frac{\partial \chi_2}{\partial x}\right) = 0 \tag{4}$$

$$\psi_1 + \frac{\partial \chi_0}{\partial y} + \delta^2\left(3\psi_3 + \frac{\partial \chi_2}{\partial y}\right) = 0 \tag{4a}$$

$$2\varphi_2 + \frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \delta^2\left(4\varphi_4 + \frac{\partial \chi_3}{\partial x}\right) = 0 \tag{5}$$

$$2\psi_2 + \frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \delta^2\left(4\psi_4 + \frac{\partial \chi_3}{\partial y}\right) = 0 \tag{5a}$$

$$\frac{m-1}{m-2}\chi_1 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right) + \delta^2\left(3\cdot\frac{m-1}{m-2}\chi_3 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right)\right) = (p_1 + p_2)\cdot\frac{m+1}{2mE} \tag{6}$$

$$2\cdot\frac{m-1}{m-2}\chi_2 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right) + \delta^2\left(4\cdot\frac{m-1}{m-2}\chi_4 + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y}\right)\right) = (p_1 - p_2)\cdot\frac{m+1}{2mE\cdot\delta}. \tag{6a}$$

In den Gleichungen (4) bis (6a) kommen die Funktionen $\varphi_0 \cdots \varphi_4$, $\psi_0 \cdots \psi_4$, $\chi_0 \cdots \chi_4$ vor und zwar gruppenweise derart, daſs (4), (4a), und (6a) nur die Funktionen $\varphi_1$, $\varphi_3$, $\psi_1$, $\psi_3$ und $\chi_0$, $\chi_2$, $\chi_4$ enthalten, dagegen (5), (5a), (6) die Funktionen $\varphi_0$, $\varphi_2$, $\varphi_4$, $\psi_0$, $\psi_2$, $\psi_4$ und $\chi_1$, $\chi_3$.

Entsprechend sollen nun mittels der Gleichungen (3) erst aus (4), (4a) und (6a), dann aus (5), (5a) und (6) diese Funktionen eliminiert werden.

Aus Gleichung (3) $c_0$ folgt:

$$(7) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -\frac{m-2}{m}\Delta \chi_0 - 4 \cdot \frac{m-1}{m}\chi_2,$$

aus (3) $c_2$:

$$(8) \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = -\frac{m-2}{3m}\Delta \chi_2 - 24 \cdot \frac{m-1}{3m} \cdot \chi_4,$$

und wenn man (3) $a_1$ nach $x$, (3) $b_1$ nach $y$ differenziert und addiert:

$$(9) \qquad 2 \cdot \frac{m-1}{m-2}\Delta\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right) + 6\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y}\right) + \frac{2m}{m-2}\Delta \chi_2 = 0.$$

Differenziert man ferner (4) und (4a) nach $x$ bezw. $y$ und addiert, so erhält man:

$$(10) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \Delta \chi_0 + \delta^2\left(3\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y}\right) + \Delta \chi_2\right) = 0.$$

Zunächst eliminiert man nun aus (6a) $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}$ und $\chi_4$, sodaſs entsteht:

$$(11) \quad 2 \cdot \frac{m-1}{m}\chi_2 - \frac{1}{m}\Delta \chi_0 - \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + \frac{\Delta \chi_2}{3}\right) = (p_1 - p_2) \cdot \frac{m+1}{2m \cdot E\delta}.$$

Aus Gleichung (9) und (10) erhält man weiter

$$(12) \quad 2 \cdot \frac{m-1}{m}\chi_2 - \frac{1}{m}\Delta \chi_0 = \frac{\delta^2}{2m}\{(m-1)\Delta\Delta \chi_0 + 2(2m-1)\Delta \chi_2\},$$

wobei

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Aus Gleichung (12) folgt, da $\delta$ klein sein soll, daſs in erster Annäherung:

$$(13) \qquad \chi_2 = \frac{1}{2(m-1)} \cdot \Delta \chi_0.$$

Mittels dieses Annäherungswertes für $\chi_2$ erhält man aus (12):

$$2 \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \chi_2 - \frac{1}{m}\Delta \chi_0 = \frac{m}{2}\delta^2 \cdot \Delta\Delta \chi_0,$$

und aus (9):

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + \frac{\Delta \chi_2}{3} = \frac{m}{6}\delta^2 \Delta\Delta \chi_0,$$

sodafs (6a) übergeht in:

$$\Delta\Delta\chi_0 = \frac{3}{2}\frac{(p_1 - p_2)}{E\delta^3}\cdot\frac{m^2-1}{m^2}, \tag{14}$$

eine Gleichung, die mit der von Grashof gegebenen identisch ist.

In ähnlicher Weise werden nun Gleichung (5), (5a) und (6) behandelt. Aus (5) und (5a) folgt, dafs in erster Annäherung:

$$2\varphi_2 = -\frac{\partial\chi_1}{\partial x}; \quad 2\psi_2 = -\frac{\partial\chi_1}{\partial y};$$

aus Gleichung (3) $a_0$ also:

$$\Delta\varphi_0 + \frac{2}{m-2}\frac{\partial\chi_1}{\partial x} + \frac{m}{m-2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right) = 0,$$

aus (3) $b_0$:

$$\Delta\psi_0 + \frac{2}{m-2}\frac{\partial\chi_1}{\partial y} + \frac{m}{m-2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right) = 0,$$

und wenn man in Gleichung (6) das Glied mit $\delta^2$ vernachlässigt, $p_1$ und $p_2$ konstant voraussetzt und nach $x$ bezw. $y$ differenziert:

$$\Delta\varphi_0 + \frac{m+1}{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right\} = 0 \tag{15}$$

$$\Delta\psi_0 + \frac{m+1}{m-1}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right\} = 0. \tag{16}$$

Die Gleichungen (14), und (15) und (16) lösen das Problem vollständig, denn aus $\varphi_0, \psi_0, \chi_0$ setzen sich die Verschiebungen der Plattenmittelebene zusammen, und $\varphi_1, \psi_1, \chi_1 \cdots$ sind aus ihnen in der angegebenen Weise bestimmbar. Am zylindrischen Rande haben $\varphi_0, \psi_0, \chi_0, \frac{\partial\chi_0}{\partial x}$ und $\frac{\partial\chi_0}{\partial y}$ bestimmte gegebene Werte und sind demgemäfs aus den Gleichungen (14), (15) und (16) zu berechnen.

Bemerkenswert ist, dafs die Verschiebungen $\chi_0$ senkrecht zur Mittelebene unabhängig von den in der Mittelebene stattfindenden Verschiebungen $\varphi_0$ und $\psi_0$ sind. Wenn also die Art der Einspannung derartig ist, dafs sich $\varphi_0$ und $\psi_0$, nicht aber $\chi_0, \frac{\partial\chi_0}{\partial x}$ und $\frac{\partial\chi_0}{\partial y}$ am Rande ändern können, dann ändert sich $\chi_0$ überhaupt nicht. Dagegen ändern sich die Spannungen. — z. B. $t_{11}$ entsprechend dem Werte $\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}$

$t_{22}$ „ „ „ $\frac{\partial\psi_0}{\partial y}$

$t_{21}$ „ „ „ $\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial\psi_0}{\partial x}$

Im Folgenden soll für den Fall der beliebig eingespannten Kreisplatte und der fest eingespannten elliptischen Platte die Anwendbarkeit der Entwickelungen gezeigt werden.

a) Beliebig eingespannte Kreisplatte.

Man setze: $R$ = Radius der Scheibe

$\zeta$ = Verschiebung am Rande $\perp$ zur Mittelebene

$\eta$ = „ „ „ in der „

$\vartheta$ = Winkel der Plattenmittelebene mit der $xy$Ebene am Rande.

Der Ansatz:

$$\chi_0 = \zeta + \frac{\vartheta}{2R}(R^2 - r^2) + \frac{3}{128}\frac{p_1 - p_2}{E\delta^3}\frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot (R^2 - r^2)^2,$$

wobei

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

genügt der Gleichung (14):

$$\varDelta\varDelta\chi_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{E\delta^3} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2}$$

und den Randbedingungen, die Ansätze:

$$\varphi_0 = \eta \cdot \frac{x}{R}; \qquad \psi_0 = \eta \cdot \frac{y}{R}$$

den Gleichungen (15) und (16) und der Randbedingung, sodafs durch diese Funktionen $\varphi_0$, $\psi_0$, $\chi_0$ die Verschiebungen der Mittelebene einer gleichförmig belasteten beliebig eingespannten Kreisplatte definiert sind. Es war allgemein:

$$u = \varphi_0 + z\varphi_1 + z^2\varphi_2 \cdots$$

$$v = \psi_0 + z\psi_1 + z^2\psi_2$$

$$w = \chi_0 + z\chi_1 + z^2 \cdot \chi_2$$

Nun ist nach Gleichung (4) und (4a)

$$\varphi_1 = -\frac{\partial\chi_0}{\partial x}; \qquad \psi_1 = -\frac{\partial\chi_0}{\partial y},$$

nach Gleichung (5) und (5a)

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial\chi_1}{\partial x}; \qquad \psi_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial\chi_1}{\partial y}$$

und nach Gleichung (6) $\chi_1$ = constant, d. h. $\frac{\partial\chi_1}{\partial x} = \frac{\partial\chi_1}{\partial y} = 0$. Ferner nach Gleichung (13):

$$\chi_2 = \varDelta\chi_0 \cdot \frac{1}{2(m-1)};$$

daher lauten die Verschiebungen eines beliebigen Plattenpunktes

$$u = \varphi_0 - z \cdot \frac{\partial \chi_0}{\partial x};$$

$$v = \psi_0 - z \cdot \frac{\partial \chi_0}{\partial y};$$

$$w = \chi_0 + z \cdot \chi_1 + z^2 \cdot \frac{\varDelta \chi_0}{2(m-1)};$$

daraus lassen sich dann Spannungen u. s. w. in bekannter Weise durch einfache Rechnung ableiten. Dieser Fall dürfte wegen der vollkommenen analytischen Lösung besonders für vergleichende Versuche geeignet sein.

b) Fest eingespannte elliptische Platte.

Man setze a und b gleich den Halbachsen der Ellipse. Der Ansatz:

$$\chi_0 = \frac{3}{16} \frac{(p_1 - p_2)}{E\delta^3} \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{1}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2} (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^2$$

genügt der Gleichung (14), den Bedingungen

$\chi_0 = 0$, $\frac{\partial \chi_0}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial \chi_0}{\partial y} = 0$ für $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, d. h. für den Rand der elliptischen Platte.

Die Ansätze $\varphi_0 = 0$ und $\psi_0 = 0$ genügen den Gleichungen (15) und (16) und der Bedingung am Rande.

Ferner ist ganz wie vorhin

$$\varphi_1 = -\frac{\partial \chi_0}{\partial x}; \quad \psi_1 = -\frac{\partial \chi_0}{\partial y}, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi_1}{\partial x} = 0, \quad \psi_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi_1}{\partial y} = 0$$

$$\chi_1 = \text{constant}, \quad \chi_2 = \frac{\varDelta \chi_0}{2(m-1)}.$$

Demgemäfs sind ganz allgemein die Verschiebungen $u$, $v$, $w$ eines Punktes der gleichförmig belasteten festeingespannten elliptischen Platte:

$$u = -z \cdot \frac{\partial \chi_0}{\partial x} = -\frac{2b^2C}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2} z \cdot x \cdot (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$$

$$v = -z \cdot \frac{\partial \chi_0}{\partial y} = -\frac{2a^2C}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2} z \cdot y(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$$

$$w = \frac{C}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2} \cdot (b^2x^2 + a^2x^2 - a^2b^2)^2 + z \cdot \chi_1 + z^2 \frac{\varDelta \chi_0}{2(m-1)},$$

wenn

$$C = \frac{3}{16} \frac{(p_1 - p_2)}{E\delta^3} \frac{m^2 - 1}{m^2}$$

gesetzt wird.

Hieraus lassen sich dann wieder die Spannungen u. s. w. ableiten.

Es mag bemerkt werden, daſs die Spannungen eines beliebigen Punktes gemäſs der Form von $u$, $v$, $w$ stets den Faktor $\frac{1}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2}$ enthalten müssen. Folglich muſs auch ein richtig abgeleiteter Mittelwert diesen Faktor enthalten.

Dies ist bei der v. Bach'schen[1]) Ableitung im Gegensatz zur Föppl'schen[2]) der Fall. Daher ist erstere bei der praktischen Berechnung der Spannung vorzuziehen.

Was den Fall der fest eingespannten rechteckigen Platte angeht, so ist schon von Grashof[3]) die Unmöglichkeit der analytischen Lösung mittels der Elastizitätsgleichungen nachgewiesen. Der Grund dafür liegt darin, daſs bei Ableitung der Elastizitätsgleichungen Stetigkeit der Oberflächenkräfte vorausgesetzt wird, während bei der rechteckigen Platte am Rande Sprünge der Kräfte auftreten.

Doch giebt es auch für diesen Fall Einspannungsarten, die eine analytische Lösung zulassen und für den Versuch leicht verwirklicht werden können. Man setze z. B.:

$$\chi_0 = \tfrac{3}{16}\frac{p_1 - p_2}{E\delta^3} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2}(a^2 - x^2)(b^2 - y^2),$$

wobei $2a$ und $2b$ die Rechteckseiten sind,

$$\varphi_0 = \psi_0 = 0.$$

Es genügen diese Ansätze den Gleichungen (14), (15) und (16), ferner den Randbedingungen

$$\varphi_0 = \psi_0 = \chi_0 = 0,$$

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial x} = -\,Cx(b^2 - y^2) \quad \text{für} \quad x = \pm a$$

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial y} = -\,Cy(a^2 - x^2) \quad \text{für} \quad y = \pm b.$$

Eine derartige Einspannung wird durch federnde Wände (s. die Figur auf S. 134), wie sie von Zeiſsig[4]) beschrieben worden sind, erreicht. $u$, $v$ und $w$ werden also:

$$u = -\,z \cdot \frac{\partial \chi_0}{\partial x};$$

$$v = -\,z \cdot \frac{\partial \chi_0}{\partial y};$$

$$w = \chi_0 + z \cdot \chi_1 + z^2 \cdot \frac{\Delta \chi_0}{2(m-1)}.$$

---

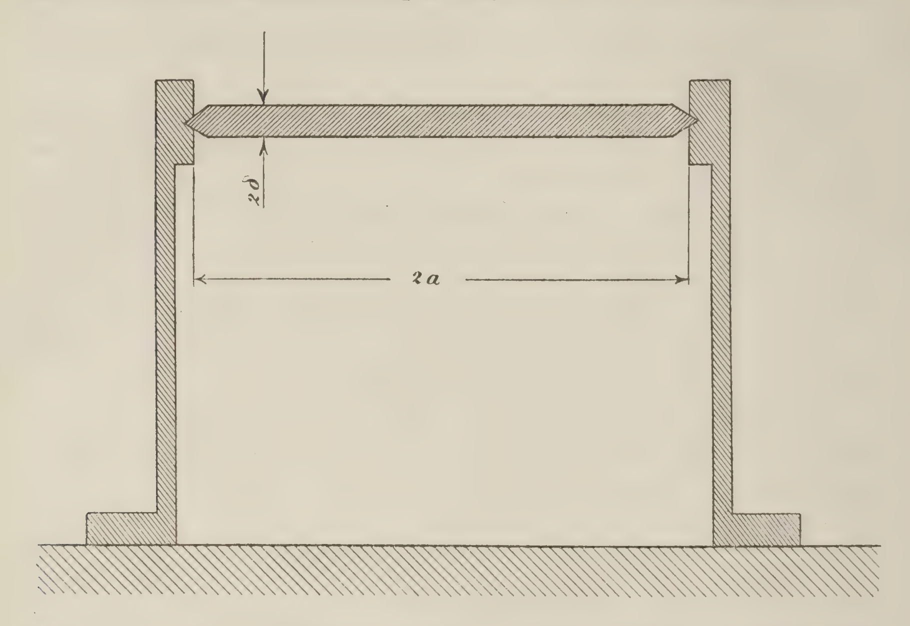
1) Bach, Elastizität und Festigkeit, Berlin 1894. S. 412.

2) Föppl, Vorlesungen über techn. Mechanik, Band III Festigkeitslehre, Leipzig 1897. S. 217.

3) Grashof, die Festigkeitslehre, Berlin 1878. S. 365.

4) C. Zeiſsig, Annalen der Physik und Chemie, Band 64, 1898.

Das zusammenfassende Ergebnis vorliegender Untersuchung lautet also: Die Deformationen und Spannungen der in der eben beschriebenen




Weise eingespannten Rechteckplatte, der fest eingespannten elliptischen Platte, der beliebig eingespannten Kreisplatte sind bei gleichförmiger Belastung analytisch genau darstellbar und durch Versuch leicht nachzuprüfen.

---

## Kleinere Mitteilungen.

### Wer hat den Läufer des Rechenschiebers zuerst erfunden?

Seit einem halben Jahrhundert herrscht unbestritten die Ansicht, der an den meisten Rechenschiebern (von den englischen abgesehen) vorhandene sog. Läufer sei um das Jahr 1850 von A. Mannheim eingeführt worden. Die folgenden, der „Instruction sur la manière de se servir de la règle à calcul, dite règle anglaise on Sliding Rule, ...“ von Ph. Mouzin, 3e édition, Paris 1837, p. 109 entnommenen Sätze werden uns eines andern belehren: On ajoute quelquefois à la règle à calcul une pièce en cuivre qui peut glisser le long de l'instrument. Elle donne le moyen d'établir plus exactement la coïncidence des traits de la ligne[1]) supérieure avec ceux

1) Ligne, englisch line, bedeutet hier Skala.

des lignes des sinus et tangentes. On peut encore s'en servir pour marquer le point où l'on est arrivé par une première opération, lorsqu'on a besoin d'en faire une seconde pour parvenir au résultat. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, dafs hier unter der „pièce en cuivre qui peut glisser le long de l'instrument" eine Vorrichtung zu verstehen ist, ähnlich dem heutigen Läufer — Zweck und Gebrauch desselben könnten gar nicht deutlicher beschrieben werden — der demnach nicht erst gegen 1850, sondern schon 1837 angewandt wurde. Den Namen des ersten Erfinders lernen wir freilich nicht kennen. Dafs der Läufer mit dem Rechenschieber selbst aus England nach Frankreich gekommen wäre, ist nicht wahrscheinlich, da die Engländer sich heute noch nicht mit dem Läufer befreunden können.[1]) Die Geschichte des Rechenschiebers bedarf noch in manchen Punkten der Aufklärung, und es wäre eine Mitteilung über den eigentlichen Ursprung des Läufers, über welchen nachzuforschen diese Zeilen eine Anregung geben möchten, nicht am wenigsten zu begrüfsen. M.

---

## Ein frühes Beispiel einer Anamorphose.

Wird eine zur Funktion $z = f(x, y)$ gehörige graphische Tafel, bestehend in den zu verschiedenen Werten $z_0, z_1, z_2, \ldots$ von $z$ gehörigen und mit diesen Werten bezifferten (kotierten) Kurven mit den Gleichungen

$$f(x, y) = z_0,\ f(x, y) = z_1,\ f(x, y) = z_2, \ldots,$$

durch eine Koordinatentransformation so umgewandelt, dafs jene Kurven in einfachere, insbesondere in gerade Linien übergehen, so heifst bekanntlich dieser Vorgang eine Anamorphose.[2]) Man scheint bisher nicht im mindesten daran gezweifelt zu haben, dafs vor Léon Lalanne, der 1843 den Begriff der Anamorphose allgemein entwickelt hat[3]), niemand eine solche ausgeführt habe. Wir sind jedoch in der Lage, eine derartige Umwandlung aus dem Jahre 1828 nachzuweisen. Sie findet sich in dem Schriftchen von K. Tenner, Kurze Beschreibung eines Planimeters oder allgemeinen Inhaltsmessers zum Gebrauch bei Landesvermessungen und für praktische Geometrie . . ., Darmstadt 1828, kl. $8^0$, 24 S. mit 3 Kupfertafeln. Es werden in diesem Schriftchen graphisch-mechanische Hilfsmittel zur Bestimmung der Inhalte von Dreiecken dargeboten. Vorausgesetzt ist, dafs die Grundlinien der (durch Zerlegung von Parzellen entstandenen) Dreiecke auf dem Felde gemessen, also zahlenmäfsig gegeben, die Höhen der Dreiecke dagegen aus einem vorhandenen Plane abgestochen, d. h. als Strecken gegeben seien. Eine graphische Tafel mit einer Schar von Hyperbeln,

---

1) In dem Katalog der Firma W. F. Stanley-London wird ein Rechenschieber mit Läufer als Gravet's slide rule (so genannt nach der ehemaligen Firma Gravet, jetzt Tavernier-Gravet in Paris) aufgeführt. Erskine Scott teilt in seiner Short table of logarithms and anti-logarithms to ten places of decimals, London 1897, p. XV mit, dafs er 1870 selbständig auf den Läufer, den er synthetic index nennt, gekommen sei.

2) S. etwa Encyklopädie der mathem. Wissensch., Bd. I, p. 1030, 1032.

3) Pariser Comptes rendus, t. 16, p. 1162.

welche die Koordinatenachsen zu Asymptoten haben, wie ähnliche Tafeln später wieder vorgeschlagen und auf Glas gezeichnet in den Handel gebracht worden sind[1]), bildet Fig. 7. Die Abscissen entsprechen den Grundlinien oder halben Grundlinien der Dreiecke, die mit dem Zirkel aufzutragenden Ordinaten den Höhen derselben; an den Hyperbeln werden die Inhalte abgelesen. Aber in Fig. 1 ist die Abscissenachse nach dem Gesetz $x' = \frac{1}{x}$ geteilt, wodurch statt der Hyperbeln sich gerade Linien ergeben haben, und zwar ist dieses Ergebnis kein zufälliges, sondern ein von Tenner gewolltes. Also ein Beispiel einer wirklichen Anamorphose, 15 Jahre älter, als die erste Veröffentlichung von Lalanne! M.

---

## Auskünfte.

*H. O., A.* Sie fragen, was in Sachen der Zehnteilung von Zeit und Kreisumfang in Deutschland geschehen sei? Ausführliche Angaben finden Sie in dem, im Namen der „Tafelkommission" der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1899 erstatteten Bericht über Winkelteilung, von welchem Ihnen ein Abdruck zugehen wird. Am meisten Vorteile gewährt und zugleich am verbreitetsten ist (nächst der alten Winkelteilung) die dezimale Teilung des rechten Winkels („neue Teilung"), welche seit dem Erscheinen jenes Berichts besonders in Frankreich nicht unwesentliche Fortschritte in Bezug auf Wertschätzung und Verbreitung gemacht hat (vgl. dazu diese Zeitschrift Bd. 46 S. 484, 485 und Bd. 47 S. 266, 492). Die in dem erwähnten Bericht nur gestreifte Frage der Zehnteilung der Zeit ist in Deutschland noch wenig erörtert und gefördert worden (vgl. etwa diese Zeitschrift Bd. 47 S. 266, Schrift von P. Crüger), dagegen viel in Frankreich, namentlich durch den unermüdlichen J. de Rey-Pailhade, der erst kürzlich wieder, auf dem Kongreſs der Association française pour l'avancement des sciences in Montauban (7.—15. August d. J.), zwei Vorträge darüber gehalten hat („Tables manuscrites étendues pour l'application du système décimal à la mesure du temps et de la circonférence", „Considérations sur le choix d'une nouvelle unité physique de temps décimal"). M.

---

1) Z. B. 1883 von M. Kloth. Eine graphische Multiplikationstafel mit gleichseitigen Hyperbeln hatte bereits Pouchet 1797 angegeben, vgl. Encyklopädie, Bd. I, p. 1029.

# Bücherschau.

**C. Neumann. Über die Maxwell-Hertzsche Theorie.** Sonderabdruck aus den: Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 27, No. II. Leipzig (B. G. Teubner), 1901. 138 S. Preis 3,50 Mk.

Die Maxwellschen Differentialgleichungen der Elektrodynamik, welche zunächst nur für unbewegte Körper aufgestellt sind, hat bekanntlich Hertz auf den allgemeinen Fall eines in substantieller Bewegung befindlichen Systems ausgedehnt.

Ein genaues Studium dieser allgemeineren Maxwell-Hertzschen Gleichungen (der „Maxwell-Hertzschen Theorie"), insbesondere hinsichtlich der Folgerungen, welche sich aus ihnen streng ableiten lassen, bildet den Inhalt der vorliegenden Abhandlung. Es mufs zunächst hervorgehoben werden, dafs der Verf. aus dem angegebenen Grunde von einer etwaigen Herleitung der Maxwellschen Gleichungen von vornherein keinen Gebrauch macht; die Existenz der in Rede stehenden Gleichungen ist die wesentliche Hypothese, welche den Untersuchungen zu Grunde liegt. Auch über die elektrischen und magnetischen Kräfte, deren Komponenten in jenen Gleichungen auftreten, werden keine weiteren Voraussetzungen gemacht, als dafs sie durch Vektoren analytisch darstellbar sind. Da ferner die Untersuchung frei ist von irgend welchen willkürlichen neuen Annahmen, so „dürfte die Abhandlung ein getreues Abbild der Maxwell-Hertzschen Theorie oder vielmehr derjenigen Folgerungen darbieten, welche sich aus dieser Theorie mit Notwendigkeit ergeben".

Die Untersuchungen selbst sind in sechs Kapitel eingeteilt, von denen das erste das umfangreichste ist. Dieses enthält, nachdem die Maxwellschen Gleichungen für ein ruhendes System aufgestellt sind, die Ableitung der allgemeineren für ein bewegliches System vermittelst der Hertzschen Hypothesen, dafs die Zahlen der durch ein beliebiges Oberflächenelement hindurchgehenden elektrischen und magnetischen Kraftlinien von der Bewegung unabhängige Werte besitzen, nämlich diejenigen, welche sich für ein ruhendes System aus den Maxwellschen Gleichungen ergeben. Man erhält dann die allgemeinen Hertzschen Grundgleichungen der Elektodynamik in folgender, hier der Vollständigkeit wegen mitgeteilten Form:

Erste Gruppe:

$$\frac{\varDelta \mathfrak{X}}{dt} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - 4\pi u,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Zweite Gruppe:

$$\frac{\varDelta \mathfrak{L}}{dt} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots;$$

hierin bedeuten $\frac{\varDelta \mathfrak{X}}{dt}, \cdots \frac{\varDelta \mathfrak{L}}{dt}, \cdots$ folgende Abkürzungen

$$\frac{\varDelta \mathfrak{X}}{dt} = \frac{d\mathfrak{X}}{dt} + \mathfrak{X}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) - \left(\mathfrak{X}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$\frac{\varDelta \mathfrak{L}}{dt} = \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \mathfrak{L}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) - \left(\mathfrak{L}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \mathfrak{M}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \mathfrak{N}\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die durch Punkte angedeuteten Gleichungen entstehen aus den jeweilig darüberstehenden durch gleichzeitige cyklische Vertauschung der Gröſsen:

$$\begin{matrix} x, & \mathfrak{X}, & \mathfrak{L}, & u, & \alpha \\ y, & \mathfrak{Y}, & \mathfrak{M}, & v, & \beta \\ z, & \mathfrak{Z}, & \mathfrak{N}, & w, & \gamma. \end{matrix}$$

Diese haben folgende physikalische Bedeutungen: Die Gröſsen $x$, $y$, $z$ sind die kartesischen Koordinaten desjenigen Punktes eines mit der Geschwindigkeit $(\alpha, \beta, \gamma)$ bewegten Systems, an welchem zur Zeit $t$ eine elektromotorische Kraft $\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$, eine elektrische Strömung $(u, v, w)$ und eine magnetische Kraft $\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}, \frac{\mathfrak{M}}{\mu}, \frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)$ herrschen, wobei $\varepsilon$ die Dielektrizitätskonstante und $\mu$ die magnetische Permeabilität bezeichnen. Die Maxwellschen Gleichungen ergeben sich aus den vorstehenden für den Fall $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Nach der Ableitung der Hertzschen Differentialgleichungen giebt nun Herr C. Neumann den strengen Beweis des von Hertz nur andeutungsweise begründeten Fundamentalsatzes, welcher aussagt, daſs die Form der Differentialgleichungen von der Wahl des kartesischen Koordinatensystems $(x, y, z)$ unabhängig ist. Was den Beweis selbst anlangt, so besteht er in einer direkten Ausrechnung der Differentialgleichungen, welche bei einer Koordinatentransformation aus den obigen hervorgehen — eine Beweisführung, die nach Ansicht des Ref. zwar durch den augenblicklichen Stand des in Betracht kommenden Teiles der Invariantentheorie geboten, die aber insofern etwas unbefriedigendes zu besitzen scheint, als sich doch schon aus der äuſseren Form der Differentialgleichungen selbst die Eigenschaft ihrer Invarianz ergeben müſste.

Zum Schluſs des ersten Kapitels wird der zur Einführung von Potentialen notwendige Satz bewiesen, daſs die den elektrischen und magnetischen Zustand definierenden Komponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ im Unendlichen wie $\frac{1}{\varrho^2}$ verschwinden, unter $\varrho$ den Abstand des unendlichfernen Punktes vom Nullpunkte verstanden.

Im zweiten und dritten Kapitel werden die elektrischen und magnetischen Dichtigkeiten und die Verteilung von Elektrizität und Magnetismus in

einem aus Leitern und Nichtleitern, permanent- und temporär-magnetischen Körpern znsammengesetzten System untersucht.

Das vierte Kapitel ist betitelt: „Allgemeine Untersuchungen auf Grund der Hertzschen Differentialgleichungen“. Es wird hier zunächst eine „Transfiguration“ der Gleichungen vorgenommen, indem die Newtonschen Potentiale der freien Elektrizität und des freien Magnetismus eingeführt werden. Die gewonnenen Resultate werden auf spezielle Fälle angewendet. In diesem Kapitel zeigt sich ferner, dafs die durch die Formeln

$$\mathsf{E}_e = \int \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon} dv,$$

$$\mathsf{E}_m = \int \frac{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}{8\pi\varepsilon} dv$$

definierten Energieen — die Integrale über den unbegrenzten Raum erstreckt — infolge der Hertzschen Grundgleichungen dem allgemeinen Energieprinzip sich unterordnen. Hier finden sich auch diejenigen Relationen, durch welche die durch die elektrischen und magnetischen Zustände bei der Bewegung des Systems hervorgerufenen ponderomotorischen Kräfte bestimmt werden.

In den beiden letzten Kapiteln werden die Probleme der Elektrostatik und Magnetostatik behandelt. Um das Wesen der Maxwell-Hertzschen Theorie heller zu beleuchten, wird die Theorie von Poisson zum Vergleich herangezogen. Die Verschiedenheit der Resultate tritt dann sogleich hervor, wenn man z. B. in einem System (Isolator und Konduktor in Luft) die Dielektrizitätskonstanten der Luft und des Isolators als im allgemeinen verschieden betrachtet — beide Theorien sind dagegen im Einklang, sobald die betrachteten Dielektrizitätskonstanten einander gleich sind.

Charlottenburg. Rudolf Rothe.

---

**Die Fortschritte der Physik im Jahre 1902.** Dargestellt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. *Halbmonatliches Litteraturverzeichnis*, redigiert von Karl Scheel (reine Physik) und Richard Assmann (kosmische Physik). Braunschweig (Friedr. Vieweg und Sohn) 1902. I. Jahrgang. Preis 4 Mk.

Diese neue bibliographische Erscheinung der physikalischen Litteratur hilft zweifellos einem bisher vorhandenen Mangel ab, indem sie den physikalischen Leser in den Stand setzt, in kürzester Zeit und bequem von den neu erschienenen Publikationen seines Arbeitsgebiets Kenntnis zu nehmen. Der Stoff ist sachlich geordnet entsprechend der Einteilung in den „Fortschritten der Physik“, sodafs die Leichtigkeit der Orientierung nichts zu wünschen übrig läfst.

Da das „halbmonatliche Litteraturverzeichnis“ hinsichtlich der Citate mit den „Fortschritten“ übereinstimmt, so ist auch eine dauernde Gewähr für die hinreichende Vollständigkeit der Angaben vorhanden. Man wird sowohl der Redaktion der „Fortschritte“ wie auch der Verlagsbuchhandlung für die Einrichtung dieses leicht zu beschaffenden Litteraturverzeichnisses Dank wissen.

Charlottenburg. Rudolf Rothe.

**J. H. van't Hoff. Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie.** Erstes Heft, Die chemische Dynamik, 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn 1901. Geb. 7 Mk.

Das vorliegende Werk giebt den Inhalt der Vorlesungen van't Hoffs über „Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie" in erweitertem Umfange wieder. Von den drei Teilen der Arbeit dürfte vorzugsweise der erste — die chemische Dynamik enthaltende — den Physiker und Mathematiker ebenso wie den Chemiker interessieren, während der 2. und 3. Teil wohl nur den letzteren beschäftigen werden. Denn der 2. Teil — die chemische Statik — handelt von der chemischen Konstitution, der Lagerung und gegenseitigen Bindung der Atome, der 3. Teil ist beschreibender Natur und giebt die Beziehungen an, welche zwischen den chemischen und physikalischen Eigenschaften einerseits und der Zusammensetzung andererseits bestehen. Die Einteilung in chemische Dynamik und chemische Statik rührt von Lothar Meyer her. Die Dynamik enthält nicht allein die Lehre von der chemischen Umwandlung und der Reaktionsgeschwindigkeit, sondern auch die Lehre vom chemischen Gleichgewicht, die man im physikalischen Sinne vielleicht zur Statik rechnen würde. Indessen kann man das Wesen der chemischen Gleichgewichtszustände am besten erkennen, wenn man sie als Bewegungsvorgänge auffafst, bei denen die auf beiden Seiten der Reaktionsgleichungen vorkommenden Molekelgruppen in äquimolekularer Menge auseinander hervorgehen, wodurch die Zusammensetzung der Mischung konstant erscheint.

Bei einem einheitlichen Körper ist das Gleichgewicht nur vom Druck und der Temperatur abhängig, demnach wird durch graphische Darstellung die Beschreibung der in dem Buche behandelten Gleichgewichtszustände vervollständigt, während der zweite Hauptsatz der Thermodynamik Bestätigungen und Ergänzungen liefert. Als Beispiele sind für das physikalische Gleichgewicht eines einheitlichen Körpers das Benzol, für das chemische Gleichgewicht die Cyansäure und der Schwefel gewählt, also Fälle, die in experimenteller Hinsicht genau bekannt sind. Etwas ungewöhnlich erscheint es, dafs als Einheiten das Kilogramm und das Meter benutzt werden. In den folgenden Abschnitten werden die Gleichgewichtszustände bei zwei, drei und vier Körpern untersucht. Tiefere Einblicke in solche Gleichgewichtszustände werden dann gewonnen auf Grund molekular-mechanischer Vorstellungen, die im Gesetz von Guldberg und Waage formuliert werden (§ 2). Nachdem die Ableitung dieses Gesetzes auf kinetischem und auf thermodynamischem Wege gegeben ist, wird es auf die experimentell genau bekannten Gleichgewichte beim Jodwasserstoff und beim Stickstoffperoxyd sowie auf mehrere Fälle homogener Mischungen von Nicht- und Halbelektrolyten — schwache Säuren und Basen — angewandt. Im letztern Falle gilt das Ostwaldsche Dissoziationsgesetz. Bei Elektrolyten ist das nicht der Fall, daher beschränkt sich hier die Darstellung auf die Vergleichung einer Reihe von experimentellen Resultaten mit den aus einer empirischen Formel gefundenen Werten. Etwas weiter eindringende theoretische Betrachtungen sind bei der Hydrolyse der Salze angestellt, da in diesem Falle eine der Komponenten oder beide nur schwach elektrolytisch gespalten sind. Mit Berücksichtigung der elektrolytischen Dissoziation des Wassers ist es nunmehr möglich, die für die genaue Beschreibung der

Hydrolyse allgemein gültigen fünf Gleichungen aufzustellen. Die Ableitung der Formel für das Teilungsverhältnis $\frac{x}{1-x}$ einer Base zwischen zwei Säuren, wenn Säuren und Basis in molekularem Verhältnis zusammengebracht werden, bildet eine weitere Anwendung des Gesetzes von Guldberg und Waage. Bis hierher ist der Einflufs der Temperatur auf das homogene Gleichgewicht nicht in Betracht gezogen. Die Berücksichtigung der Temperatur führt nun zu einer neuen, auch für das heterogene Gleichgewicht gültigen Gleichung $\left(\frac{dk}{dT}=\frac{q}{2T^2}\right)$, die zusammen mit der Gleichung $\sum nl \cdot C = k$ allgemeinere Schlufsfolgerungen gestattet. Um den Einflufs festzustellen, den eine Änderung des Volumens und des Druckes auf einen Gleichgewichtszustand ausübt, braucht nur beachtet zu werden, ob und in welcher Weise die Molekelanzahl sich ändert, wenn das erste System in das zweite übergeht. Dazu genügt aber die Kenntnis der Reaktionsgleichung. Um den Einflufs kennen zu lernen, den eine Temperaturänderung hervorbringt, braucht man die Wärmetönung zu kennen. Die Integration der obigen Gleichung ergiebt für ein konstantes $q$ und für $T=0$, $k=\infty$, d. h. es mufs beim absoluten Nullpunkte $C_1$ oder $C_2$ Null werden. Da nun die meisten chemischen Prozesse sich bei Temperaturen abspielen, die nicht übermäfsig weit vom absoluten Nullpunkte entfernt sind, so ist es erklärlich, dafs das Berthelotsche „Prinzip der maximalen Arbeit“ in so vielen Fällen zutrifft. Dafs hier kein Prinzip vorliegt, hat man zwar schon längst erkannt, die nähere Begründung dafür ist aus van't Hoffs Darstellung klar ersichtlich.

Im zweiten Teile des Buches wird die Reaktionsgeschwindigkeit behandelt. Wenn es auch an Erfahrungsthatsachen auf diesem Gebiete nicht fehlt, so ist doch bislang eine eingehende theoretische Verfolgung der Vorgänge nicht ausführbar, da als neue Variable die Zeit auftritt und die Thermodynamik daher nicht anwendbar ist. Bisher ist man nur auf kinetischem Wege zu Resultaten gelangt, die in vielen Fällen durch die Erfahrung bestätigt wurden. Immerhin verschafft die Anwendung des zweiten Hauptsatzes insofern einen genaueren Einblick als die maximale Arbeit, die ein Prozefs leisten kann, in naher Beziehung zur Gröfse der Reaktionsgeschwindigkeit steht, auch läfst sich die als „Affinität“ bezeichnete Ursache eines chemischen Vorganges in einzelnen Fällen an der elektromotorischen Kraft messen, die in einer geeigneten Kette erzeugt wird. Zwischen der Reaktionsgeschwindigkeit und der im Gesetz von Guldberg und Waage ausgesprochenen Gleichgewichtsbedingung findet derselbe Zusammenhang statt wie zwischen Dampfdruck und Verdampfungsgeschwindigkeit. In mathematischer Beziehung bieten sich keine Schwierigkeiten, wenn eines der beiden Systeme stark vorherrscht, weil dann nur die Konzentrationen dieses Systems vorkommen. In einzelnen Fällen ist es sogar möglich gewesen, aus der Vergleichung der experimentellen Resultate und der Grundgleichung die Molekelanzahl zu bestimmen, z. B. bei der Bildung von Cyamelid aus Cyansäure. Es wird ferner durch den Versuch bestätigt, dafs die Gleichgewichtskonstante, wie es die kinetische Betrachtungsweise verlangt, bei der Bildung des Äthylacetats aus seinen Komponenten gleich dem Quotienten der beiden Geschwindigkeitskonstanten ist, die in diesem Falle

bestimmbar sind. Im Anschlufs an die theoretisch noch einigermafsen zugänglichen Vorgänge wird noch eine Anzahl empirischer Resultate über die Reaktionsgewindigkeit besprochen, aus denen hervorgeht, dafs sich verhältnismäfsig wenige Reaktionen zur Bestimmung solcher Geschwindigkeiten eignen, da der Verlauf meist sehr schnell erfolgt. Auch hat bekanntlich die Temperatur einen sehr beschleunigenden Einflufs. Soviel möge über den reichhaltigen Inhalt des Buches gesagt sein, für dessen Veröffentlichung besonders diejenigen älteren Chemiker und Physiker dankbar sein werden, deren akademische Ausbildung in eine Zeit fiel, in der von der Anwendung der Thermodynamik auf chemische Probleme noch wenig die Rede war. — In Bezug auf die Form der Veröffentlichung möge noch eine Bemerkung gestattet sein. Das Buch würde leichter lesbar sein, wenn die sprachliche Form nicht so viele Abweichungen von der gebräuchlichen deutschen Ausdrucksweise zeigte. An einigen Stellen wirkt dieser Umstand sehr störend. Selbstverständlich kann man wegen dieser sprachlichen Eigentümlichkeiten dem Verfasser keinen Vorwurf machen, doch würde es gewifs leicht gewesen sein, wenigstens in der vorliegenden zweiten Auflage dem erwähnten Übelstande abzuhelfen. Auch eine Anzahl von Druckfehlern der ersten Auflage findet sich in der zweiten wieder, geändert ist nur die unrichtige Schreibweise der Differentialquotienten. Die Litteraturangaben sind sehr zahlreich.

Hannover, Juli 1902. PAUL BRÄUER.

---

**H. Ehrhardt,** Katastergeometer. **Neues System der Flächenberechnung und Flächenteilung mit Hilfe einer Planimetrischen Tafel, welche zugleich als Produkten- und Quadrattafel dient nebst einer Sinustafel welche in Verbindung mit der Planimetrischen Tafel bei der Koordinatenberechnung die Logarithmen- und Koordinaten-Tafeln mit Vorteil ersetzt und zugleich als Sehnentafel zu gebrauchen ist.** $8^0$, 71 S. Text, 20 u. IX S. Zahlen-Tafeln, 38 Fig. auf 3 lith. Tafeln. Stuttgart 1900, Konrad Wittwer. Preis 3,50 Mk. kart. 4 Mk.

Bekanntlich hat (vgl. Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, Bd. I, S. 948) Ludolff 1690 gezeigt, wie auf Grund der Formel

$$a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

mit Hilfe einer Quadrattafel die Bestimmung des Produktes zweier Zahlen auf Addition und Subtraktion zurückgeführt werden kann. Die hierbei noch nötigen Halbierungen hat Voisin 1817 durch Anwendung einer Tafel der Viertelquadrate und der Formel

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

vermeiden gelehrt. Weil nun bei der Berechnung der Inhalte ebener Vielecke durch Zerlegung in Dreiecke *halbe* Produkte zu bilden sind, geht der Verfasser noch einen Schritt weiter, indem er gemäfs der Formel

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{(a+b)^2}{8} - \frac{(a-b)^2}{8}$$

eine Tafel der Achtelquadrate benützt, die er planimetrische Tafel nennt. Er giebt eine solche auf 20 Oktavseiten. Sie enthält die auf Ganze abgerundeten Achtelquadrate der Zahlen 0,1; 0,2; 03 u. s. w. bis 999,9; Randzettel erleichtern, besonders bei umgekehrter Benützung der Tafel, die Handhabung. Mit dieser Tafel können die halben Produkte je zweier Zahlen mit höchstens vier Ziffern unmittelbar gefunden werden — mit welcher Genauigkeit, ist nicht untersucht — und mit Benützung der Täfelchen der Proportionalteile auch diejenigen zweier Zahlen mit fünf Ziffern, was den Bedürfnissen der Feldmesser entspricht. Zum Vergleich sei bemerkt, dafs die beste Tafel der Viertelquadrate, die 200 Quartseiten umfassende von Blater, die Produkte ein- bis fünfziffriger Zahlen ohne Interpolation liefert, aber bis auf die letzte Ziffer genau, was in den meisten Fällen der Anwendung einen grofsen Überflufs an Ziffern bedeutet. Auch bei der Bildung von Quadraten und dem Ausziehen von Quadratwurzeln, überhaupt allen Rechnungen der Methode der kleinsten Quadratsummen erweist sich die planimetrische Tafel als nützlich.

Soweit allgemeinerer Beachtung wert, behandelt das Schriftchen dann ausführlich in den verschiedenen, dem Feldmesser vorkommenden Formen die Aufgaben der Flächenberechnung und der Flächenteilung nach neuen Verfahren, die weiter keine Rechnungen als Addieren, Subtrahieren und Halbieren verlangen. Am Schlufs ist auf neun Seiten eine Sinustafel für alte Winkelteilung gegeben.

Die Zweckmäfsigkeit der in dem Schriftchen gebotenen Verfahren und Hilfsmittel ist nach Mitteilung des Verfassers durch langjährige Anwendung auf allen Gebieten des Vermessungswesens erprobt.

Stuttgart. R. Mehmke.

---

**Bernhard, Max. Darstellende Geometrie mit Einschlufs der Schattenkonstruktionen. Als Leitfaden für den Unterricht an technischen Lehranstalten, Oberrealschulen und Realgymnasien, sowie zum Selbststudium.** gr. 8°, VI u. 195 S. m. 229 Fig. im Text. Stuttgart 1901. Heinrich Enderlen (vorm. Karl Aue). geb. 5,20 Mk.

Das Buch ist aus dem Unterricht hervorgegangen, den der Verfasser an der Baugewerkschule in Stuttgart erteilt. Soll es nach Absicht des Verfassers in erster Linie seinen Schülern zum Wiederholen und Nachschlagen dienen und weiterhin an anderen technischen Mittelschulen und an den Oberrealschulen und Realgymnasien benützt werden, so wird es ohne Zweifel auch Studierenden an Hochschulen bei der Einübung der Elemente und als Vorbereitung auf ausführlichere Lehrbücher gute Dienste leisten; selbst der erfahrene Lehrer der darstellenden Geometrie wird noch dies und jenes daraus lernen können und an manchem neuen, der Baukunst und dem Maschinenwesen entnommenen Beispiel seine Freude haben.

Im ersten Teil werden unter der Überschrift Stereometrie die notwendigen Erklärungen bis zum Begriff der senkrechten und schiefen Parallelprojektion und der Zentralprojektion, die Sätze über parallele und senkrechte Geraden und Ebenen mit Beweis gegeben. Der zweite und gröfste, Projektionslehre überschriebene Teil behandelt die Darstellung auf zwei Projektionsebenen, die gewöhnlichen Aufgaben über Punkte, Geraden,

Ebenen, wahre Gröfse von Strecken, Winkeln u. s. w., die Schnitte und Durchdringungen von Polyedern, die notwendigsten Eigenschaften der Kegelschnitte, die Tangentialebenen an Kegel- und Zylinderflächen, die Einführung neuer Projektionsebenen, die Umdrehungsflächen, Schraubenlinie und Schraubenflächen, die Schnitte krummer Flächen mit krummen Flächen und krummen Linien. Zwei Paragraphen sind den Anwendungen im Hochbau u. s. w. gewidmet. Endlich werden im dritten Teil die Schattenkonstruktionen bis zu denen an Drehungsflächen mit grofsem Verständnis durchgeführt, wobei auf Konstruktionen, die in einer Projektion allein ausführbar sind, besonderer Wert gelegt ist.

Als ein nicht geringer Vorzug des Buches erscheint die folgerichtige Durchführung zweckmäfsiger Bezeichnungen. Ich benütze die Gelegenheit, um zur Frage der Bezeichnungen in der darstellenden Geometrie, bei der bekanntlich grofse Meinungsverschiedenheiten bestehen, Stellung zu nehmen. Von der älteren, auf den württembergischen Schulen noch vorherrschenden Art, Punkte im Raum durch grofse lateinische Buchstaben zu bezeichnen, ihre Risse dagegen durch kleine, nämlich Grundrifs und Aufrifs von $P$ durch $p$ bezw. $p'$, kommt man mit Recht mehr und mehr ab. Es ist ja aus verschiedenen Gründen unbedingt besser, für geometrische Elemente derselben Art immer Buchstaben desselben Alphabets zu benützen. Ob dann die verschiedenen Risse eines Elementes durch Striche oder aber durch Indices unterschieden werden, die man an dem für dieses Element gewählten Buchstaben anbringt, kommt weniger in Betracht; die Hauptfrage ist, soll man den Punkten die grofsen oder die kleinen lateinischen Buchstaben zuweisen? Der Verfasser hat sich den, allerdings noch in der Minderzahl befindlichen Mathematikern angeschlossen, welche Punkte mit kleinen, Linien mit grofsen Buchstaben bezeichnen. Ich kann dies leichten Herzens billigen, da ich seit bald zwanzig Jahren es ebenso mache. Der wichtigste Grund dafür ist, dafs, wenn auch nach der Auffassung der neueren Geometrie Punkt, Gerade und Ebene gleichberechtigte Elemente sind, man doch thatsächlich am häufigsten für Punkte Zeichen braucht, also vernünftigerweise für diese die schreibflüchtigsten und am wenigsten Raum einnehmenden Buchstaben sich vorbehält. Unentschieden möchte ich es lassen, ob es gut ist, mit dem Verfasser Ebenen genau so wie Geraden (mit grofsen lateinischen Buchstaben) zu bezeichnen, blofs der Annehmlichkeit wegen, die Spuren einer Ebene $E$ mit $E_1$ und $E_2$ bezeichnen zu können.

Besonderes Lob verdient noch die schöne Ausführung der klar entworfenen Figuren.

Stuttgart. R. Mehmke.

# Neue Bücher.

## Analysis.

1. Fourier, Jean Baptiste Joseph Baron, Die Auflösung der bestimmten Gleichungen (Analyse des équations déterminées, Paris 1831). Übers. u. herausg. von Alfred Loewy. (Ostwalds Klassiker Nr. 127.) kl. 8°, VI u. 263 S. m, 18 Fig. Leipzig, Engelmann. geb. M. 4.
2. Perry, John, Höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Robert Fricke und Fritz Süchting. 8°, IX u. 423 S. m. 106 Fig. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. geb. M. 12.
3. Mellor, J. W., Higher Mathematics. For Students of Chemistry and Physics. With special reference to practical work. 8 vo, 566 pp. London, Longmans. 12 s. 6 d.

## Astronomie und Geodäsie.

4. Coddington, Edwin, Die Bestimmung der Bahn eines kleinen Planeten aus vier Beobachtungen. Dissertation. gr. 4°, 65 S. Berlin, Mayer & Müller. M. 3.
5. Handwörterbuch der Astronomie. Unter Mitwirkung von E. Becker, E. Gerland, N. Herz u. A. herausg. von W. Valentiner. 4. Bd. gr. 8°, IX u. S. 241—432 m. Abb. Leipzig, Barth. M. 20, geb. in Halbfrz. M. 22.40.
6. Jahresbericht, astronomischer. Herausg. von Walt. F. Wislicenus. 3. Bd. enthaltend die Litteratur des Jahres 1901. gr. 8°, XXXII u. 671 S. Berlin, Reimer. M. 20.
7. Knoll, C., Taschenbuch zum Abstecken der Kurven an Strafsen und Eisenbahnen. 2. Aufl. Neu bearb. von W. Weitbrecht. 12°, XII u. 180 S. m. 41 Fig. u. 11 Zahlentafeln v. 207 S. Stuttgart, Bergsträsser. geb. M. 3.
8. Krisch, Aug., Astronomisches Lexikon auf Grundlage der neuesten Forschungen besonders der Ergebnisse der Spektral-Analyse und Himmels-Photographie. gr. 8°, VI u. 629 S. m. 327 Abb. Wien, Hartleben. geb. in Halbfrz. M. 12.50.
9. Nachrichten, Astronomische. General-Register der Bände 121—150, Nr. 2881—3600 gr. 4°, IV S. u. 388 Sp. Kiel, Mauke Söhne. M. 25.

## Darstellende Geometrie.

10. Geffroy, J., Tracé des ombres, à l'usage des candidats à l'École centrale des arts et manufactures. In-8° avec fig. Paris, Nony. Fr. 3.50.
11. Haussner, Robert, Darstellende Geometrie. Erster Teil. Elemente; ebenflächige Gebilde. (Sammlung Göschen Nr. 142.) kl. 8°, 192 S. m. 100 Fig. Leipzig, Göschen. geb. M. 0.80.
12. Hertzer, H., 10 Aufgaben für Parallelperspektive und parallelperspektivische Schattenkonstruktion. Lex. 8°, 6 S. m. 11 Tafeln. Berlin. Seydel. M. 0.75.
13. Meisel, Ferdinand, Praktische Beispiele zur Schattenkonstruktionslehre, 20 Tafeln für den Gebrauch an Gewerbe- und Baugewerkschulen. Grofs-Folio in Mappe. Leipzig, Seemann & Co. M. 15.
14. Schoute, P. H., Mehrdimensionale Geometrie. I. Teil. Die linearen Räume. (Sammlung Schubert XXXV.) 8°, IV u. 295 S. m. 65 Fig. u. 335 Aufgaben. Leipzig, Göschen. geb. M. 10.
15. Tessari, D., La costruzione degli ingranaggi. (Biblioteca matematica vol. IX.) 8°, XV e 225 p. con 8 tav. Torino, Fratelli Bocca. L. 8.

## Geschichte.

16. Musmacher, C., Kurze Biographien berühmter Physiker. 8°, VIII und 280 S. Freiburg i. B., Herder. M. 1.80; geb. M. 2.40.
17. J. C. Poppendorff's Biographisch-litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 4. Bd. (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend). Herausg. v. A. J. von Oettingen. (In etwa 15 Lfgen.) gr. 8°. Lfg. 1, 2 u. 3. Leipzig, Barth. je M. 3.

## Mechanik.

18. Ensslin, Max, Mehrmals gelagerte Kurbelwellen mit einfacher und doppelter Kröpfung. Ihre Formänderung und Anstrengung. Lex. 8°, VI u. 154 S. m. 74 Abb. Stuttgart, Bergsträsser. M. 6.
19. Gauss, Carl Frdr., Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoſsungs-Kräfte. (1840). Herausg. v. A. Wangerin. (Ostwalds Klassiker Nr. 2). 2. ergänzte Aufl. 8°, 61 S. Leipzig, Engelmann. kart. M. 0.80.
20. Gehler, Ermittlung der Spannungen in steinernen Brücken nach der Elastizitätstheorie. Nach den Vorträgen von Prof. Mehrtens bearbeitet. Herausg. vom Ingenieur-Verein a. d. techn. Hochschule Dresden. Schmal Fol., III, IV und 68 autogr. S. m. Fig. u. 2 Taf. Dresden 1901, Dressel. kart. M. 2.
21. Kloss, Max, Analytisch-graphisches Verfahren zur Bestimmung der Durchbiegung zwei- und dreifach gestützter Träger. Mit besonderer Berücksichtigung der Berechnung v. Drehstrommotorenwellen. Dissertation. gr. 8°, 128 S. m. Fig. u. 4 Taf. Berlin, Seydel. M. 3.
22. Korn, Arth., Abhandlungen zur Potentialtheorie. 5. Hft. Über einen Satz von Zaremba und die Methode des arithmetischen Mittels im Raume. gr. 8°, XVI u. 66 S. Berlin, Dümmler. M. 2.
23. Kriemler, Carl J., Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe, mit besonderer Berücksichtigung der Knickvorgänge. Habil. Schr. 4°, 56 S. und 10 Taf. Karlsruhe, Braun.
24. Kübler, J., Die Theorie der Knick-Elastizität und -Festigkeit. gr. 8°, 29 S. m. 5 Fig. und einer zweifarbigen Tafel. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1.50.
25. Macgregor, James Gordon, An elementary treatise on Kimematics and Dynamics. Cr. 8 vo, 538 pp. London, Macmillan. 10 s. 6 d.
26. Mach, E., The science of Mechanics. Translated from the German by T. J. Mc. Cormack. 2 nd ed. Cr. 8 vo. London, Paul. 9 s. 6 d.
27. Schmid, Carl, Statik und Festigkeitslehre. Lehrheft, nebst vielen Beispielen und einer Aufgabensammlung für Festigkeitslehre, elementar bearbeitet für den Gebrauch an der Schule und in der Praxis. 3. erweit. Aufl. hoch 4°, VIII u. 119 S. m. 126 Fig. u. 5 Taf. Stuttgart, Metzler. M. 4.

## Physik und Chemie.

28. Drude, Paul, The theory of Optics. Translated from the German by C. Riborg Mann und Robert A. Millikan. 8 vo. London, Longmans. 15 s.
29. Faraday, Michael, Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. IX. bis XI. Reihe. (1835). Herausg. v. A. J. v. Oettingen. (Ostwalds Klassiker Nr. 126). kl. 8°, 106 S. Leipzig 1901, Engelmann. geb. M. 1.80.
30. Faraday, Michael, Dasselbe, XII. u. XIII. Reihe. (1838.) Ostwalds Klassiker Nr. 128). Ebenda. geb. M. 2.
31. Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1901. 55. Jahrg. 1. Abt. Physik der Materie. gr. 8°, XXXIX u. 421 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 17.
32. Fortschritte, 3. Abt. Kosmische Physik. gr. 8°, LVIII u. 610 S. Ebenda. M. 24.
33. Geitel, Hans, Über die Anwendung der Lehre von den Gasionen auf die Erscheinungen der atmosphärischen Elektrizität. Vortrag mit ergänzenden Zusätzen und Literaturnachweisen versehen. 8°, 27 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 0.60.

**34.** Gleichen, A., Lehrbuch der geometrischen Optik. (Teubners Sammlung Bd. 8). gr. $8^0$, XIV u. 511 S. m. 251 Fig. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. geb. M. 20.

**35.** Graetz, L., Kompendium der Physik. 3. verb. u. verm. Aufl. gr. $8^0$, IX u. 479 S. m. 275 Abb. Wien, Deuticke. M. 8.

**36.** Gross, Thdr., Kritische Beiträge zur Energetik. II. Helmholtz und die Erhaltung der Energie. gr. $8^0$, X u. S. 59—236. Berlin, Krayn. M. 3.50.

**37.** Helmholtz, H., Abhandlungen zur Thermodynamik chemischer Vorgänge, herausg. v. M. Planck. (Ostwalds Klassiker Nr. 124). kl. $8^0$. 84 S. Leipzig, Engelmann. geb. M. 1.40.

**38.** Helmholtz, H., Über die Erhaltung der Kraft. (1847). (Ostwalds Klassiker Nr. 1). kl. $8^0$, 60 S. Leipzig, Engelmann. Kart. M. 0.80.

**39.** Helmholtz, H. von, Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. II. Dynamik kontinuirlich verbreiteter Massen. Herausg. v. Otto Krigar-Menzel. gr. $8^0$, VIII u. 247 S. m. 9 Fig. Leipzig, Barth. M. 12; geb. M. 13.50.

**40.** Kayser, H., Handbuch der Spektroskopie. 2. Bd. gr. $8^0$, XI u. 696 S. m. 57 Fig. u. 4 Taf. Leipzig, Hirzel. M. 40; geb. M. 44.

**41.** Lanner, Alois, Naturlehre. gr. $8^0$, 377 S. m. 377 Fig., einer Spektraltafel und vier meteorologischen Karten in Farbendruck. Wien, Roth. M. 4.50, geb. M. 5.20.

**42.** Lommel, E. v., Lehrbuch der Experimentalphysik. 8. u. 9. neubearb. Aufl., herausg. v. Walt. König. gr. $8^0$, X u. 592 S. m. 429 Fig. u. 1 Portr., 1 Spektraltafel. Leipzig, Barth. M. 6.40; geb. M. 7.20.

**43.** Lorentz, H. A., Sichtbare und unsichtbare Bewegungen. Vorträge. Unter Mitwirkung des Verfassers aus dem Holländischen übersetzt v. G. Siebert. gr. $8^0$, V u. 123 S. m. 40 Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 3.

**44.** Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 9. umgearb. u. verm. Aufl. v. Leop. Pfaundler. (In 3 Bdn.). Mit 2981 Abb. u. 13 Taf., zum Teil in Farbendruck. 1. Bd. Neue verbesserte und ergänzte Ausgabe. gr. $8^0$, XXI u. 896 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 12.

**45.** Musil, Alfred, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The Steam-engine and other Heat-engines von J. A. Ewing. gr. $8^0$, X u. 794 S. m. 302 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 20.

**46.** Richarz, F., Neuere Fortschritte auf dem Gebiet der Elektrizität. In wissenschaftlich-gemeinverständlicher Weise dargestellt. 2. Aufl. gr. $8^0$, VI u. 128 S. m. 97 Abb. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 1.50.

**47.** Riecke, Ed., Lehrbuch der Physik zu eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen. 1. Bd. Mechanik und Akustik. Optik. 2., verb. u. verm. Aufl. gr. $8^0$, XVI u. 534 S. m. 445 Fig. Leipzig, Veit & Co. M. 11; geb. in Leinw. M. 12.

**48.** Schaik, W. C. L. van, Wellenlehre und Schall. Autorisierte deutsche Ausgabe bearb. v. Hugo Fenkner. gr. $8^0$, XI u. 358 S. m. 176 Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 8.

**49.** Van't Hoff, J. H., Acht Vorträge über physikalische Chemie, gehalten auf Einladung der Universität Chicago, 20.—24. Juni 1901. gr. $8^0$, VII u. 81 S. m. 9 Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 2.50.

**50.** Warburg, Emil, Lehrbuch der Experimentalphysik für Studierende. Mit zahlr. Orig.-Abb. im Text. 6. verb. u. verm. Aufl. gr. $8^0$, XX u. 408 S. Tübingen, Mohr. M. 7; geb. M. 8.

**51.** Wotruba, Rud., Die Grundlehren der mechanischen Wärmetheorie und ihre elementare Anwendung in den hauptsächlichsten Gebieten der Technik. gr. $8^0$, VI u. 282 S. m. 115 Abb. Berlin, Costenoble. M. 10.

### Rechenapparate, Tafeln.

52. Faifofer, Aureliano, Tavole dei logaritmi a cinque decimali da 1 a 10909 e delle funzioni trigonometriche di minuto in minuto. Venezia. 16°, p. 68. L. 1.
53. Fürle, Herm., Rechenblätter. Progr. 4°, 19 S. m. 3 Taf. Berlin, Gärtner. M. 1.
54. Fürle, Herm, Rechenblätter 1 u. 2. (Kubische Gleichungen 1 u. 2). Je 41×50 cm. Berlin, Mayer & Müller. Je M. 1.50.
55. Gundelfinger, S., Sechsstellige Gaufsische und siebenstellige gemeine Logarithmen. 2., durch eine Ergänzungstabelle verm. Aufl. 4°, IV u. 31 S. Leipzig, Veit & Co. In Leinw. kart M. 2.80.
56. Hammer, E., Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. Eine elementare Anleitung zur Verwendung des Instruments für Studierende und für Praktiker. 2. durchgesehene Aufl. 8°, VIII u. 69 S. m. 6 Fig. Stuttgart, Metzler. M. 0.50.
57. Pesch, A. J. van, Logarithmentafels met vijf decimalen. 6e druk. gr. 8°, 22 en 96 blz. Leiden, Sijthoff. f. 1.
58. Peters, Ferd., Zieglers graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen nebst Tafeln zur Konstruktion bestimmter Winkel und Linien. Ein prakt. Hilfsmittel beim geom. Zeichnen. gr. 8°, 22 S. m. 28 Fig. u. 6 Taf. Wiesbaden, Kreidel. geb. in Leinw. M. 3.
59. Riem's Rechentabellen für Multiplikation. 2. Stereotypaufl. gr. 8°, VIII u. 99 S. München 1901, Reinhardt. M. 6.
60. Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt. 3. Aufl. schmal Lex. 8°, 36 S. m. Fig. Gotha, Thienemann. kart. M. 0.80.

### Verschiedenes.

61. Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens, tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communications publiés par E. Duporcq. gr. in-8° avec figures. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 16.
62. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 31. Bd. Jahrg. 1900. 1. Heft. gr. 8°, VI u. 480 S. Berlin, Reimer. M. 15.
63. Mathematical Questions and Solutions from the „Educational Times". Edit. by C. J. Marks. New Series. Vol. 1. 8 vo. London, Hodgson. 6 s. 6 d.
64. Woolwich Mathematical Papers. For admission into the Royal Military Academy. For the years 1892—1902. Cr. 8 vo. London Macmillan. 6 s.

---

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser neu eingerichteten Abteilung werden alle einlaufenden Schriften regelmäfsig aufgeführt werden. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Abendroth, William, Leitfaden der Physik mit Einschlufs der einfachsten Lehren der mathematischen Geographie nach der Lehr- und Prüfungsordnung von 1893 für Gymnasien. I. Bd. Kursus der Unter- und Obersekunda. 3. Aufl. Leipzig, Hirzel. M. 3.60; geb. M. 4.

Bardey, Ernst, Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. 5. Aufl., bearbeitet v. Friedrich Pietzker. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 8.

Bebber, W. J. van, Anleitung zur Aufstellung von Wettervorhersagen. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 0.60

Bernstein, Julius, Die Kräfte der Bewegung in der lebenden Substanz. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 0.80.

Bohn, H., Physikalische Apparate und Versuche einfacher Art aus dem Schäffermuseum. gr. 8°, VI u. 134 S. m. 216 Abb. Berlin, Salle. M. 2.

Bohnert, F., Elementare Stereometrie. (Sammlung Schubert IV). Leipzig, Göschen. geb. M. 2.40.

Compte rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 61.

Darwin, George Howard, Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte Ausgabe nach der zweiten englischen Aufl. von Agnes Pockels. Mit einem Einführungswort von Georg von Neumayer. 8°, XXII u. 344 S. m. 43 Illustr. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 6.80.

Doehlemann, Karl, Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. (Sammlung Göschen Nr. 72). Zweite, vermehrte und verbesserte Aufl. kl. 8°, 176 S. m. 85 Fig. Leipzig 1901, Göschen. geb. M. 0.80.

Dziobek, O., Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweiter Teil: Analytische Geometrie des Raumes. Braunschweig, Graff. M. 6.

Faraday, Experimental-Untersuchungen über Elektrizität, s. N. B. 29.

Féaux, B., Rechenbuch nebst einer Anleitung für den vorbereitenden Unterricht in der Geometrie für höhere Lehranstalten. 10. Aufl. v. Fr. Busch. Paderborn, Schöningh.

Fischer, Karl T., Neuere Versuche der Mechanik der festen und flüssigen Körper. Mit einem Anhange über das absolute Maſssystem. Ein Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts. gr. 8°, VI u. 68 S. m. 55 Fig. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. geb. M. 2.

Forsyth, Andrew Russell, Theory of differential equations. Part III. Ordinary linear equations. vol. IV. Cambridge, University Press. 12 s. 6 d.

Fortschritte der Physik im Jahre 1902, die, dargestellt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. 1. Jahrg. Nr. 1—15. Braunschweig, Vieweg & Sohn. (Monatlich zwei Nummern. Preis für den Jahrgang M. 4.)

Fourier, J. B. J. Baron, Die Auflösung der bestimmten Gleichungen, s. N. B. 1.

Gauss, Karl Friedrich, General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Translated with notes and a bibliography by James Caddall Morehead and Adam Miller Hiltebeitel. 4°, VI and 117 p. The Princeton University Library. Bound in cloth, $ 1.75.

Geitel, Hans, Über die Anwendung der Lehre von den Gasionen auf die Erscheinungen der atmosphärischen Elektrizität. Vortrag. 8°, 27 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 0.60.

Gleichen, A., Lehrbuch der geometrischen Optik, s. N. B. 34.

Grujić, Spiridon Dj., Das Wesen der Anziehung und Abstoſsung. Hypothese. Berlin, Peters. M. 1.

Hammer, E., Der logarithmische Rechenschieber, s. N. B. 56.

Haussner, R., Darstellende Geometrie, I., s. N. B. 11.

Helmert, F. R., Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten. Leiden 1901, Brill.

Helmholtz, H., Abhandlungen zur Thermodynamik, s. N. B. 37.

Helmholtz, H. von, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. II, s. N. B. 39.

Hensel, Kurt, und Landsberg, Georg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Leipzig, Teubner. M. 26; geb. in Leinw. M. 28.

Hippauf, Herm., Die Rektifikation und Quadratur des Kreises. Als Manuskript gedruckt. Breslau 1901.

Hočevar, Franz, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Sammlung von Übungsaufgaben für Obergymnasien. Wien und Prag, Tempsky. geb. K. 3.60.

Holzmüller, F., Elemente der Stereometrie. Dritter Teil. Die Untersuchung und Konstruktion schwierigerer Raumgebilde. 8°, VIII u. 333 S. m. 126 Fig. Leipzig, Göschen. M. 9, geb. M. 9.80.

Junker, Friedrich, Höhere Analysis. 2. Teil. Integralrechnung. (Sammlung Göschen Nr. 88). 2., verbesserte Aufl. kl. 8°, 208 S. m. 89 Fig. Leipzig 1901, Göschen. geb. M. 0.80.

Junker, Friedrich, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. (Sammlung Göschen Nr. 146). kl. 8°, 119 S. m. 42 Fig. Leipzig, Göschen. geb. M. 0.80.

Junker, Friedrich, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. (Sammlung Göschen Nr. 147). kl. 8°, 130 S. m. 50 Fig. Leipzig, Göschen. geb. M. 0.80.

Kewitsch, Georg, Die astronomische Era und das Jahrhundert 19 (Jahrhundertwende). 8°, 15 S. Freiburg i. B. 1901, Selbstverlag. M. 0.80.

Kinkelin, Herm., Quadraturen. Beilage Jahresber. 1901—1902 Obere Realsch. Basel. 4°. Basel, Schwabe. M. 1.50.

Knoll, C., Taschenbuch zum Abstecken der Kurven an Strafsen und Eisenbahnen, 2. Aug., s. N. B. 7.

Kraus, Konrad, Grundrifs der Geometrie und des geometrischen Zeichnens für Lehrerbildungsanstalten. Wien, Pichlers Wittwe & Sohn. K. 2.70.

Kriemler, Carl J., Gleichgewichtsfiguren, s. N. B. 23.

Krisch, August, Astronomisches Lexikon. Auf Grund der neuesten Forschungen, besonders der Ergebnisse der Spektral-Analyse und Himmels-Photographie. 1. Lfg. (Vollständig in 20 Lfgn.). Wien, Hartleben. M. 0.50.

Kübler, J., Die Theorie der Knick-Elastizität und -Festigkeit, s. N. B. 24.

Lanner, Alois, Naturlehre, s. N. B. 41.

Laurent, H., Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géometrie. (Scientia No. 20). Paris, Naud.

Loesch, M., Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf zwanzig Stationen an der westafrikanischen Küste von Rio de Rey (Kamerun-Gebiet) bis Kapstadt, ausgeführt im Auftrage des Reichs-Marine-Amtes. Berlin, Stankiewikz.

Lorentz, H. A., Sichtbare und unsichtbare Bewegungen, s. N. B. 43.

Loria, Gino, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. (Teubners Sammlung Bd. 5). 8°, 744 S. u. XVII Taf. Leipzig, Teubner. M. 16.

Mayow, John, Untersuchungen über den Salpeter und den salpetrigen Luftgeist, das Brennen und das Atmen, herausg. v. F. G. Donnau. (Ostwalds Klassiker Nr. 125). kl. 8°, 56 S. Leipzig 1901, Engelmann. geb. M. 1.

Meisel, F., Praktische Beispiele zur Schattenkonstruktionslehre, s. N. B. 13.

Močnik, Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Gymnasien bearb. v. Joh. Spielmann. 23. Aufl. Wien u. Prag, Tempsky. K. 3.30, geb. K. 3.80.

Montcheuil, M. de, Sur une classe de surfaces. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Toulouse. In-4°, 75 p. Paris Gauthier-Villars.

Musil, Alfred, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmemaschinen, s. N. B. 45.

Musmacher, C., Kurze Biographien berühmter Physiker, s. N. B. 16.

Newcastle Public Libraries Committee, Catalogue of the books and tracts on pure Mathematics in the Central Library. Newcastle-upon-Tyne 1901.

Pampuch, Andreas, Das Malfatti-Steinersche Problem. Progr. Bischöfl. Gymn. an St. Stephan. Strafsburg i. E.

Pascal, Ernst, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp. Analysis und Geometrie. II. Teil. Die Geometrie. 8°, IX u. 712 S. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 12.

Pauli, Wolfgang, Der kolloidale Zustand und die Vorgänge in der lebendigen Substanz. (Sonderabdruck aus der Naturw. Rundschau, 17. Jahrg.). kl. 8°, 32 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 0.60.

Perron, Oskar, Über die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt bei Wirkung äufserer Kräfte. Dissertation. München, Druckerei C. Wolf & Sohn.

Perry, John, Höhere Analysis für Ingenieure, s. N. B. 2.

J. C. Poggendorff's Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 4. Bd. Lfg. 1, 2 u. 3, s. N. B. 17.

Reichardt, Wilibald, Über verallgemeinerte Picardsche Differentialgleichungen im Gebiete der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Beigabe zum Jahresbericht des Wettiner Gymnasiums zu Dresden auf das Schuljahr 1901/02. Dresden, Teubner.

Riem's Rechentabellen für Multiplikation, s. N. B. 59.

Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, s. N. B. 60.

Rudio, Ferdinand, Die Elemente der analytischen Geometrie. 2. Teil. Die analytische Geometrie des Raumes. 3., verb. Aufl. Leipzig 1901, Teubner. geb. M. 3.

Schaik, W. C. L. van, Wellenlehre und Schall, s. N. B. 48.

Schischlik, Franz, Die Zins- und Zinseszins-Rechnungen. Wien, Pichlers Wittwe & Sohn. K. 1.

Schoute, P. H., Mehrdimensionale Geometrie, s. N. B. 14.

Schwering, Karl, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Erster Lehrgang. 2., verb. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 0.80, geb. M. 1.10.

Sellenthin, Bernhard, Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. Auf Veranlassung der kaiserl. Inspektion des Bildungswesens der Marine bearbeitet. 8°, IV u. 450 S. m. 324 Fig. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. geb. M. 8.40.

Stolz, Otto und Gmeiner, J. A., Theoretische Arithmetik. (Teubners Sammlung Bd. IV, 2.) II. Abt. Die Lehren von den Reihen und von den klomplexen Zahlen. Leipzig, Teubner. M. 7.20.

Tessari, D., La costruzione degli ingrenaggi, s. N. B. 15.

Thieme, Herm., Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. 1. Teil: Die Unterstufe. Leipzig, Freytag. geb. M. 1.60.

Van't Hoff, J. H., Acht Vorträge über physikalische Chemie, s. N. B. 49.

Waltenhofen, A. von, Die internationalen absoluten Mafse, insbesondere die elektrischen Mafse für Studierende der Elektrotechnik in Theorie und Anwendung dargestellt und durch Beispiele erläutert. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 8.

Weinholdt, Ernst, Leitfaden der analytischen Geometrie. Auf Veranlassung der kaiserlichen Inspektion des Bildungswesens der Marine bearb. Leipzig und Berlin, Teubner.

Wienecke, Ernst, Anschauliche Darstellung der Hauptsätze der Planimetrie nach dem Prinzip der Bewegung. Begleitschrift zu Wieneckes beweglichen geometrischen Figuren. I. Serie. 8°, 16 S. Berlin, Winckelmann.

---

# Abhandlungsregister 1901.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

[Die Abhandlungen, welche dem Verfasser und seinen Mitarbeitern nicht zugänglich waren, sind mit * bezeichnet.]

## Abkürzungen.

**A.A.S.** Aus dem Archiv der deutschen Seewarte Hamburg 22.
**A.A.P.** Atti della R. Accademia di Scienze, Torino 36—37.
**A.A.W.** Anzeiger der K. K. Akademie, Wien 1901.
**A.C.P.** Annales de Chimie et de Physique, Paris 7. série 24—25.
**A.D.M.** Annali di Matematica pura ed applicata, Milano 3. serie 5—6.
**A.E.N.** Annales de l'École normale supérieure, Paris 3. série 18.
**A.F.G.P.** Archiv für die gesamte Physiologie, Bonn 85—87.
**A.F.S.P.** Archiv für systematische Philosophie, Berlin 6.
**A.G.C.** Atti dell' Accad. Gioënia di Scienze naturali, Catania 4. serie 14.
**A.G.G.** Abhandlungen der K. Gesellsch. der Wissensch., Göttingen, Festschrift.
**A.Gr.** Archiv der Mathematik und Physik, Leipzig 3. Serie 2—3.
**A.H.** Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Hamburg 29—30.
**A.J.C.** The Astrophysical Journal, Chicago 13—15.
**A.J.M.** The American Journal of Mathematics, Baltimore 23.
**A.J.S.** The American Journal of Science, New Haven 4. series 12—13.
**A.J.W.** Assekuranzjahrbuch, Wien 23.
**A.M.** Acta Mathematica, Stockholm 25.
**A.N.** Archives néerlandaises, Haarlem 2 série 4; 6; 7.
**A.N.G.H.** Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft, Halle 22.
**A.N.K.** Astronomische Nachrichten, Kiel 156—158.
**A.N.L.** Annalen der Naturphilosophie, Leipzig 1.
**An.M.** Annuaire des Mathématiciens, Paris 1901—1902.
**A.of M.** Annals of Mathematics, Cambridge Mass. 2. series 3.
**A.P.L.** Annalen der Physik, Leipzig 4. Serie 6—7.
**A.S.A.** Anales de la Sociedad cientifica Argentina, Buenos Ayres 52.
**A.S.B.** Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Louvain 25—26.
**A.U.G.** Annales de l'Université, Grenoble 14.
**A.U.Kh.** Annalen der K. K. Universität Charkow 1901.
**A.U.L.** Universitets Årskrift, Lund 36.
**A.V.A.S.** Bihang till K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Stockholm 26.
**B.A.** Bulletin Astronomique, Paris 18—19.
**B.A.B.** Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, des lettres et des beaux arts, Bruxelles 1901.
**B.D.** Bulletin des Sciences mathématiques, Paris 2. série 25.
**B.F.S.** Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar, Helsingfors 43.
**B.G.L.** Berichte der K. Sächs. Gesellsch. der Wiss., Leipzig 53.
**Bi.** Biometrika, Cambridge 1.
**B.I.C.** Bulletin international, Krakau 1901.
**B.M.** Bibliotheca mathematica, Leipzig 3. Serie 2.
**B.S.V.** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, Lausanne 4. série 37.

**B.Z.A.** Beiträge zur Akustik 3.
**C.** Časopis, Prag 31.
**C.A.E.** Centralblatt für Akkumulatoren- und Elementenkunde, Halle 2.
**C.G.U.** Centralblatt für das gewerbliche Unterrichtswesen in Österreich, Wien 1900.
**C.M.G.** Centralblatt für Mineralogie und Geologie 18.
**C.N.** The Chemical News, London 84—85.
**C.P.L.** Communications from the Physical Laboratory at the University, Leiden.
**C.R.** Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Ac. des Sciences, Paris 133—134.
**Cr.** Journal für reine und angewandte Mathematik, Berlin 124.
**C.R.R.** Correspondenzblatt des Naturforschervereins, Riga.
**D.A.W.** Denkschriften der K. K. Akademie der Wissenschaften, Wien 69.
**D.H.** Deutscher Hausschatz, Regensburg 26.
**D.M.** Die Mechaniker, Berlin 9—10.
**D.M.Z.** Deutsche Mechanikerzeitung, Berlin 1900.
**D.V.M.** Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig 11.
**D.V.Z.** Deutsche Versicherungszeitschrift, Berlin 1902.
**E.C.Z.** Elektrochemische Zeitschrift, Berlin 7.
**E.E.** L'éclairage électrique, Paris 28 bis 30.
**F.C.** Forstwissenschaftliches Centralblatt, Berlin 23.
**G.B.** Giornale di Matematiche, Napoli 39.
**G.E.** Glückauf, Essen 37.
**G.M.B.** Gazeta matematica, Bukarest 7.
**G.Z.** Geographische Zeitschrift, Leipzig 7.
**I.A.M.** Illustrierte aëronautische Mitteilungen, Strafsburg 5.
**I.M.** L'Intermédiaire des Mathématiciens, Paris 8.
**I.R.A.F.** Internationale Revue über die gesamten Armeen und Flotten, Dresden 18.
**J.E.P.** Journal de l'école polytechnique, Paris 2. sériès 6.
**J.F.I.** Journal of the Franklin Institution, Washington 151.
**J.N.S.W.** Journal of the Royal Society of New South Wales, Sydney 34.
**J.P.** Journal de physique, Paris 3. série 10; 4. série 1.
**J.P.C.** The Journal of Physical Chemistry, Ithaca 5.
**J.P.R.** Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik, Halle 15.
**J.R.P.C.G.** Journal der Russ. physicochemischen Gesellschaft, Petersburg 32—33.
**J.S.G.** Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur, Breslau 1900.
**J.S.G.B.** Jahrbuch der Schiffsbautechnischen Gesellschaft, Berlin 2.
**J.S.M.** Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, Porto.
**J.T.** Mitteilungen der Mathematico-physikalischen Gesellschaft, Tokio 8.
**J.U.** Jahreshefte des Vereins für Mathematik und Naturwissenschaft, Ulm 10.
**J.U.S.A.** Journal of the United States Artillery, Fort Munroe, Virg. 1901.
**J.V.N.S.** Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde, Stuttgart 57.
**K.D.B.** Klimat, Petersburg (russ., franz., engl., deutsch) 1—2.
**K.T.** Der Kulturtechniker, Breslau 1901.
**K.Z.** Kriegstechnische Zeitschrift, Berlin 4.
**L.M.B.** Laboratorium und Museum, Berlin 1901.
**M.A.** Mathematische Annalen, Leipzig 55.
**M.A.A.** Verhandelingen van de K. Akad. van Wetenschapen, Amsterdam 7.
**M.A.G.** Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, Wien 1901—1902.
**M.C.W.** Monatshefte für Chemie, Wien 22.
**M.F.I.** Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Berlin 1—2.
**M.H.** Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien 13.
**M.M.** The Messenger of Mathematics, London 30.
**M.M.F.** American Mathematical Monthly, Springfield 8—9.
**M.N.A.S.** Monthly Notices of the R. Astronomical Society, London 62.
**M.P.A.** Le matematiche pure ed applicate, Città di Castello 1—2.
**M.P.O.** Spaczinskis Bote der Experimentalphysik und elementaren Mathematik, Odessa 26—27.
**M.R.B.** Marine-Rundschau, Berlin 1900.
**M.S.G.** K. Vetenskaps och Vitterhetssamhälles Handlingar, Göteborg 4. Serie 3.
**M.V.D.S.** Mitteilungen des Vereins deutscher Strafsenbahn- und Kleinbahnverwaltungen, Berlin 1901.
**M.W.** Militärwochenblatt, Berlin 1900.
**M.W.C.W.** Monatsblätter des wissenschaftlichen Clubs, Wien 21.
**M.W.R.** Monthly Weather Review, 28.

**M.y.R.M.** Memorias y Revista de la Sociedad Cientifica „Antonio Alzate", Mejico 14; 16.

**M.Z.** Meteorologische Zeitschrift, Wien 19.

**N.** Nature, London 65.

**N.A.** Nouvelles Annales de Mathématiques 4. Série 2.

**N.A.W.** Nieuw Archief voor Wiskunde, 2. Serie 5.

**N.C.P.** Il Nuovo Cimento, Pisa 5. serie 2.

**N.G.G.** Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissensch., Göttingen 1900—1901.

**N.J.M.** Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie, Stuttgart 1901—1902.

**N.R.** Naturwissenschaftliche Rundschau, Braunschweig 16.

**Ö.M.** Österreichische Mittelschule, Wien 1900—1901.

**Ö.V.Z.** Österreichische Versicherungszeitung, Wien 1902.

**P.** Prometheus, Berlin 12.

**P.A.Bo.** Proceedings of the American academy of arts and science, Boston 37.

**P.C.P.S.** Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 11.

**P.G.M.** Petermanns geographische Mitteilungen, Gotha 47.

**Pit.** Il Pitagora, Palermo 8.

**P.L.M.S.** Proceedings of the London Mathematical Society 33.

**P.M.** Philosophical Magazine, London 6. series 2—3.

**P.M.R.** Periodico di Matematica, Livorno 2. serie 4.

**P.N.S.W.** Proceedings of the Royal Society of New South Wales, Sydney 34.

**P.P.S.L.** Proceedings of the Physical Society, London 17.

**P.R.** The Physical Review, New York 13—14.

**P.R.I.A.** Proceedings of the Royal Irish Academy, Dublin 3 series 6.

**P.R.S.E.** Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 23.

**P.R.S.L.** Proceedings of the Royal Society, London 68.

**P.S.D.** Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society, Dublin 9.

**P.Z.** Physikalische Zeitschrift, Göttingen 3.

**R.A.A.** Reports of the Australasien Association for the advancement of science Melbourne 8.

**R.A.L.R.** Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Roma 5. serie 10—11.

**R.A.N.** Rendiconti della Reale Accademia di Scienze Fisiche e Naturali, Napoli 3. serie 8.

**R.C.L.** Revista de Ciencias, Lima 4—5.

**R.C.M.P.** Rendiconti del Circolo Matematico, Palermo 15—16.

**R.F.M.** Rivista di Fisica, Matematica e Scienzi naturali, Pavia 4—5.

**R.G.O.** Revue générale des Sciences, Paris 12.

**R.I.L.** Rendiconti del R. Istituto di scienze e lettere, Milano 2. serie 34.

**R.M.** Rivista di Matematica, Torino 7.

**R.S.M.** Sammelschrift der Sevčenkogesellschaft der Wissenschaften, Lemberg 7.

**S.** Science, New York 14.

**S.A.B.** Sitzungsberichte der K. Preussischen Akad. der Wissenschaften, Berlin 1901—1902.

**S.A.M.** Sitzungsberichte der Math.-Phys. Klasse der K. Bayr. Akad. der Wiss., München 31.

**S.A.W.** Sitzungsberichte der Math. Naturwiss. Klasse der K. K. Akad. der Wissenschaften, Wien 109—110.

**S.I.D.** Sitzungsberichte der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis, Dresden 1901.

**S.L.** Sirius, Leipzig 1900.

**S.M.** Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris 29.

**S.M.Am.** Bulletin of the American Mathematical Society, New York 2. series 7—8.

**S.M.B.** Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, Leipzig 1901—1902.

**S.M.M.** Sammelschrift der Mathem. Gesellschaft Moskau 22.

**S.P.** Bulletin de la Société impériale des naturalistes, Moskau 1902.

**S.P.M.** Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society, Manchester 5. series 6.

**S.V.N.W.** Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse, Wien 40.

**T.A.I.E.E.** Transactions of the American Institute of Electrical Engineers 18.

**T.E.** The Electrician, London 47—48.

**T.M.** Nyt Tidskrift for Mathematik 12—13.

**T.M.W.** Terrestrial Magnetism, Washington.

**T.N.Z.I.** Transactions and Proceedings of the New Zealand Institute, Wellington 33.

**T.R.S.L.** Philosophical Transactions of the Royal Society, London 196—197.

**T.S.L.** Transactions of the Academy of Science, St. Louis 10—11.

**T.W.** Praze matematyzno-fizyzne, Warschau 12.
**U.M.N.** Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Berlin 7—8.
**V.A.G.** Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft, Leipzig 1900—1901.
**V.A.S.** Handlingar af K. Svenska Vetenskaps Akademien, Stockholm 33.
**V.N.V.H.** Verhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins, Hamburg-Altona 3. Serie 8.
**V.W.** De Vriend der Wiskunde, Culemborg 17; Supplement 13.
**W.B.** Das Wetter, Berlin 18.
**W.M.** Wiadomosci matematyczne, Warschau 6.
**W.M.K.** Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen, Kiel 2. Serie 4.
**Z.B.** Zeitschrift für Beleuchtungswesen 7.
**Z.E.** Zeitschrift für Elektrochemie, Halle 7.
**Z.F.** Zeitschrift für Forstwesen, Berlin 33.
**Z.H.** Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht, Leipzig 32—33.
**Z.I.** Zeitschrift für Instrumentenkunde, Berlin 21—22.
**Z.K.M.** Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie, Leipzig 34—35.
**Z.L.** Zeitschrift für Luftschiffahrt und Physik der Athmosphäre, Berlin 1900.
**Z.L.S.** Zeitschrift für lateinlose Schulen, Leipzig 11.
**Z.Ö.G.** Zeitschrift für die Österreichischen Gymnasien, Wien 1900.
**Z.P.** Zeitschrift für physikal. u. chem. Unterricht, Berlin 14—15.
**Z.P.C.** Zeitschrift für physikalische Chemie 36—38.
**Z.P.K.** Zeitschrift für Philosophie und philosoph. Kritik, Leipzig 118.
**Z.P.P.** Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Leipzig 24.
**Z.R.** Zeitschrift für Realschulwesen, Wien 1900.
**Z.R.H.** Zeitschrift für Reproduktionstechnik, Halle 3.
**Z.R.W.L.** Zeitschrift des rheinisch-westfälischen Landmesservereins, Kassel 21.
**Z.S.** Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Leipzig 47.
**Z.V.** Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 30—31.

## A. Allgemeines.

### Prinzipien der angewandten Mathematik.

**1.** **A. Scheye.* Über das Prinzip der Stetigkeit in der math. Behandlung der Naturwissenschaften. An. N.L. 20.

### Geschichte der angewandten Mathematik.

**2.** *W. Schmidt.* Physikalisches und Technisches bei Philon von Byzanz. B.M. 377.

Siehe auch 12.

### Pädagogik der angewandten Mathematik.

**3.** *P. Stäckel.* Über die Entwicklung des Unterrichtsbetriebs in der angewandten Mathematik. D.V.M. 26.

**4.** *J. Wellstein.* Über das Studium der angewandten Mathematik. D.V.M. 198.

Siehe auch 149.

### Mafssysteme.

**5.** **E. Raverot.* Le système décimal et la mesure du temps et des angles. E.E. 29. 464.

**6.** **J. de Rey-Pailhade.* Principes de l'application de la division décimale du jour aux mesures électromagnétiques. E.E. 29. 158.

### Logikkalkül.

**7.** *G. U. Yule.* On the theory of logical class-frequencies and its geometrical representation. T.R.S.L. 197. 91.

**8.** *B. Russell.* Sur la logique des relations. R.M. 137.

## B. Analysis und Algebra.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**9.** *E. Wölffing.* Litteraturverzeichnis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. D.V.Z. No. 17—19.

**10.** **H. Brömse* und *E. Grimsehl.* Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre. Z.P.K. 145.

**11.** *J. Hausdorff.* Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. B.G.L. 152.

**12.** **E. Perrier.* Pascal, créateur du calcul des probabilités et précurseur du calcul intégral. R.G.O. 482.

**13.** *W. Gosiewski.* Z teoryi rachunku prawdopodobieństwa. (Über die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung.) W. M. 76.

**14.** *P. A. Nekrasaw.* Po povodu odnoj prostejšej teoremy o verojátnostjach summ i srednich veličin. (Über den Grund eines sehr einfachen Lehrsatzes über Wahrscheinlichkeiten von Summen und Mittelwerten von Gröſsen.) S.M.M. 225.

**15.** *P. A. Nekrasow.* Novyja osnovania učenija o verojatnostjach summ i srednich veličin. II. (Neue Darlegung der Lehre von den Wahrscheinlichkeiten der Summen und Mittelwerte von Gröſsen.) S.M.M. 323.

**16.** **A. M. Liapounof.* Antwort an Herrn P. Nekrassof (russ.). A.U.Kh. 51.

**17.** *W. Gosiewski.* O prawie wielkich liczb. (Über das Gesetz der groſsen Zahlen.) W.M. 89.

**18.** *P. Mansion.* Démonstration du théorème de Jacques Bernoulli. A.S.B. 26. A. 67.

**19.** *H. E. Timerding.* Die Bernoullische Wertetheorie. Z.S. 321.

**20.** *J. Andrade.* A propos de deux problèmes de probabilités. J.E.P. 119.

**21.** *C. Moreau.* Au sujet d'une question de probabilité. I.M. 311.

Siehe auch 55; 257.

### Methode der kleinsten Quadrate.

**22.** *P. Hatt.* Jonction d'un réseau trigonometrique fermé. C.R. 133. 666.

### Fehlerrechnung.

**23.** *F. Cohn.* Über die Berechnung des mittleren Fehlers aus den wahrscheinlichsten Beobachtungsfehlern. A.N.K. 156. 305.

**24.** *K. Pearson.* On lines and planes of closest fit to systems of points in space· P.M. 2. 559.

**25.** **L. Hermann.* Die Bedeutung der Fehlerrechnung bei der harmonischen Analyse von Kurven. A.F.G.P. 86. 92. — *E. Lindelöf.* 87. 597.

**26.** *K. Pearson.* On the mathematical theory of errors of judgment, with special reference to the personal equation. P.R.S.L. 369.

**27.** **E. Lindelöf* und *H. Pipping.* Über die Berechnung der Beobachtungsfehler bei der Ausmessung von Klangkurven. A.F.G.P. 85. 59.

**28.** *L. Krüger.* Zur Ausgleichung von Polygonen und von Dreiecksketten und über die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler. Z.S. 157.

**29.** *C. Aimonetti.* Un esaminatore di livelle del costruttore Bamberg. A.A.T. 37. 181.

**30.** *A. Galle.* Zur Ausgleichung von Polhöhenbeobachtungen. A.N.K. 156. 113.

**31.** *L. Descroix.* Sur la discussion mathématique des séries d'observations météorologiques. M.y.R.M. 14. 295.

**32.** *J. Hartmann.* Über die Korrektion eines periodischen Fehlers in der Bewegung des Potsdamer 80 cm Refraktors. A.N.K. 158. 1.

Siehe auch 255; 256; 258; 680.

### Politische Arithmetik.

**33.** *K. Pearson.* Mathematical contributions to the theory of evolution. P.R.S.L. 372.

**34.** *M. Beeton* and *K. Pearson.* On the inheritance of duration of life, and on the intensity of natural selection in man. Bi. 50.

**35.** *K. Pearson.* Supplement to a memoir of skew variation. T. R.S.L. 197. 443.

**36.** *A. Lee.* A first study of the correlation of the human skull. T.R.S.L. 196. 225.

**37.** *L. Camerano.* Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di mancanza di correlazione e di assimmetria. A.A.T. 36. 639.

Siehe auch 19; 26.

### Statistik.

**38.** *A. O. Powys.* Date for the problem of evolution in man. Bi. 30.

**39.** *W. F. R. Weldon.* A first study of natural selection in Clausilia laminata (Montague). Bi. 109.

### Versicherungsmathematik.

**40.** *Keuchel.* Die Mathematik der Lebensversicherung. A.J.W.

**41.** *D. Danielewicz.* System uniwersalny znakowania w technice ubezpieczeń życiowych. (System einer allgemeinen Bezeichnung in der Technik der Lebensversicherung.) W.M. 98.

**42.** *Amthor.* Die Berechnung des Prozentsatzes der Verwaltungskosten in der Lebensversicherung. A.J.W.

**43.** *P. Radtke.* Prämien und Prämienreserven der Unfallversicherung. Ö.V.Z. No. 5 ff.

### Spiele.

**44.** **L. Bachelier.* Théorie mathématique du jeu. A.E.N. 143.

**45.** *C. L. Bouton.* Nim, a game with a complete mathematical theory. A of M. 35.

**46.** *P. A. Mac Mahon.* Magic squares and other problems upon a chess-board. N. 447. — *C. Plank.* 509.

### Numerisches Rechnen.

**47.** *—. Über Rechenhilfsmittel. Z.R.W.L. 54.

**48.** *J. Jonescu.* Proba prin 9 a operatiunilor prescurtate. (Neunerprobe mit abgekürzten Operationen). S.M.B. 7. 173.

**49.** *R. Grilli.* Metodi di Horner per eseguire la divisione di due polinomi Pit. 86.

**50.** *G. L. N. H. de Laive.* Een vijfde methode voor de oplossing von $n$ vergelijkingen van den eersten graad met $n$ onbekenden. V.W. 17. 18; 86.

**51.** *P. Dolguschin.* Ob isvlečenii kvadratnago kornja. (Über die Ausziehung der Quadratwurzel.) M.P.O. 27. 133.

**52.** *F. W. v. B.* Ein elementares Verfahren zur Berechnung der briggischen Logarithmen. C.R.R. 23.

Siehe auch 806.

### Analytische Näherungsmethoden.

**53.** *T. N. Thiele.* En til naermelses metode til roduddragning. T.M. 13. B. 1.

**54.** *Röther.* Näherungsformeln für $x^2 + ax = b$ und $\sqrt{x^2 + y^2}$. Z.V. 30. 654.

**55.** *M. Lazzarini.* Un' applicazione del calcolo della probabilità alla ricerca sperimentale di un valore approssimato di $\pi$. P.M.R. 140.

**56.** *G. Peirce.* A courious approximate construction for $\pi$. S.M.Am. 7. 426. — *E. Lemoine.* 8. 137.

**57.** *G. Pesci.* Sulla ricerca del „logaritmoseno“ e del „logaritmotangente“ degli archi piccoli. P.M.R. 57; 105.

**58.** *U. Dini.* Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du 2. ordre. A.M. 185.

**59.** *A. Schleussinger.* Über Verhältniszahlen zur Absteckung von Kreisbögen. Z.V. 30. 657.

Siehe auch 28; 515; 516.

### Numerische Gleichungen.

**60.** *C. J. de la Vallée Poussin.* Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée. A.S.B. 26. B. 1.

**61.** *R. Perrin.* Sur la séparation et le calcul des racines réelles des équations. C.R. 133. 1189.

**62.** *A. Pellet.* Calcul des racines réelles d'une équation. C.R. 133. 917; 1186.

**63.** *A. Pellet.* Sur la méthode d'approximation de Newton. S.M. 228.

**64.** *A. Lindhagen.* Om Newtons approximations method. T.N. 12. B. 89.

**65.** *R. Heger.* Näherungsweise Auflösung von numerischen höheren Gleichungen. U.M.N. 8. 8.

**66.** *A. Pellet.* Sur la méthode d'approximation de Newton. S.M. 320.

**67.** *C. A. Chant.* The roots of the equation $u = \tan u$. N. 247.

**68.** **P. Stäckel.* Untersuchung der Gleichung $B = y\frac{q^c - q^x}{1 - q}$. W.M.K 164.

**69.** *R. Skutsch.* Über Gleichungswagen. Z.S. 85.

Siehe auch 76; 370.

### Interpolation.

**70.** **T. L. Hudson.* A new method of interpolation. M.N.A.S. 17.

**71.** *M. Ernst.* O. nowym wzorze interpolacyjnym dla widma pryzmatycznego. (Über eine neue Interpolationsformel für das Prismenspektrum.) T.W. 220.

### Mittelwerte.

**72.** *E. v. Rijkesvorsel.* Valeurs moyennes et valeurs normales en météorologie. A.N. 6. 367.

Siehe auch 14; 15.

### Harmonische Analyse.

Siehe 25.

### Logarithmen.

**73.** **A. Breuer.* Logarithmenberechnung. Z.Ö.G. 873.

**74.** *S. Gundelfinger.* Zur Berechnung der Gaufsschen Logarithmen für kleine Werte von $B$ resp. zugehörige Werte von $A$. Cr. 124. 87.

Siehe auch 52.

## C. Geometrie.

### Nomographie.

**75.** *F. Villareal.* Nomografia. A.C.L. 4. 234; 245.

**76.** *M. d'Ocagne.* Sur la résolution nomographique des équations algébriques. N.A. 49.

**77.** **H. Macht.* Anleitung zu einem graphischen Verfahren, die lineare Ausdehnung von Körpern im Verhältnis zu einer geforderten Vergröfserung oder Verkleinerung des kubischen Inhalts zu verändern. C.G.U. 454.

Siehe auch 97.

### Graphischer Kalkul.

**78.** *H. Brocard.* Évaluation graphique: $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. I.M. 268. — *N. Quint, E. Lemoine.* 269.

**79.** *J. Sobotka.* Uvahy o grafickém integrováni differencialnich rovnic hlavně linearných prvého řadu. (Betrachtungen über die graphische Integration von Differentialgleichungen, insbesondere von linearen erster Ordnung.) C. 10; 97; 177.

**80.** *R. A. Lehfeld.* Note on the graphical treatment of experimental curves. R.P.S.L. 605.

**81.** *E. Hammer.* Über das Höhendiagramm bei der halbtrigonometrischen Höhenaufnahme und bei der Mefstischtacheometrie. Z.I. 22. 81.

**82.** **M. H. Bauer.* Graphische Methoden zur Bestimmung von statischen Gleichgewichtslagen des Schiffs im glatten Wasser. J.S.G.B. 181.

**83.** *M. A. Sanchez.* Resolucion grafica trigonométrica. R.C.L. 4. 249.

Siehe auch 97; 252; 262; 458; 713; 718; 854; 855.

### Winkelteilung.

**84.** *H. Braid.* Sur la trisection de l'angle. I.M. 304.

**85.** *H. Brocard, P. Barbarin.* Division approximative de la circonférence en $n$ parties égales. I.M. 324.

**86.** *F. W. J. Mattaar.* Aanteekening bij eene constructië van een hoek van 20°. V.W. Suppl. 13. 30.

### Verbindungskurven.

**87.** *C. J. Merfield.* Tables to facilitate the location of the cubic parabola. J.N.S.W. 281.

### Geometrische Näherungsmethode.

**88.** *B. Carrara.* I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risoltati della scienza. R.F.M. 4. 208; 304; 492; 5. 25; 112; 296.

**89.** *E. B. Escott.* Longueur approchée d'un arc de cercle. I.M. 260.

**90.** **J. Sterba.* Näherungsweise Rektifikation der Parabel. Ö.M. 1901. 74.

**91.** **J. Sterba.* Näherungsweise Rektifikation der Ellipse. Ö.M. 1900. 77.

Siehe auch 78.

### Inhalte.

**92.** *G. H. Knibbs.* On the relation in determining the volumes of solids whose parallel transverse sections are $n^{ic}$ functions of their position on the axis between the number, position and coefficients of the sections and the (positive) indices of the functions. J.N.S.W. 36.

**93.** **J. v. Eysack.* Berechnung des Rauminhalts eines Rotationsparaboloids mit Hilfe des Lehrsatzes von Cavalieri. Z.R. 335.

### Mechanische Quadratur.

**94.** *F. H. Seares.* Sur les quadratures mécaniques. B.A. 18. 401.

**95.** *O. Callandreau.* Sur l'application d'une formule de quadrature mécanique à l'évaluation d'une intégrale dépendant des fonctions elliptiques. B.A. 18. 449.

### Planimeter.

**96.** **M. Chrapkowski.* Anwendung des Beilplanimeters zur Berechnung unregelmäfsiger ebener Flächen und seine praktische Bedeutung für den Gebrauch an Bord S. M. Schiffe zur Berechnung der Maschinenleistungen. M.R.B. 717; 835.

### Rechenmaschinen.

**97.** *L. Torrès.* Sur les rapports entre le calcul mécanique et le calcul graphique. S.M. 161.

**98.** **A. Nistler.* Burrough's Additionsmaschine. D.H. No. 46.

**99.** *Kelling.* Dividieren auf Additionsmaschinen. Z.V. 31. 171.

**100.** *H. Sofsna.* Ergebnisse einer Zuverlässigkeitsuntersuchung mit der Rechenmaschine „Brunsviga". Z.V. 30. 636.

Siehe auch 69.

**Vektorenrechnung.**

**101.** *R. Marcolongo.* Teoria dei vettori. M.P.A. 1. 193; 217.

**102.** *A. Kneser.* Neue Begründung der Proportions- und Ähnlichkeitslehre, unabhängig vom Archimedischen Axiom und dem Begriff des Incommensurabeln. S.M.B. 4.

**103.** *E. Naetsch.* Über ein in der Vektoranalysis auftretendes System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. S.I.D. 10.

Siehe auch 318.

**Ausdehnungslehre.**

**104.** *C. Burali-Forti.* Applicazioni del metodo di Grafsmann. M.P.A. 1. 269; 2. 21.

**105.** *C. Burali-Forti.* Il metodo di Grafsmann nella geometria proiettiva. R.C.M.P. 15. 310.

**Quaternionen.**

**106.** **A. Macfarlane.* Differentiation in the quaternion analysis. P.R.I.A. 199.

**107.** *V. Fischer.* Eine Anwendung der Quaternionentheorie auf die thermodynamischen Gleichungen. Cr. 124. 93.

**Zeichenwerkzeuge.**

**108.** *A. G. Greenhill.* Appareil stéréoscopique pour mettre en relief les figures géométriques se rapportant aux fonctions elliptiques. S.M. 172.

**109.** *H. Brocard.* Procédés pour déterminer le rayon d'une sphère. I.M. 283.

**110.** *Potron.* Sur la génération de quelques courbes remarquables par le campylographe du P. Marc Dechevrens. A.S.B. 26. B. 41.

Siehe auch 861.

**Darstellende Geometrie.**

**111.** *G. Loria.* Sur quelques problèmes élémentaires de géométrie descriptive à 3 et 4 dimensions. A.Gr. 2. 257.

**112.** *—. Verfahren zur Darstellung von Durchdringungskurven zweier Flächen. C.G.U. 79.

**113.** *—. Darstellung von Durchdringungskurven. C.G.U. 238.

**114.** *—. Darstellung von Durchdringungskurven zweier Flächen für Lehrzwecke. L.M.B. 159.

**115.** *A. Adler.* Zur sphärischen Abbildung der Flächen nach ihrer Anwendung in der darstellenden Geometrie. S.A.W. 110. 50.

**116.** *C. Rodenberg.* Über die Schnittkurven zweier kongruenter Ringflächen und ihr Zerfallen in Kreise. Z.S. 196.

**Projektion.**

**117.** *S. L. Penfield.* On the use of the stereographic projection for geographical maps and sailing charts. A.J.S. 13. 245.

**118.** **S. L. Penfield.* Über die Anwendung der stereographischen Projektion. Z.K.M. 35. 1.

**119.** *F. Amodeo.* Rappresentazione stereografica delle figure dello spazio nel piano. M.P.A.Z. 3.

**Perspektive.**

**120.** **E. Sommer.* Über Verstöfse gegen die Regeln der Perspektive. Z.R.H. 66.

**Schattenkonstruktionen.**

**121.** *O. Unger.* Über ein Konstruktionsprinzip und seine Verwertung bei der Schattenbestimmung an Drehflächen. Z.S. 467.

**Photogrammetrie.**

**122.** **E. Doležal.* Arbeiten und Fortschritte auf dem Gebiet der Photogrammetrie im Jahre 1900. J.P.R. 337; 370.

**123.** **E. Doležal.* Photogrammetrie und ihre Anwendungen. S.V.N.W. 247.

**124.** *E. Doležal.* Das Problem der 5 und 3 Strahlen in der Photogrammetrie. Z.S. 29.

**125.** *Doležal.* Über das Gesichts- und Aufnahmefeld bei photogrammetrischen Aufnahmen. Z.V. 31. 101.

**126.** **A. Gleichen.* Geometrische Konstruktionen neben der Methode der Durchrechnung bei photographischen Objekten. D.M. 10. 1; 16.

**127.** **M. Schwarzmann.* Zur Krystallphotogrammetrie. N.J.M. 1901. I. 9.

**128.** *H. Ludendorff.* Über Fehler, die beim Aufkopieren von Normalgittern auf photographische Platten entstehen können. A.N.K. 157. 1.

**129.** *G. A. Hemsalech.* La constitution de l'étincelle électrique. J.P. 1. 76.

**130.** *P. C. Sanchez.* Mémoire sur la méthode des levées topophotographiques. M.y.R.M. 16. 35.

**131.** *Loewy.* Étude des conditions à réaliser dans l'exécution des clichées

pour obtenir l'homogénéité et le maximum d'exactitude dans la détermination des coordonnées des images stellaires. C.R. 134. 381.

### Krystallographie.

**132.** **S. Smolař.* Einige neue Aufgaben aus der mathematischen Krystallographie. Z.K.M. 35. 480.

**133.** *F. Wallerant.* Sur quelques conceptions en crystallographie. R.G.O. 671.

**134.** **E. v. Fedorew.* Über Krystallsysteme. C.M.G. 545.

**135.** **V. de Souza-Brandão.* Über Krystallsysteme. N.J.M. 1901. II. 37.

**136.** **W. Barlow.* Die Symmetrie der Krystalle. Z.K.M. 34. 1.

**137.** **E. v. Fedorow.* Beiträge zur zonalen Krystallographie. Z.K.M. 34. 133; 35. 75.

Siehe auch 826.

## D. Mechanik.

### Prinzipien der Mechanik.

**138.** *L. Königsberger.* Die Prinzipien der Mechanik für mehrere unabhängige Variablen. S.A.B. 1901. 1092; Cr. 124. 202.

**139.** **P. Tannerg.* Galilée et les principes de la dynamique. R.G.O. 330.

**140.** *K. Heun.* Über die Hertzsche Mechanik. S.M.B. 12.

**141.** *T. Schwartze.* Dynamische Betrachtungen über mechanische Fundamentalbegriffe. U.M.N. 8. 11.

**142.** *Combebiac.* Sur la force vive utilisable. S.M. 314.

**143.** *A. F. Sundell.* Über den von Duhamel begründeten Beweis des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten. B.F.S. 287.

**144.** *P. Appell.* Sur le principe de la moindre contrainte. An.M. 407.

**145.** *A. Wassmuth.* Das Restglied bei der Transformation des Zwanges in allgemeinen Koordinaten. S.A.W. 110. 387.

**146.** *A. Voss.* Über die Prinzipe von Hamilton und Maupertuis. N.G.G. 1900. 322.

**147.** **H. Kleinpeter.* Formulierung des Trägheitsgesetzes. A.F.S.P. 461.

**148.** *V. A. Julius.* Sur le mouvement absolu. A.N. 6. 285.

**149.** *W. Ostwald.* Über die Einführung des Begriffs der Arbeit beim Unterricht in der Mechanik. Z.H. 33. 10.

Siehe auch 160; 185.

### Kinematik.

**150.** *L. Torrès.* Sur l'utilité des exemples cinématiques dans l'exposition des théories mathematiques. S.M. 167.

**151.** *R. v. Lilienthal.* Über die Beziehung der Geometrie der Bewegung zur Differentialgeometrie. D.V.M. 37.

**152.** *E. Maillet.* Sur certains théorèmes de géométrie cinématique. S.M. 221.

**153.** *L. Burmester.* Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme. Z.S. 128.

**154.** *C. Méray.* Sur le déplacement d'une figure solide. N.A. 17.

**155.** *R. de Saussure.* Sur le mouvement d'une droite possédant 3 dégrés de liberté. C.R. 133. 1283.

Siehe auch 316; 862; 863.

### Schraubenrechnung.

**156.** *F. Klein.* Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball. Z.S. 237.

**157.** *J. Cardinaal.* Sur les congruences (3, 2) contenues dans un complexe quadratique de torseurs de Ball. A.N. 6. 117.

### Mechanismen.

**158.** *O. Fischer.* Über die reduzierten Systeme und die Hauptpunkte der Glieder eines Gelenkmechanismus und ihre Bedeutung für die technische Mechanik. Z.S. 429.

**159.** *F. J. Vaes.* De vergelijking voor de indeeling der stangenvierhoeken. N.A.W. 242.

Siehe auch 185.

### Statik.

**160.** *R. Lehmann-Filhès.* Analytische Ableitung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte. A. Gr. 2. 124.

**161.** *P. H. Schoute.* Sur la réduction d'un système quelconque de forces dans l'espace $R_n$ à $n$ dimensions. A.N. 6. 193.

**162.** *A. Dittrich.* Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava daná dala se realisovati. (Wie muſs man die Ver-

bindungen und Kräfte wählen, damit ein gegebenes System derselben sich verwirklichen läfst.) C. 42; 115; 201.

**163.** *H. Schubert.* Gleichgewichtsbedingungen für 4 Kräfte, welche senkrecht zu einer starren Geraden wirken. A.Gr. 2. 279.

**164.** *H. Hartl.* Ein Apparat zur Lehre von den Drehmomenten und den Bedingungen des Gleichgewichts. Z.P 14. 321.

**165.** *L. Lecornu.* Sur la vis sans fin. S.M. 149.

### Schwerpunkte.

**166.** *F. Villareal.* Geometria de cuatro dimensiones. Teorema de Guldin. R.C.L. 4. 282.

### Momente.

**167.** *S. Jolles.* Synthetische Theorie der Centrifugal- und Drehungsmomente eines ebenen Flächenstückes. A.Gr. 2. 327.

**168.** *R. Mayr.* Über Körper von kinetischer Symmetrie. Z.S. 479.

Siehe auch 164.

### Dynamik des Punktes.

**169.** *E. Picard.* Une première leçon de dynamique. N.A. 1.

**170.** *V. Amato.* Gl'integrali delle equazioni del moto d'un punto materiale. A.G.C. No. 16.

**171.** *G. Darboux.* Sur un problème de mécanique. A.N. 6. 371.

### Centralbewegung.

**172.** *M. Volkov.* Vyvod formuly centrostremitelnoj sily. (Herleitung der Formel der Centripetalkraft.) M.P.O. 26. 164. — *D. N. Zejliger* 238; 27. 77. — *N. Schiller* 27. 7. — *D. Schorr* 31.

**173.** *G. Pennacchietti.* Sopra una generalizzazione della formola di Binet sulle forme centrali. A.G.C. No. 5.

**174.** *C. Stephanos.* Remarques sur la théorie des forces centrales. A.Gr. 2. 147.

**175.** *G. Schouten.* De centrale beweging en de functiën van Weierstrass. N.A.W. 255; 301.

**176.** *B. P. Vejnberg.* Vyvod nekotorych formul mechaniki. (Herleitung einiger Formeln der Mechanik.) M.P.O. 27. 35.

Siehe auch 177.

### Tautochronen.

**177.** **V. Nobili.* Sulla ricerca delle curve tautocrone corrispondenti a una data legge di forza centrale. G.B. 108.

Siehe auch 190.

### Pendel.

**178.** *G. G. Constantinescu.* Firul cu plumb și attracțiunea universală. (Pendel und allgemeine Anziehung.) G.M.B. 4. 125.

**179.** *V. Obolenski.* Zadača o majatnike. (Aufgabe über das Pendel.) M.P.O. 27. 17.

**180.** *J. C. Kluyver.* Le théorème de Puiseux sur le pendule sphérique. A.N. 6. 162.

**181.** *A. de Saint Germain.* Note sur la tension de la tige d'un pendule sphérique. B.D. 98.

**182.** *A. Jřeábek.* Foucaultův pokus vzhledem ku hvězdnatému nebu (Foucaults Versuch in Bezug auf den Sternenhimmel). C. 159.

**183.** *P. Furtwängler.* Über die Schwingungen zweier Pendel mit annähernd gleicher Schwingungsdauer auf gemeinsamer Unterlage. S.A.B. 1902. 245.

Siehe auch 259.

### Dynamik des Körpers.

**184.** *K. Heun.* Das Verhalten des Virials und des Momentes eines stationären Kräftesystems bei der Bewegung des starren Körpers. Z.S. 104.

**185.** *K. Heun.* Die Bedeutung des d'Alembertschen Princips für starre Systeme und Gelenkmechanismen. A.Gr. 2. 57. 298.

**186.** **T. J. I'A. Bromwich.* Applications to dynamics of some algebraical results. P.L.M.S. 197.

**187.** *C. Alasia.* Su di un recente studio del moto turbato. M.P.A. 1. 278.

**188.** **G. Kolossoff.* On a case of motion of a rigid body. M.M. 174.

**189.** *A. Mallock.* Rotation of a lamina falling in air. N. 510.

**190.** *F. Schuh.* Über die Gestalt eines schweren Cylinders, der auf einer horizontalen Ebene rollend tautochron schwingt. N.A.W. 277.

**191.** *H. Hartl.* Neue Aufsätze zur Schwungmaschine. Z.P. 14. 326.

**192.** *E. Carvallo.* Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette. J.E.P. 1.

**193.** *R. A. Smith.* The bicycle wheel. R.A.A. 197.

**194.** **W. A. T. Müller.* Über den Einfluſs des Raddurchmessers auf den Kraftbedarf der Automobile. C.A.E. 89; 105.

**195.** **M. Luxenberg.* Über den Einfluſs der Laufraddimension auf den Kraftbedarf von Automobilen. C.A.E. 161.

Siehe auch 292.

### Dynamik des Systems.

**196.** *L. Lecornu.* Sur la dynamique des corps déformables. S.M. 176.

**197.** **F. Goepel.* Die Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades rotierender Maschinen durch das Stimmgabelverfahren. M.F.I. 2. 34.

Siehe auch 707; 742.

### Differentialgleichungen der Mechanik.

**198.** *G. A. Maggi.* Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica, applicabili ai sistemi anolonomi. R.A.L.R. 10. II. 287.

### Drehung.

**199.** *P. Duhem.* Stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système affecté d'un mouvement de rotation uniforme. C.R. 134. 23.

**200.** *R. de Saussure.* Sur le mouvement le plus général d'un corps qui possède deux degrés de liberté autour d'un point fixe. C.R. 133. 1193.

### Kreisel.

**201.** **C. Barnsand, A. G. Greenhill.* The mathematical theory of the top. S. 973.

**202.** *M. Koppe.* Die Bewegung des Kreisels. S.M.B. 22.

**203.** *A. S. Chessin.* Sur la toupie de Foucault. C.R. 133. 676.

**204.** **W. Karos.* Das Kreiselprincip und der Universalflugapparat. Z.L. 39.

**205.** *H. du Bois.* Étude quantitative de la toupie magnétocinétique. A.N. 6. 581.

**206.** *R. Marcolongo.* Les paramètres rationels de Rodrigues. J.S.M. 161.

**207.** *R. Marcolongo.* Sur une démonstration d'un théorème de Jacobi. J.S.M. 169.

**208.** *F. Kötter.* Ein Beweis des Jacobischen Theorems von der Zusammensetzbarkeit einer Kreiselbewegung aus den Inversionen zweier Poinsotbewegungen. S.M.B. 11.

**209.** *D. Bobylew* und *T. Friesendorff.* Über das perimetrische Rollen eines Kreisels, dessen Schwerpunkt unter dem Unterstützungspunkte liegt. Z.S. 354.

**210.** **T. J. I'A. Bromwich.* Note on stability of motion, with an application to hydrodynamics. P.L.M.S. 325.

### Reibung.

**211.** *A. Mayer.* Zur Theorie der gleitenden Reibung. B.G.L. 235.

**212.** *F. E. Nipher.* The frictional effect of railway trains upon the air. T.S.L. 215.

Siehe auch 229.

### Potentialtheorie.

**213.** **G. Holzmüller.* Hydrodynamische Analogien zur Theorie des Potentials. Z.L.S. 83; 148.

**214.** *d'Adhémar.* Sur une équation aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. A.S.B. 26. A. 59.

**215.** *D. Hilbert.* Über das Dirichletsche Princip. A.G.G. Festschr. Nr. 3.

**216.** *U. Amaldi.* Tipi di potenziali che, divisi per una funzione fissa, si possono far dipendere da due sole variabili. R.C.M.P. 16. 1.

**217.** *T. J. I'A. Bromwich.* On the potential of a single sheet. A.Gr. 2. 295.

**218.** *T. J. I'A. Bromwich.* Note on the potential of a symmetrical system. P.M.E. 237.

**219.** *G. H. Darwin.* Ellipsoidical harmonic analysis. T.R.S.L. 197. 461.

**220.** *E. Kasner.* On algebraic potential curves. S.M.Am. 392.

**221.** *O. Callandreau.* Sur la signification de l'hypothèse de la fluidité dans la théorie de la figure des planètes. B.A. 18. 214.

Siehe auch 472; 553.

### Attraction.

Siehe 178; 292.

### Gravitation.

Siehe 206; 697; 776—780.

### Hydrostatik.

**222.** *W. Ramsay.* An experiment on hydrostatic pressure. A.N. 6. 349.

**223.** *G. Guglielmo.* Intorno a una microbalancia idrostatica ed al su uso per la misura di piccole forze. R.A.L. R. 10. II. 259.

Siehe auch 82.

### Hydrodynamik.

**224.** *J. W. Davies.* On the motion of compressible fluids. A.J.S. 12. 107.

**225.** *P. Duhem.* Sur les conditions aux limites en hydrodynamique. C.R. 134. 149.

**226.** *J. Weingarten.* Über einen Satz der Hydrodynamik. S.M.B. 2.

**227.** **G. Jaeger.* Die Energie der fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeitsmolekeln. A.A.W. 281.

**228.** *P. Duhem.* Sur l'impossibilité de certaines régions permanentes au sein des fluides visqueux. C.R. 134. 456.

**229.** *L. Natanson.* Über die Gesetze der inneren Reibung. Z.P.C. 38. 690.

**230.** **F. Ahlborn.* Über den Mechanismus des Widerstandes der Flüssigkeiten. V.N.V.H. XL.

**231.** *P. Duhem.* Sur certain cas d'adhérence d'un liquide visqueux aux solides qu'il baigne. C.R. 134. 265.

**232.** *P. Duhem.* Sur l'extension du théorème de Lagrange aux liquides visqueux. C.R. 134. 580; 686.

**233.** **L. Natanson.* Sur les lois de la viscosité. B.I.C. 1901. 95.

**234.** *L. Natanson.* On the laws of viscosity. P.M. 2. 342.

**235.** *W. A. Wijthoff.* Een geval van vloeistofbeweging zonder werveling in twee afmetingen. N.A.W. 212.

**236.** **T. Stuart.* The distribution of velocity and the forms of the stream lines due to the motion of an ellipsoid in fluid, frictionless or viscous. P.L. M.S. 342.

**237.** *H. J. Sharpe.* Liquid motion from a single source inside a hollow unlimited boundary. P.C.P.S. 223.

**238.** **A. Mitinski.* Über ein neues Princip der Wirkung der Wasserpumpen (russ.). J.R.P.C. 32. 61.

**239.** *B. Cookson.* The oscillations of a fluid in an annular trough. P.C.P. S. 200.

Siehe auch 210; 213; 242; 291; 350; 355; 784; 794.

### Wirbel.

**240.** *A. Indra.* Studien über die Wirbelbewegung. S.A.W. 110. 335.

**241.** *E. Budde.* Kleine Bemerkung zur Helmholtzschen Wirbeltheorie. S. M.B. 21.

**242.** *E. Zermelo.* Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche. Z.S. 201.

Siehe auch 794.

### Aërodynamik.

**243.** **E. Jacob.* Betrachtungen über die kinetische Theorie der Luftbewegungen. Z. L. 5.

**244.** **C. Buttenstedt.* Klärendes über den Winddruck. Z.L. 245.

**245.** **K. Steffen.* Das flugdynamische Princip. I.A.M. 160.

**246.** **W. Köppen.* Beiträge zur Mechanik des Fluges u. schwebenden Falles. I.A.M. 149.

**247.** *J. A. F. Aspinall.* Train resistance. T.E. 48. 259.

Siehe auch 204; 793; 794; 876.

### Ballistik, äufsere.

**248.** *N. A. Zabudskij.* Ob obščich svojstvach traektorii snarjada v vozduche. (Über die allgemeinen Eigenschaften der Bahn eines Geschosses in der Luft.) S.M.M. 295.

**249.** *F. P. Matz.* The motion of a projectile in a medium resisting as the cube of the velocity. M.M.F. 9. 91.

**250.** *A. v. Obermayer.* Ein Satz über den schiefen Wurf im luftleeren Raume. S.A.W. 110. 365.

**251.** *A. Kneser.* Ein Beitrag zur Frage nach der zweckmäfsigsten Gestalt der Geschofsspitzen. A.Gr. 2. 267.

**252.** **J. Castner.* Graphischer Vergleich der Leistungen verschiedener Geschütze bei gleichen Geschofsgeschwindigkeiten. P. 504.

**253.** *A. v. Obermayer.* Ueber den Einflufs der Erdrotation auf die Bewegung der Geschosse. M.A.G. 1901. 707.

**254.** *—. Les grandes vitesses initiales dans l'artillerie. I. R.A.F. Suppl. 208.

**255.** *B. Schöffler.* Das Gesetz der zufälligen Abweichungen. M.A.G. 1901. 97; 823.

**256.** *A. v. Obermayer.* Eine einfache Regel zur Beurteilung des Sinns und der Gröfse der Abweichungen beim Schwanken der Bahnen. M.A.G. 1901. 797.

**257.** *H. Rohne.* Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf das Präcisionsschiefsen der Infanterie. M.W. Beiheft 6. 277.

**258.** —. A discussion of the errors of cylindroogival projectiles. J.U.S.A. 1901. 2.

**259.** *M. Radakovic.* Bemerkungen zur Theorie des ballistischen Pendels. S.A.W. 110. 511.

### Ballistik, innere.

**260.** *E. Ökinghaus.* Das ballistische Problem auf Grundlage der Versuche und der Integrabilität. S.A.W. 109. 1159.

**261.** —. La résistance des canons contre l'éclatement. I.R.A.F. 15. Suppl. 353.

**262.** **J. Castner.* Comparaison graphique des qualités balistiques de quelques canons à gros calibre. I.R.A.F. 18. Suppl. 449.

**263.** *—. Données balistiques sur le canon de bord de 15 cm à tir rapide système Krupp. I.R.A.F. 252.

**264.** *v. Zedlitz und Neukirch.* Neue Formeln zur Berechnung des Gasdrucks und der Geschofsgeschwindigkeiten in den Rohren der Feuerwaffen. K.Z. 4. 525.

## E. Physik.

### Prinzipien der mathematischen Physik.

**265.** *M. Smoluchowski.* On nowszych postępach na polu teoryj kinetycznych materyj. (Über die neuen Fortschritte in dem Gebiet der kinetischen Theorien der Materie.) T.W. 112.

**266.** *Lord Kelvin.* On aether and gravitational matter through infinite space. P.M. 2. 161.

**267.** *N. E. Gilbert.* Some experiments upon the relations between aether, matter and electricity. P.M. 3. 361.

**268.** *Lord Kelvin.* Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light. P.M. 2. 1.

**269.** *P. Duhem.* Les théories électriques de J. Clerk Maxwell. Étude historique et critique. A.S.B. 25. 293.

**270.** *J. H. Jeans.* The mechanism of radiation. P.M. 2. 421.

### Molekularphysik.

**271.** *K. F. Slotte.* Über die Molekularbewegungen fester Körper. B.F.S. 49.

**272.** *J. W. Miller.* On a law of molecular attraction. P.M. 3. 423.

**273.** *J. Zančebskij.* Zametka po atomističeskoj teorii stroenija tel. (Bemerkung über die Atomtheorie des Aufbaues der Körper.) M.P.O. 26. 155.

**274.** *L. Matthiessen.* Die Adsorption von Gasen in Flüssigkeiten oder fein pulverisierten Körpern. Z.P. 15. 21.

**275.** *A. Batschinski.* Über das Maxwellsche Gesetz $K = n^2$ in Bezug auf die Theorie des molekularen Baues der Körper. Z.P.C. 38. 119.

**276.** *O. Tumlirz.* Compressibilität und Cohäsion der Flüssigkeiten. S.A.W. 110. 437.

### Elasticität.

**277.** *W. Voigt.* Erweiterte Elasticitätstheorie. S.A.B. 1901. 1266.

**278.** *C. Chree.* Sur la théorie de l'élasticité. J.P. 10. 705.

**279.** *Lord Kelvin.* A new specifying method for stress and strain in an elastic solid. P.M. 3. 95; 444.

**280.** **T. Levi-Cività.* Sul massimo cimento dinamico nei sistemi elastici. N.C.P. 188.

**281.** *F. Kohlrausch* und *E. Grüneisen.* Über die durch sehr kleine elastische Verschiebungen entwickelten Kräfte. S.A.B. 1901. 1086.

**282.** *Mesnager.* Tensions intérieures produites par deux forces égales et directement opposées agissant sur un solide indéfini. Application. C.R. 133. 1286.

**283.** *C. Somigliana.* Sul pricipio delle imagini di Lord Kelvin e le equazioni dell' elasticità. R.A.L.R (5) 11 I. 145.

**284.** *J. R. Benton.* Effect of drawing on the elasticity of copper wire. P.R. 13. 234.

**285.** *O. Tedone.* Su alcuni problemi di equilibrio elastico. R.A.L.R. 10. II. 251; 294.

**286.** **C. Bach.* Zur Frage der Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen bei Sandstein. M.F.I. 1. 24.

**287.** *F. Kohlrausch* und *E. Grüneisen.* Die durch sehr kleine elastische Verschiebungen entwickelten Kräfte. S.A.B. 1901. 1086.

**288.** **W. Cassie.* The measurement of Youngs modulus. C.N. 84. 267.

**289.** *F. Villareal.* Deformación de las vigas que trabajan á la flexión. R.C.L. 4. 292; 5. 17.

**290.** *H. Bouasse.* Sur les petites oscillations de torsion. J.P. 1. 21.

**291.** *C. Chree.* Elastic solids at rest or in motion in a liquid. P.R.S.L. 235.

**292.** *Lord Kelvin.* On the motion produced in an infinite elastic solid by the motion trough the space occupied by it of a body acting on it only by attraction and repulsion. P.R.S.E. 70. 225.

**293.** *J. Weingarten.* Über den Satz vom Minimum der Deformationsarbeit. A.Gr. 2. 233.

**294.** *T. Boggio.* Sull' equilibrio delle piastre elastiche piane. R.I.L. 34. 793.

**295.** *J. Hadamard.* Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires libres ou appuyées et celui de la sphère isotrope. A.E.N. 313.

**296.** *A. Francke.* Bogen mit elastisch gebundenen Widerlagern. Z.S. 15.

**297.** *B. A. Smith.* Circular arches. R.A.A. 351.

**298.** *J. W. Miller.* The elastic properties of helical springs. P.R. 14. 129.

**299.** *C. Ribière.* Sur divers cas de la flexion des cylindres à base circulaire. J.E.P. 165.

**300.** *L. N. G. Filon.* On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. P.R. S.L. 353.

**301.** *M. Panetti.* Sul calcolo delle vibrazioni trasversali di una trave elastica urtata. A. A.T. 36. 6.

**302.** *G. Lauricella.* Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa per dati spostamenti in superficie. A.D.M. 6. 289.

**303.** *E. Kott.* Transversalschwingungen einer elastischen Kugel. A.P.L. 7. 516.

**304.** *C. Chree.* Applications of elastic solide to metrology. P.M.Z. 532; 594.

Siehe auch 484.

### Festigkeitslehre.

**305.** *F. Villareal.* Resistencia de materiales. R.C.L. 4. 223.

**306.** *A. Sommerfeld.* Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitstheorie. P.Z. 266; 286.

**307.** *J. Kübler.* Noch einmal die richtige Knickformel. Z.S. 367.

**308.** **H. E. Wimperis.* Méthode de détermination de la résistance à la traction. E.E. 29. 330.

**309.** *W. H. Warren* and *S. H. Barraclough.* Experimental investigation on the strength of brick work when subjected to compressive and transverse stresses. P.N.S.W. 34. 63.

**310.** *H. E. Wimperis.* Some experiments upon beam under endlong compression. P.C.P.S. 191.

**311.** *C. W. Darley.* Curved concrete walls for storage reservoirs. P.N.S. W. 49.

**312.** *H. Wilson.* On the failure of certain cast steels dies used in the manufacture of drown tubes. S.P.M. No. 7.

**313.** **W. Wolski.* Über die Bohrstange. G.E. 213.

**314.** **Stribeck.* Kugellager für beliebige Belastungen. M.F.I. 2. 1.

**315.** *C. F. Stromeyer.* On explosions of steam pipes due to water-hammers. S P.M. No. 3.

### Krystallstruktur.

**316.** *H. Hilton.* A comparison of various notations employed in „theories of crystal structure" and a revision of the 230 groups of movements. P.M. 3. 203.

**317.** *H. Hilton.* Ein Vergleich der verschiedenen Bezeichnungen, die in der Theorie der Krystallstruktur benutzt werden und eine Revision der 230 Bewegungsgruppen. C.M.G. 753.

**318.** *W. Voigt.* Über die Parameter der Krystallphysik und über gerichtete Gröfsen höherer Ordnung. N.G.G. 1900. 355.

**319.** *W. Voigt.* Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Krystallelektrizität. N.G.G. 1900. 117.

Siehe auch 352; 404.

### Schwingungen.

**320.** *A. Korn.* Sur les vibrations universelles de la matière. C.R. 134. 31.

**321.** **C. Barus.* On the stability ot vibrations. S. 403.

**322.** *Lord Rayleigh.* On the pressure of vibrations. P.M. 3. 338.

**323.** *J. Horn.* Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad. Z.S. 400.

**324.** *L. Gümbel.* Ebene Transversalschwingungen freier stabförmiger Körper mit variablem Querschnitt und beliebiger symmetrischer Massenverteilung unter der Einwirkung periodischer Kräfte mit spezieller Berücksichtigung des Schwingungsproblemes des Schiffbaus. J.S.G. B. 211.

**325.** *F. Richarz* und *P. Schulze.* Über asymmetrische Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts. A.N. 6. 695.

**326.** *M. I. Northway* and *A. S. Mackenzie.* On the period of a rod vibrating in a liquid. P.R. 13. 145.

**327.** *A. Mallock.* Vibrations of rifle barrels. P.R.S.L. 327.

**328.** *Lord Rayleigh.* Some general theorems concerning forced vibrations and resonance. P.M. 3. 97.

**329.** *E. Riecke.* Schwebungen bei erzwungener Schwingung. P.Z. 130; 201.

**330.** *K. R. Johnson.* Quelques remarques sur les oscillations dans l'excitateur de Hertz. J.P. 10. 756.

**331.** **D. Mazzotto.* Sulle leggi delle vibrazioni elettriche. N.C.P. 173.

**332.** *Lamotte.* Recherches experimentales sur les oscillations électriques d'ordre supérieur. A.C.P. 24. 205.

Siehe auch 239; 290; 301; 303; 336; 594; 600.

### Wellenlehre.

**333.** *W. G. Fraser.* On the breaking of waves. P.M.Z. 356.

**334.** *P. Zeeman.* Une expérience relative à la propagation anomale des ondes. A.N. 4. 318.

**335.** **R. W. Wood.* On the propagation of cusped waves and their relation to the primary and secondary focal lines. P.P.S.L. 667.

**336.** *J. A. Fleming.* Electrical oscillations and electrical waves. T.E. 495; 531.

**337.** *M. Abraham.* Energie elektrischer Drahtwellen. A.P.L. 6. 217.

**338.** *E. Oddone.* Del moto relativo nelle onde meccaniche terrestri. R.F.M. 5. 34.

Siehe auch 574; 782.

### Strahlen.

**339.** *H. S. Allen.* A preliminary note on the relation between primary and secondary Roentgen radiation. PM. 3. 126.

**340.** *L. Benoist.* Lois de transparence de la matière pour les rayons *X.* J.P. 10. 653.

**341.** *E. Rutherford* and *R. K. Mac Clung.* Energy of Roentgen and Becquerel rays and the energy required to produce an ion in gases. T.R.S.L. 196. 25.

**342.** *W. Seitz.* Beiträge zur Kenntnis der Kathodenstrahlen. A.P.L. 6. 1.

**343.** *J. Stark.* Geschichtliches zur Erklärung der Zerstreuung der Kathodenstrahlen. P.Z. 235.

**344.** *H. A. Wilson.* Note on the magnetic deflection of cathode rays. P.C.P.S. 179.

**345.** **E. Dorn.* Elektrostatische Ablenkung der Radiumstrahlen. A.N.G.H. 45.

Siehe auch 640.

### Kapillarität.

**346.** *G. Bakker.* Théorie de la capillarité. J.P. 1. 105.

**347.** *G. Bakker.* Zur Theorie der Kapillarität. III. Z.P.C. 36. 681.

**348.** *G. Bakker.* La constante capillaire de Laplace. A.N. 6. 758.

**349.** *H. Brocard.* Capillarité du tireligne. I.M. 213.

**350.** *D. J. Korteweg.* Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par les variations de densité considérables, mais continues et sur la théorie de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de la densité. A.N. 6. 1.

**351.** **J. Fotschidlewski.* Zwei Vorlesungsversuche, die Kapillarität betreffend (russ.). J.R.P.C.G. 32. 66.

**352.** *H. Hilton.* Note on capillarity constants of crystal faces. P.M. 3. 144.

**353.** *G. A. Hulett.* Beziehungen zwischen Oberflächenspannungen und Löslichkeit. Z.P.C. 37. 385.

**354.** *A. Kalähne.* Über die Benutzung stehender Kapillarwellen auf Flüssigkeiten als Beugungsgitter und die Oberflächenspannung von Wasser und Quecksilber. A.P.L. 7. 440.

**355.** *G. Morera.* Stabilità delle configurazioni di equilibrio di un liquido in un tubo capillare di rotazione attorno ad un asse verticale. R.A.L.R. 11. I. 223.

### Elektrokapillarität.

**356.** *S. Lemström.* On the state of liquids in capillary tubes under influence of electrical air-currents. B.F.S. 233.

### Diffusion.

**357.** *G. Thovert.* Sur une application nouvelle d'observations optiques à l'étude de la diffusion. C.R. 133. 1197.

**358.** *A. Winkelmann.* Über Diffusion von Wasserstoff durch Palladium. A.P.L. 6. 104.

### Osmose.

**359.** *C. H. Wind.* Eine Gleichung für den osmotischen Druck in konzentrierten Lösungen. A.N. 6. 714.

**360.** **R. A. Lehfeld.* Elektromotive force and osmotic pressure. P.P.S.L. 577.

**361.** *V. v. Türin.* Ein Zusatz zu meiner Abhandlung. Z.P.C. 34. 403 (1900). Z.P.C. 36. 524.

Siehe auch 579.

### Viscosität.

Siehe auch 228; 231—234; 407.

### Akustik.

**362.** *Lord Rayleigh.* Acoustical notes. P.M. 2. 280.

**363.** *R. Davis.* Über eine kürzlich entdeckte Erscheinung, welche durch stehende Schallwellen hervorgerufen wird. P.Z. 3. 59.

**364.** *D. van Gulin.* Über Interferenztöne eines Geräusches. A.N. 6. 287.

**365.** **E. H. Barton.* On the refraction of sound by wind. P.P.S.L. 534.

**366.** *O d'Alencar Silva.* L'action d'une force accéleratrice sur la propagation du son. J.S.M. 97.

**367.** **O. Abraham* u. *K. L. Schaefer.* Über die maximale Geschwindigkeit von Tonfolgen. B.Z.A. 13.

**368.** *H. Pflaum.* Ein verstimmtes Echo. C.R.R. 26.

**369.** *A. Blondel.* Méthode nouvelle pour l'étude de la parole et des courants microphoniques. C.R. 133. 786.

Siehe auch 27; 197; 488; 881.

### Geometrische Optik.

**370.** *G. Leonhardt.* Eine merkwürdige Beziehung zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln quadratischer Gleichungen. Z.H. 31. 522.

**371.** *F. Schuh.* Die Horopterkurve. Z.S. 375.

**372.** *J. Točidlovskij.* Elementarnyj vyvod formuly sferičeskago zerkala. (Elementare Herleitung der Formel für den Kugelspiegel). M.P.O. 27. 111.

**373.** *H. A. Lorentz.* Sur la méthode du miroir tournant pour la détermination de la vitesse de la lumière. A.N. 6. 303.

**374.** *O. Schönrock.* Theoretische Bestimmung des Axenfehlers von Krystallplatten. Z.I. 22. 1.

**375.** *L. Matthiessen.* Das astigmatische Bild des horizontalen, ebenen Grundes eines Wasserbassins. A.P.L. 6. 347.

**376.** *F. E. Nipher.* Astigmatic images of the bottom of a pool of water. S. 855.

**377.** *L. Matthiessen.* Von der astigmatischen Strahlenbrechung in einer Vollkugel bei schiefer Incidenz und von den adjungierten Fixpunkten. A.P.L. 7. 381.

**378.** *R. Fuchs.* Linsenkonstruktionen. Z.P. 15. 22.

**379.** **A. Kerber.* Formeln zur Berechnung verkitteter Doppellinsen. D.M. 9. 157; 175; 184.

**380.** **R. J. Sowter.* On astigmatic lenses. P.P.S.L. 553.

**381.** **E. Müller.* Objektivbrennweite und Bilddurchmesser. J.P.R. 106.

**382.** *R. Sissingh.* Sur quelques propriétés des systèmes de lentilles photographiques. A.N. 6. 390.

**383.** *B. Hesselberg.* Note sur la mesure du rayon de courbure des lentilles sphériques de petites dimensions. A.V.A.S. No. 7.

**384.** *S. P. Thomson.* Some experiments on the weal aberration of lenses. A.N. 6. 747.

**385.** *R. Sissingh.* Propriétés générales des images formées par des rayons centraux traversant une série de surfaces sphériques centrées. M.A.A. No. 5.

**386.** **N. Smirnov.* Über die Brechung des Lichts an einer negativ gekrümmten Fläche. (russ.) J.R.P.C.G. 32. 134.

**387.** *H. Bouasse.* Sur les focales dans les milieux isotropes. J.P. 1. 201.

**388.** **S. A. Mitchell.* Focal properties of plane gratings. A.J.C. 14. 331.

**389.** *O. M. Corbino.* Sulla doppia rifrazione de la polarizzazione rotatoria. R.A.L.R. 10. B. 175.

**390.** *A. Cornu.* Détermination des 3 paramètres optiques principaux d'un cristal, en grandeur et en direction, par le réfractomètre. J.P. 1. 136.

**391.** *P. Culmann.* Nouveaux réfractomètres. J.P. 10. 691.

Siehe auch 335; 357; 864; 865.

### Physikalische Optik.

**392.** **O. Corbino.* Sulla costituzione della luce bianca. V.C.I. 161.

**393.** **C. Klein.* Optische Studien. S.A.B. 1902. 103.

**394.** *M. Planck.* Über die Natur des weifsen Lichts. A.P.L. 7. 390.

**395.** *W. M. Hicks.* On the Michelson-Morley experiment relating to the drift of the aether. P.M. 3. 9.

**396.** **P. Lebedev.* Experimentaluntersuchungen über den Druck des Lichts (russ.) J.R.P.C.G. 33. 53.

**397.** *P. Lebedev.* Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichts. A.P.L. 6. 433.

**398.** **P. Lebedev.* Investigations on the pressure of light. T.E. 48. 211; 263.

**399.** **P. Lebedev.* Experimental investigation of the pressure of light. A.J.C. 15. 60.

**400.** **P. Lebedev.* Researches on the pressure forces of light. C.N. 85. 37; 52; 61.

**401.** *K. Schwarzschild.* Der Druck des Lichts auf kleine Kugeln und die Arrheniussche Theorie der Kometenschweife. S.A.M. 293.

**402.** *M. Hamy.* Sur les propriétés des franges de réflexion des lames argentées. C.R. 134. 443.

**403.** *H. G. Gale.* On the relation between density and index of refraction of air. P.R. 14. 1.

**404.** *F. Pockels.* Über die Änderung des optischen Verhaltens verschiedener Gläser durch elastische Deformation. A.P.L. 7. 745.

**405.** *E. H. J. Cunaeus.* Die Bestimmung des Brechungsvermögens als Methode zur Untersuchung der Zusammensetzung koexistierender Dampf- und Flüssigkeitsphasen. Z.P.C. 36. 232.

**406.** *M. Rudolphi.* Über die Molekularrefraktion des Chloralhydrats in Lösungen mit verschiedenen Lösungsmitteln. Z.P.C. 37. 426.

**407.** *L. Natanson.* On double-refraction in moving viscous liquids. P.M. 2. 469.

**408.** **F. Rinne.* Notiz über die Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung im konvergenten polarisierten Lichte mit Hilfe des Gypsblättchens vom Rot 1. Ordnung. C.M.G. 653.

**409.** *H. C. Pocklington.* On rotatory polarisation in biaxial crystal. P.M. 2. 361.

**410.** *H. Reitter.* Über das molekulare Drehungsvermögen der *n*-Acidyl-*l*-Äpfelsäureäthylester. Z.P.C. 36. 129.

**411.** *K. Schwarzschild.* Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt. M.A. 177.

**412.** *H. C. Pocklington.* On the interference bands produced by a thin wedge. P.C.P.S. 105.

**413.** *A. Cornu.* Observation spectrale des franges d'interférence. A.N. 6. 593.

**414.** *J. C. Shedd.* Über die Formen der von dem Michelsonschen Interferometer gefundenen Kurven. P.Z. 47.

**415.** *O. Lummer.* Ein neues Interferenzspektroskop. A.N. 6. 773.

**416.** *F. J. Micheli.* Über den Einflufs der Temperatur auf die Dispersion ultravioletter Strahlen im Flufsspat, Steinsalz, Quarz und Kalkspat. A.P.L. 7. 772.

**417.** **R. Wood.* On the production of a line spectrum by anomalous dispersion and its application to the flash spectrum. A.J.C. 13. 63.

**418.** *B. Woringer.* Über die Rotationsdispersion der Apfelsäure. Z.P.C. 36. 336.

**419.** *C. Barus.* The flower-like distortion of the coronas due to graded cloudy condensation. A.J.S. 13. 309.

**420.** *P. Rossi.* Della dispersione anomala. R.F.M. 5. 273.

**421.** *F. Martens.* Über die Dispersion ultravioletter Strahlen. A.P.L. 6. 603.

**422.** *W. H. Julius.* Le rayon vert. A.N. 6. 385.

**423.** *V. Novák.* O skládáni barev. (Über Farbenzusammensetzung). C. 135. 233.

**424.** *F. Lindemann.* Zur Theorie der Spektrallinien. S.A.M. 441.

**425.** *W. Sutherland.* The cause of the structure of spectra. P.M. 2. 245.

**426.** *O. Lummer* und *E. Gehrcke.* Über den Bau der Quecksilberlinien. S.A.B. 1902. 11.

**427.** *C. Fabry* et *A. Perot.* Mesures de longueurs d'onde en valeur absolue, spectre solaire et spectre du fer. A.C.P. 25. 98.

**428.** *G. W. Stewart.* The distribution of energy in the spectrum of the acetylene flame. P.R. 13. 257.

**429.** *Camichel* et *Mandoul.* Expériences spectrophotométriques sur la peau. J.P. 1. 101.

**430.** *K. Exner.* Zur Genesis der richtigen Erklärung der Scintillationserscheinungen. S.A.W. 110. 73.

**431.** *W. Voigt.* Zur Theorie der Fluorescenzerscheinungen. A.N. 6. 352.

Siehe auch 71; 128; 268; 354; 373; 389; 455; 530; 532; 533; 799; 800[a]; 828; 866—868.

### Aberration.

**432.** *H. A. Lorentz.* La théorie de l'aberration de Stokes dans l'hypothèse d'un éther qui n'a pas partout la même densité. A.N. 7. 81.

Siehe auch 384; 728; 769.

### Elektrooptik.

**433.** *L. Amaduzzi.* La teoria elettromagnetica della luce e le recenti ricerche sperimentali ad essa relativi. R.F.M. 5. 45.

**434.** *W. Voigt.* Beiträge zur Elektronentheorie des Lichtes. A.P.L. 6. 459.

**435.** *H. A. Wilson.* On the Hall effect in gases at low pressures. P.C.P.S. 249.

**436.** *G. Moreau.* De l'effet Hall et des couches de passage dans les lames métalliques minces. A.C.P. 25. 204.

**437.** *P. V. Bevan.* On the influence on light reflected from and transmitted through a metal of a current in the metal. P.C.P.S. 380.

**438.** **H. Buisson.* Influence de la lumière sur les propriétés électriques superficielles. E.E. 29. 8.

**439.** *W. Schmidt.* Elektrische Doppelbrechung in gut und schlecht isolierenden Flüssigkeiten. A.P.L. 7. 142.

Siehe auch 635.

### Magnetoptik.

**440.** *N. A. Kent.* Notes on the Zeeman effect. A.J.C. 13. 289; P.M. 2. 275.

**441.** *G. W. Walker.* On asymmetry of the Zeeman effect. P.M. 3. 247.

**442.** *W. Voigt.* Magnetische Drehung der Polarisationsebene innerhalb eines Absorptionsstreifens. A.P.L. 6. 784.

### Photometrie.

Siehe 429; 455.

### Wärmelehre.

**443.** *E. Cesaro.* Interno ad una limitazione di costanti nella teoria analitica del calore. R.A.N. 31.

**444.** *J. P. Kuenen.* On the law of the constancy of the quantity of heat. A.N. 6. 39.

**445.** **L. Holborn* und *W. Dittenberger.* Wärmedurchgang durch Heizflächen. M.F.I. 2. 56.

**446.** **J. van der Vlieth.* Neuer Apparat um die Wärmeleitungsfähigkeit einer Mauer zu zeigen (russ.) J.R.P.C.G. 32. 63.

**447.** **W. Lermantov.* Über eine Methode, um direkt durch einen Versuch den Wärmeverlust durch die Mauer eines Hauses zu bestimmen (russ). J.R.P.C.G. 32. 63.

**448.** *W. Schaufelberger.* Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers, aus dem stationären und variablen Temperaturzustand bestimmt und Wärmeflufs in einer durch Kühlwasser bespülten Endfläche eines Wärmeleiters. A.P.L. 7. 589.

**449.** *J. Boussinesq.* Mise en équation des phénomènes de convection calorifique et aperçu sur le pouvoir refroidissant des fluides. J.P. 1. 65.

**450.** *J. Boussinesq.* Sur le pouvoir refroidissant d'un courant liquide ou gazeux. J.P. 1. 71.

**451.** *P. Compan.* Pouvoir refroidissant et conductibilité de l'air. C.R. 133. 1202.

**452.** *P. Compan.* Pouvoir refroidissant de l'air aux pressions élevées et de l'air en mouvement. C.R. 134. 522.

**453.** *J. Hartmann.* Die elektrische Heizeinrichtung des Potsdamer Sternspektrographen. No. III. Z.I. 21. 313.

**454.** *H. Rebenstorff.* Ein Luftthermoscop von erhöhter Empfindlichkeit. Z.P. 15. 19.

**455.** *B. Harkányi.* Über die Temperaturbestimmung der Fixsterne auf spektralphotometrischem Wege. A.N.K. 158. 17.

Siehe auch 416; 780; 785—786; 869—875.

### Thermodynamik.

**456.** *H. J. S. Sand.* Thermodynamische Bemerkungen. Z.P.C. 36. 499.

**457.** *V. Fischer.* Analogien zur Thermodynamik. Z.S. 1.

**458.** **R. H. Thurston.* Elementary graphics and geometry of thermodynamics. J.F.I. 62; 124.

**459.** *P. Duhem.* Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik. Z.P.C. 37. 91.

**460.** *G. N. Lewis.* The law of physicochemical change. P.A.Bo. 49.

**461.** *G. N. Lewis.* Das Gesetz physikochemischer Vorgänge. Z.P.C. 38. 205.

**462.** *A. Denizot.* Zur mathematischen Behandlung des zweiten Hauptsatzes. A.P.L. 7. 358.

**463.** *A. Denizot.* Przyczynek do uzasadnienia matemaycznego drugiej zasady termodynamiki. (Mathematische Deutung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik). W.M. 56.

**464.** *K. v. Wesendonck.* Einige Bemerkungen über die Arbeit des Herrn Wiedeburg zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. A.P.L. 7. 576.

**465.** *K. Schreber.* Der Mensch als kalorische Maschine und der zweite Hauptsatz. P.Z. 107; 261. — *N. Zuntz* 184.

**466.** *G. Moreau.* Sur la courbe adiabatique. C.R. 133. 732.

**467.** *K. F. Slotte.* Apparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeelements. Z.P. 15. 12.

**468.** *J. Dewar.* The nadir of temperature and allied problems. C.N. 84. 49.

**469.** *A. Battelli.* Recherches sur la loi de Boyle appliquée à de très basses pressions. A.C.P. 25. 308.

**470.** *A. Battelli.* Über das Boylesche Gesetz bei sehr niedrigen Drucken. P.Z. 17.

**471.** *H. Lohmann.* Das Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz. Z.P. 14. 162.

**472.** *J. J. van Laar.* Über die Ableitungen des thermodynamischen Potentials nach $T$ und $p$ bei zusammengesetzten Komponenten. Z.P.C. 36. 216.

**473.** **F. Lengfeld.* A new proof of the formula $d = \frac{0,\,02\,T^2}{L}$. J.P.C. 499.

**474.** **S. Young.* On the laws of Cailletet and Mathias and the critical density. P.P.S.L. 480.

**475.** *P. Saurel.* On the generalisation of Clapeyron's equation. J.P.C. 393.

**476.** *P. Duhem.* Über die Verdampfung eines Gemisches zweier flüchtigen Stoffe für den Fall, daſs der eine Dampf sich dissociieren kann. Z.P.C. 36. 227.

**477.** *F. A. H. Schreinemakers.* Les tensions de vapeur des mélanges binaires et ternaires. A.N. 4. 346.

**478.** *J. E. Verschaffelt.* Une formule empirique pour les isothermes. A.N. 6. 650.

**479.** *J. Rose-Innes.* On the practical attainment of the thermodynamical scale of temperature. P.M. 2. 130.

**480.** *J. H. Jeans.* The theoretical evaluation of the ratio of the specific heat of a gas. P.M. 2. 638.

**481.** *H. Mache.* Eine Beziehung zwischen der spezifischen Wärme einer Flüssigkeit und der ihres Dampfes. S.A.W. 110. 176.

**482.** *K. Puschl.* Spezifische Wärme von Lösungen. S.A.W. 109. 981.

**483.** *C. Dieterici.* Zur Theorie des Sättigungszustandes. A.P.L. 6. 861.

**484.** *V. Blaess.* Darstellung der Meniskusänderungen gesättigtdampfförmiger Substanzen. P.Z. 115.

**485.** *G. Tammann.* Über die Ausfluſsgeschwindigkeit krystallisierter Stoffe. A.P.L. 7. 198.

**486.** *F. Jüttner.* Über die Berechnung der Verdünnungswärmen nach der Kirchhoffschen Formel. Z.P.C. 38. 76.

**487.** *F. de Boer.* Considérations élémentaires relatives à l'influence de la pesanteur sur la distribution de la température dans une masse gaseuse. A.N. 6. 641.

**488.** *E. H. Stevens.* Über Schallgeschwindigkeit der Luft bei gewöhnlicher und bei hoher Temperatur und in verschiedenen Dämpfen. A.P.L. 7. 285.

**489.** *F. E. Nipher.* The specific heat of gaseous nebulae in gravitational contraction. T.S.L. 10. 63.

**490.** *L. Gentil-Tippenhauer.* Zur Theorie des Einflusses des Mondes aut die Witterung. K.D.P. 2. 92.

**491.** *Rehbinder.* Thermische Knoten und Arbeit der Athmosphäre. K.D.P. 2. 132.

**492.** *C. H. Wind.* Sur la règle des phases de Gibbs. A.N. 4. 323.

**493.** *M. Wilderman.* On the velocity of reaction before complete equilibrium and before the point of transition I. P.M. 2. 50.

**494.** **R. H. Thurston.* Thermodynamics of the gas engine. S. 859.

Siehe auch 107; 268; 496; 497; 747; 814.

### Lösungen.

**495.** *W. Nernst.* Zur Theorie der Lösungen. Z.P.C. 38. 487.

**496.** *A. Schükarew.* Zur Thermodynamik der konzentrierten Lösungen. Z.P.C. 38. 543.

**497.** *N. Schiller.* Zur Thermodynamik ungesättigter Lösungen. A.N. 6. 497.

**498.** *J. H. Groshans.* Isobare wässrige Lösungen. Z.P.C. 38. 163,

**499.** *S. Meyer.* Über die durch den Verlauf der Sättigungskurven bedingte maximale Arbeit. A.P.L. 7. 937.

**500.** **K. Puschl.* Über die spezifische Wärme von Lösungen. M.C.W. 22. 77.

**501.** **A. Campetti.* Sulla relazione fra la solubilità e il calore di soluzione. N.C.P. 125.

**502.** *C. Forch.* Die Änderung des Molekularvolums gelöster Salze mit der Temperatur. P.Z. 183.

**503.** *O. Sackur.* Über den Einfluſs gleichtöniger Zusätze auf die elektromotorische Kraft von Flüssigkeitsketten. Z.P.C. 38. 129.

**504.** *W. Nernst* und *H. Riesenfeld.* Über elektrolytische Erscheinungen an der Grenzfläche zweier Lösungsmittel. N.G.G. 1901. 54.

**505.** *S. Arrhenius.* Zur Berechnungsweise des Dissociationsgrades starker Elektrolyte. Z. P. C. 36. 28; 37. 315. H. Jahn 36. 453; 37. 490; 38. 125. W. Nernst 36. 596.

**506.** *H. Drucker.* Die Dissociationsverhältnisse ternärer Elektrolyte. Z.P.C. 38. 602.

**507.** *Y. Osaka.* Beziehung zwischen der Dissociationskonstante und dem Dissociationsgrade eines Elektrolyts in Gegenwart anderer Elektrolyte. Z.P.C. 36. 539.

**508.** *C. L. Speyers.* The molecular weights of some carbon compounds in concentrated solutions with carbon compounds as solvents. A.J.S. 13. 213.

**509.** *Y. Osaka.* Bemerkungen über Trijodide. Z.P.C. 38. 743.

Siehe auch 482.

## Zustandsgleichung.

**510.** *H. Hilton.* A. further note on van der Waals equation. P.M. 2. 108.

**511.** *J. D. van der Waals.* Contribution à la connaissance de l'équation d'état. A.N. 4. 299.

**512.** *R. Hollmann* u. *K. Tammann.* Zwei Zustandsdiagramme. A.P.L. 6. 74.

**513.** **C. M. A. Hartmann.* On the first plait in van der Waals's free energy surface for mixtures of two substances. J.P.C. 425.

**514.** *M. Reinganum.* Über die Theorie der Zustandsgleichung schwach komprimierter Gase. A.P.L. 6. 533.

**515.** *H. Kamerlingh-Onnes.* Expression of the equation of state of gases and liquids by means of series. C.P.L. No. 71.

**516.** *H. Kamerlingh-Onnes.* Über die Reihenentwicklung für die Zustandsgleichung der Gase und Flüssigkeiten. A.N. 6 874.

**517.** *J. D. van der Waals.* Sur une formule exacte exprimant la variation de $b$ avec le volume. A.N. 6. 47.

**518.** *G. Tammann.* Über Tripelpunkte. A.P.L. 6. 65.

**519.** *J. D. van der Waals.* Die Zustandsgleichung und die Theorie der cyklischen Bewegung. Z.P.C. 38. 257.

**520.** *J. D. van der Waals.* Über die Beziehung zwischen den Veränderungen, denen die spezifischen Volume des gesättigten Dampfes und der koexistierenden Flüssigkeit bei Veränderung der Temperatur unterliegen. Z.P.C. 36. 461.

**521.** *F. A. H. Schreinemakers.* Dampfdrucke ternärer Gemische. Z.P.C. 36. 257; 413; 710; 37. 129; 38. 227.

**522.** *P. Kohnstamm.* Über Dampfdrucke binärer Gemische betrachtet im Lichte der Theorie von van der Waals. Z.P.C. 36. 41. — *W. Nernst.* 602.

**523.** *P. Duhem.* Über die Verdampfung binärer Gemische. Z.P.C. 36. 605.

Siehe auch 528.

## Kinetische Gastheorie.

**524.** *S. Rejter.* Zametka po Kinetičeskoj teorii gazov. (Bemerkung über die kinetische Gastheorie). M.P.O. 27. 108.

**525.** *J. H. Jeans.* The distribution of molecular energy. T.R.S.L. 196. 397.

**526.** *M. Planck.* Über die Verteilung der Energie zwischen Äther und Materie. A.N. 6. 55.

**527.** *F. M. Exner.* Über den Gleichgewichtszustand eines schweren Gases. A.P.L. 7. 683.

**528.** *S. H. Burbury* Boltzmann's law of distribution $e^{-2h\chi}$ and van der Waals' theorem. P.M. 2. 403.

**529.** *C. J. Kool.* Seconde note sur la correction qu'exige l'équation $\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} PV$ à cause du volume que possèdent les molécules. B.S.V. 383.

**530.** *G. W. Walker.* On the application of the kinetic theory of gases to the electric, magnetic and optical propertics of diatomic gases. P.R.S.L. 77.

**531.** *— Die Athmosphäre der Planeten und die kinetische Gastheorie. S.L. 63.

## Strahlung.

**532.** **R. Mewes.* Die Licht- und Wärmestrahlungsgesetze und deren Bedeutung für das Beleuchtungs- und Heizungswesen. Z.B. 410; 421; 433.

**533.** **E. F. Nichols* and *G. F. Hull.* Pressure due to light and heat radiation. A.J.C. 15. 62.

**534.** **J. H. Jeans.* The mechanism of radiation. P.P.S.L. 754.

**535.** *O. Lummer.* Notiz zu meinem Aufsatze: Über die Gültigkeit des Draperschen Gesetzes. A.Gr. 2. 155.
**536.** *O. Lummer.* Die Gesetze der schwarzen Strahlung und ihre praktische Verwendung. A.Gr. 2. 157.
**537.** *O. Lummer* und *E. Pringsheim.* Kritisches zur schwarzen Strahlung. A.P.L. 6. 192.
**538.** *F. Paschen.* Über das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers. A.P.L. 6. 646.
**539.** *M. Planck.* Über irreversible Strahlungsvorgänge. A.P.L. 6. 818.
**540.** *S. H. Burbury.* On irreversible processes and Plancks theory in relation thereto. P.M. 3. 225.
**541.** *Compan.* Lois du rayonnement aux basses températures. C.R. 133. 813.
**542.** **H. Rubens* and *F. Kurlbaum.* On the heat radiation of long wave length emitted by black bodies at different temperatures. A.J.C. 14. 335.
**543.** *P. G. Nutting.* On the complete emission function. P.M. 2. 379.
**544.** A. W. Porter. The emission function of a body emitting a line spectrum. P.M. 2. 573.
**545.** *O. Lummer* u. *E. Pringsheim.* Temperaturbestimmung mit Hilfe der Strahlungsgesetze. P.Z. 97.
**546.** *E. L. Nichols.* The visible radiation from carbon. P.A.Bo. 71.
**547.** *A. Pflüger.* Prüfung des Kirchhoffschen Gesetzes an der Emission und Absorption glühender Turmaline. A.P.L. 7. 806.
**548.** *O. W. Richardson.* On the negative radiation from hot platinum. P.C.P.S. 286.

Siehe auch 270.

## Elektrostatik.

**549.** **M. Frank.* Über das Prinzip der natürlichen Elektrisierung. Z.E. 233; 266.
**550.** *J. B. Goebel.* Die Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln. Cr. 124. 157.
**551.** **J. H. Pomey.* Sur un cas particulier d'équilibre électrostatique de deux cylindres de révolution parallèles. E.E. 29. 457.
**552.** *G. Jäger.* Über das elektrische Feld eines ellipsoidischen Leiters. S.A.W. 110. 449.
**553.** *A. Korn.* Über die natürliche elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktoroberfläche. S.A.M. 425.
**554.** *C. Carpini.* Determinazione del potenziale elettrostatico mediante la deformazione d'un superficie liquida. R.A.L.R. 11. I. 65.
**555.** **N. Orlov.* Elektrische Figuren im Felde eines elektrischen Fadens (russ.). J.R.P.C.G. 33. 29.
**556.** *F. Tamm.* Über den Einfluſs des Luftdruckes und der Luftfeuchtigkeit auf die Entladung statischer Elektrizität aus Spitzen. A.P.L. 6. 259.
**557.** *F. Beaulard.* Sur la différence de potentiel et l'amortissement de l'étincelle électrique à caractère oscillatoire. C.R. 134. 90.
**558.** **E. Néculcéa.* L'étincelle électrique. E.E. 28. 206.
**559.** **W. Tochegliaev.* Experimentaluntersuchungen über die Funkenentladung eines Kondensators (russ.). J.R.P.C.G. 32. 141.
**560.** *W. Duane.* On elektrometers. P.R 13. 369.

Siehe auch 129; 878—880.

## Dielektrizität.

**561.** *J. A. Fleming.* On a model which imitates the behaviour of dielectrics. P.M. 2. 228. — *J. Buchanan.* 3. 240.
**562.** *F. Hlawati.* Eine experimentelle Prüfung des Clausius-Mosottischen Gesetzes. S.A.W. 110. 454.
**563.** *J. S. Shearer.* Some experiments on the behaviour of dielectris subjected to high potentials. P.R. 14. 89.
**564.** *P. L. Mercanton.* Contribution à l'étude des pertes d'énergie dans les diélectriques. B.S.V. 483.
**565.** *R. Fellinger.* Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Krystallen im homogenen elektrischen Felde. A.P.L. 7. 333.
**566.** *A. de Forest-Palmer.* On the dielectric constant of dilute electrolytic solutions. P.R. 14. 38.
**567.** *K. Bädeker.* Experimentaluntersuchung über die Dielektrizitätskonstante einiger Gase und Dämpfe in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur. Z.P.C. 36. 305.
**568.** *F. Maccarone.* Ein Messapparat für die Erscheinungen der dielektrischen Polarisation. P.Z. 57.

Siehe auch 575; 583; 608.

## Elektrodynamik.

**569.** *E. Carvallo.* Sur l'application des équations de Lagrange aux phénomènes électrodynamiques. C.R. 133. 924.

**570.** *Liénard.* Sur l'application des équations de Lagrange aux phénomènes électrodynamiques et électromagnétiques. C.R. 134. 163.

**571.** *E. Carvallo.* Electrodynamique des corps en mouvement. C. R. 134. 165.

**572.** *J. Delemer.* Sur certaines équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en physique mathématique et notamment dans l'étude de la propagation de l'électricité. A.S.B. 26. B. 69.

**573.** *E. Carvallo.* Équations générales de l'électrodynamique dans les conducteurs et les diélectriques parfaits en repos. C.R. 134. 36.

**574.** *A. E. H. Love.* The integration of the equations of propagation of electric waves. T.R.S.L. 197. 1.

**575.** **G. Platner.* Über die Fortpflanzung der elektrischen Kraft. E.C.Z. 241.

**576.** *J. Stark.* Nachtrag über die Giltigkeitsgrenze des Ohmschen Gesetzes. A.P.L. 7. 932.

**577.** **J. Stark.* Das Ohmsche Gesetz. N.R. 597.

**578.** *E. Carvallo.* Extension de deux lois de Kirchhoff. C.R. 133. 1290.

**579.** *F. Krüger.* Elektromotorische Kraft und osmotischer Druck. Z.P.C. 36. 87.

**580.** *J. Stark.* Bemerkungen zur elektrischen Strömung durch hohe Vakua. P.Z. 165.

**581.** *A. Blondel.* L'inscription directe des courants électriques variables. II. R.G.O. 639.

**582.** *M. de Waha.* Über unipolare Induktion. Z.P. 14. 143.

**583.** *E. v. Schweidler.* Über das Verhalten flüssiger Dielektrika beim Durchgange eines elektrischen Stroms. S.A.W. 109. 964.

**584.** *E. Rutherford.* Dependence of the current through conducting gases on the direction of the electric field. P.M. 2. 210.

**585.** *G. Repetto.* Sui centri di flusso elettrico. M.P.A. 1. 172.

**586.** *J. J. Thomson.* On the theory of electric conduction through thin metallic films. P.C.P.S. 120.

**587.** *H. Muraoka* und *T. Tamaru.* Über die Veränderung der elektrischen Leitungsfähigkeit eines Pulvers durch Induktion. A.P.L. 7. 554.

**588.** *Lord Rayleigh.* On the induction-coil. P.M.Z. 581; A.N. 6. 197.

**589.** *R. Manzetti.* Sull' uso dell' elettrodinamometro nella misura dei coefficienti di induzione mutua. R.A.L.R. 10. B. 179.

**590.** *G. F. C. Searle.* On the coefficient of mutual induction for a circle and a circuit with two parallel sides of infinite length. P.C.P.S. 398.

**591.** *P. Janet.* Application de l'arc chantant de Duddell à la mesure des faibles coefficients de selfinduction. C.R. 134. 462.

**592.** *M. D. Atkins.* Polarisation and internal resistance of electrolytic cells. P.R. 13. 102; 182.

**593.** *C. H. Ayres.* Measurement of the internal resistance of galvanic cells. P.R. 14. 17.

**594.** **C. P. Steinmetz.* Theoretical investigations on some oscillations of extremely high potential in alternating high potential transmissions. T.A.I.E.E. 705.

**595.** *F. Beaulard.* Sur la différence du potentiel et l'amortissement de l'étincelle électrique à caractère oscillatoire. A.U.G. 105.

**596.** *J. Stark.* Das Gesetz des Kathodenfalls. P.Z. 88.

**597.** *E. Marx.* Über den Potentialfall und die Dissoziation in Flammengasen. N.G.G. 1900. 34.

**598.** *J. Stark.* Über die Beziehung zwischen Kathodenfall und Stromstärke. P.Z. 274.

**599.** **K. R. Johnson.* Sur l'excitateur Hertz et son application à la télégraphie sans fil. E.E. 28. 178.

**600.** *J. B. Pomey.* Oscillations propres des réseaux de distribution électrique. C.R. 134. 696.

**601.** *C. A. Chant.* An experimental investigation into the „skin" effect in electrical oscillators. A.J.S. 13. 1; P.M. 3. 425.

**602.** *P. Schönherr.* Zur Kenntnis der Polarisationskapazität des blanken Platins. A.P.L. 6. 116.

**603.** *E. Warburg.* Über die Polarisationskapazität des Platins. A.P.L. 6. 125.

**604.** *Barbillon.* Sur la mesure des capacités de condensateurs imparfaits et en particulier de cables sousmarins. A.U.G. 69.

**605.** *W. S. Franklin.* Poynting's theorem and the distribution of electric field inside and outside of a conductor carrying electric current. P.R. 13. 165.

**606.** *A. Gerschun.* Über gleichgerichteten Wechselstrom. P.Z. 249.

**607.** **R. Mewes.* Die Tesla-Dewor-Flemmingschen Versuche über Wider-

standsverminderung durch Kälte und deren theoretische Prüfung. E.C.Z. 212.

**608.** **A. W. Ashton.* On the resistance of dielectrics and the effect of an alternating electromotive force on the insulating properties of india rubber. P.P.S.L. 20; P.M. 2. 501.

**609.** **E. Rutherford.* Abhängigkeit des Stroms durch leitende Gase von der Richtung des elektrischen Felds. N.R. 584.

**610.** *G. Granqvist.* Über Disjunktionsströme. A.V.A.S. Nr. 9.

**611.** *H. A. Wilson.* On the electrical conductivity of air and salt vapours. T.R.S.L. 197. 415.

**612.** *E. G. Brown.* Researches into the action of fusible cutouts. T.N.Z. I. 356.

**613.** *W. Kauffmann.* Über eine Analogie zwischen dem elektrischen Verhalten Nernstscher Glühkörper und demjenigen leitender Gase. N.G.G. 1901. 62.

**614.** *C. E. Mendenhall* and *C. W. Waidner.* On galvanometers of high sensibility. A.J.S. 12. 249.

**615.** *P. Janet.* Les compteurs d'énergie. J.P. 10. 717.

**616.** *R. A. Lehfeld.* Über Herrn Jahns Messungen der elektomotorischen Kraft von Konzentrationsketten. Z.P.C. 37. 308.

**617.** *K. R. Johnson.* Einige Bemerkungen über den Wehneltschen Unterbrecher. P.Z. 105.

Siehe auch 267; 269; 319; 330—332; 336; 337; 345; 360; 453; 503; 530; 833; 851; 877; 881—883.

### Thermoelektrizität.

**618.** *G. Belloc.* Sur la thermoélectricité des aciers et des ferro-nickels. C.R. 134. 105.

**619.** **C. Liagre.* Influence de la température sur la capacité des accumulateurs au plomb. E.E. 29. 149.

**620.** *E. Riecke.* Über das Verhältnis der Leitfähigkeiten der Metalle für Wärme und für Elektrizität. N.G.G. 1900. 250.

Siehe auch 567; 607; 682; 683.

### Ionentheorie.

**621.** *Lord Kelvin.* Aepinus atomized. P.M. 3. 257; A.N. 6. 834.

**622.** *P. Drude.* Zur Elektronentheorie der Metalle. A.P.L. 7. 687.

**623.** *J. Stark.* Über Ionisierung von Gasen durch Ionenstofs. A.P.L. 7. 417.

**624.** *W. Sutherland.* Ionisation, ionic velocities and atomic sizes. P.M. 3. 161.

**625.** *J. Stark.* Ionentheorie der elektrischen Selbstentladung. A.P.L. 7. 919.

**626.** *W. Duane.* The absolute measurement of self-inductance. P.R. 13. 250.

**627.** *P. Straneo.* Misura della diffusione elettrolitica, dei numeri di trasporto e della mobilità dei ioni. R.A.L.R. 11. I. 171.

**628.** *P. Langevin.* Sur la mobilité des ions dans les gaz. C.R. 134. 646.

**629.** *P. Langevin.* Sur la recombinaison des ions dans les gaz. C.R. 134. 533.

**630.** *R. K. Mac Clung.* The rate of recombination of ions in gases under different pressures. P.M. 3. 283.

**631.** *C. D. Child.* The velocity of ions drawn from the electric arc II. P.R. 14. 65.

**632.** *P. Langevin.* Recherches sur les gaz ionisés. C.R. 134. 414.

**633.** *P. J. Kirkby.* On the electrical conductivies produced in air by the motive of negative ions. P.M. 3. 212.

**634.** *E. van Everdingen jr.* Quelques remarques sur l'application de la théorie des électrons à l'augmentation de la résistance électrique dans un champ magnétique et au phénomène de Hall. A.N. 6. 294.

**635.** *H. A. Lorentz.* Théorie simplifiée des phénomènes électriques et optiques dans les corps en mouvement. A.N. 7. 64.

**636.** *E. Rutherford.* Discharge of electricity from glowing platinum and the velocity of ions. P.R. 13. 321.

**637.** *C. Barus.* Simultaneous volumetric and electric graduation of the steam-tube with a phosphorus-ionizer. P.M. 2. 477.

**638.** *C. Barus.* The behaviour of the phosphorus emanation in spherical condensers. P.M. 3. 80.

**639.** *A. Coehn.* Über kathodische Polarisation und Bildung von Legierungen. Z.P.C. 38. 609.

**640.** *E. Rutherford.* Übertragung erregter Radioaktivität. P.Z. 210.

Siehe auch 341; 434; 503.

### Magnetismus.

**641.** *I. Klemenčič.* Beiträge zur Kenntnis des Magnetisierungsvorgangs I. A.P.L. 6. 181.

**642.** *B. Kučer.* Poznámka k nauce o redukované délce linearného magnetu. (Bemerkung über die Lehre von der Reduktion der Länge eines linearen Magneten). C. 124.

**643.** *S. Sano.* Notes on Kirchhoffs theory of magnetostriction. J.T. 229; P.R. 14. 158.

**644.** *G. F. C. Searle.* The measurement of magnetic hysteresis. P.R.S.L. 348.

**645.** *H. Maurach.* Über die Abhängigkeit des durch Hysteresis bedingten Effektverlustes in Eisen von der Stärke der Magnetisieruug. A.P.L. 6. 580.

**646.** *R. Lyle.* On circular filaments or circular magnetic shells equivalent to circular coils and on the equivalent radius of a coil. P.M. 3. 310.

**647.** *C. Benedicks.* Über die Entmagnetisierungsfaktoren kreiscylindrischer Stäbe. A.P.L. 6. 726.

**648.** *J. J. Thomson.* On the effect of a transverse magnetic field on metallic resistance. P.M. 3. 353.

**649.** *J. Buchanan.* A contribution to the theory of magnetic induction in iron and other metals. II. P.M. 2. 456.

**650.** *T. Voigt.* Über die Influenz ferromagnetischer Krystalle. N. G. G. 1900. 331.

**651.** **A. Voller.* Der Koepselsche Magnetisierungsapparat von Siemens & Halske; Magnetisierungskurven zum Studium des remanenten Magnetismus verschiedener Eisensorten. V.N.V.H. XVIII.

Siehe auch 205; 344; 530; 686; 787—791; 884.

## Elektromagnetismus.

**652.** *O. Heaviside.* Electromagnetic theory. T.E. 47. 613. 937; 48. 209; 657.

**653.** *L. Silberstein.* Symbolische Integration der elektromagnetischen Gleichungen aus dem Anfangszustand des Feldes abgeleitet nebst Andeutungen zu einer allgemeinen Theorie physikalischer Operatoren. A.P.L. 6. 373.

**654.** *A. Korn.* Allgemeine Lösung des Problems der mathematischen Induktion. S.A.M. 435.

**655.** *W. Duane.* On the boundary conditions of the electrical field. P.R. 14 149.

**656.** *J. Sauter.* Zur Interpretation der Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden isotropen Medien. A.P.L. 6. 331.

**657.** *E. Kohl.* Über eine Erweiterung der Stefanschen Entwicklung der Maxwellschen Gleichungen für ungleichartige Mittel. M.H. 156.

**658.** *E. Riecke.* Zur Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem konstanten elektromagnetischen Felde. A.P.L. 7. 401; P.Z. 182.

**659.** *E. Cohn.* Über die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper. N.G.G. 1901. 74; A.P.L. 7. 29.

**660.** *E. P. Adams.* The electromagnetic effect of moving changed spheres. A.J.S. 12. 155; P.M. 2. 285.

**661.** *E. P. Adams.* Die elektromagnetische Wirkung von bewegten geladenen Kugeln. P.Z. 41.

**662.** *H. Pender.* On the magnetic effect of electrical convection. P.R. 13. 203; P.M. 2. 179.

**663.** *H. A. Wilson.* On the magnetic effect of electric convection and on Rowland's and Cremieu's experiments. P.M. 2. 144; 319. — *V. Crémieu.* 235.

**664.** *Crémieu.* Répétition des expériences de M. Rowland relatives à la „convection électrique". A.C.P. 24. 299.

**665.** *Crémieu.* Recherches sur l'effet magnétique de la convection électrique. A.C.P. 24. 145.

**666.** **A. Righi.* Sulla questione del campo magnetico generato della convezione elettrica e su altre analoghe questioni. N.C.P. 233.

**667.** *A. Righi.* Nochmals über die Frage des durch die elektrische Konvektion erzeugten Magnetfeldes. P.Z. 310.

**668.** *G. R. Olshausen.* Über die Unipolarrotation. A.P.L. 6. 681.

**669.** *E. Blondlot.* Sur l'absence d'action d'un champ magnétique sur une masse d'air qui est le siège d'un courant de déplacement. C.R. 133. 848.

**670.** *E. von Everdingen jr.* Recherches sur les phénomènes que présentent les métaux traversés par un courant électrique ou calorifique dans un champ magnétique. A.N. 4. 371.

**671.** *K. Honda* and *S. Shimizu.* Magnetization of iron, steal and nickel wires by intermittent current. P.R. 13. 81.

**672.** *O. Grotrian.* Elektrometrische Untersuchungen über unipolare Induktion. A.P.L. 6. 794.

**673.** *R. Paillet.* Recherches sur les forces électromotrices d'aimentation. J.P. 1. 207.

**674.** *G. Sagnac.* Sur la résistance électrique d'un conducteur magnétique ou diamagnétique parcouru par un courant variable et placé dans un champ magnétique. J.P. 1. 237.

**675.** *G. C. Simpson.* On the electrical resistance of Bismuth to alternating

currents in a strong magnetic field. P.M. 2. 300.

**676.** *H. Brooks.* Damping of the oscillations in the discharge of a Leyden-jar. P.M. 2. 92.

**677.** *V. Karpen.* Principe relatif à la distribution des lignes d'induction magnétique C.R. 134. 88.

**678.** *T. Levi-Cività.* Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettromagnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo. R.A.L.R. 11. I. 163; 191; 228.

**679.** *J. Koenigsberger.* Über die Verwendung des Quadrantelektrometers zur ballistischen Messung der magnetischen Feldstärke und über die Susceptibilität des Wassers. A.P.L. 6. 506. — *G. Jäger* und *St. Meyer.* 870.

**680.** *E. Mascart.* Perturbations magnétiques produits par les tramways électriques à l'observatoire de Nice. A.N. 6. 550.

**681.** *A. Želtuchin.* Über den Einfluſs des elektrischen Zustands der Atmosphäre auf die Barometerangaben. K.D.P. 2. 9; 41.

Siehe auch 6; 570; 634; 684.

### Thermomagnetismus.

**682.** *L. Lownds.* The thermomagnetic and thermoelectric properties of crystalline bismuth. P.M. 2. 325.

**683.** *L. Lownds.* Über das thermoelektrische Verhalten des krystallinischen Wismuts. A.P.L. 6. 146.

**684.** *M. G. Lloyd.* The thermomagnetic and galvanomagnetic effects in tellurium. A.J.S. 12. 57.

**685.** *G. Moreau.* De l'effet thermomagnétique longitudinal. J.P. 10. 685.

**686.** *R. Tangl.* Wirkung der Magnetisierung auf den Drehungsmodul. A.P.L. 6. 34.

## F. Geodäsie.

### Niedere Geodäsie.

**687.** *L. Krüger.* Über die Ausgleichungen bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Einschneiden. N.G.G. 1900. 1.

**688.** **G. Hilscher.* Tachymetrische Reduktionslatte. K.T. 107.

**689.** *J. Heil.* Eine Abart des Rückwärtseinscheidens. Z.V. 30. 645.

**690.** **K. Dotzel.* Das Abstecken von Kreisbogenkurven mittelst Strahlenbestimmung. F.C. 190. — *A. Schwappach.* 379. — *H. Fischer.* 574; Z.F. 674.

**691.** *W. Weitprecht.* Absteckung eines Kreisbogens, welcher zwei gegebene Gerade $L_1$ und $L_2$ berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. Z.V. 31. 217.

**692.** *Wilcke.* Die Linie des gröſsten Gefälls. Z.V. 30. 629.

**693.** *F. R. Helmert.* Über die Reduktion von Lotabweichungen auf ein höher gelegenes Niveau. Z.V. 31. 69.

Siehe auch 22; 28; 59; 81; 885; 886; 893.

### Höhere Geodäsie.

**694.** **F. R. Helmert.* Neuere Fortschritte in der Erkenntnis der mathematischen Erdgestalt. G.Z. 1.

**695.** **E. Hammer.* Direkte Polhöhenbestimmung für Stuttgart. J.V.N.S. 43.

**696.** *N. Jadanza.* Sul calcolo della convergenza dei meridiani. A.A.T. 36. 887.

**697.** **G. B. M. Zerr.* Gravity, true and appearent. M.M.F. 31.

**698.** *H. Poincaré.* Sur les déviations de la verticale en géodésie. B.A. 18. 257.

**699.** *O. Callandreau.* Sur la détermination du géoide au moyen de l'ensemble des déviations de la verticale. B.A. 18. 211.

**700.** *R. F. Helmert.* Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf Lotkrümmung. S.A.B. 1901. 958.

### Topographie.

**701.** *P. E. Sanchez.* Memoria acerca del método de levantamiento topofotografico. M.y R.M. 16. 35.

Siehe auch 130.

### Kartographie.

**702.** **H. Habenicht.* Neue Methode zur Veranschaulichung der Kartenmaſsstäbe. P.G.M. 119.

**703.** *A. Halle.* Die Entfernungsreduktion bei der konformen Abbildung der Kugel auf die Ebene in rechtwinkligen Koordinaten für Dreiecksseiten 2. und 3. Ordnung. Z.V. 31. 108.

**704.** **K. Peucker.* Zur kartographischen Darstellung der dritten Dimension. G.Z. 22.

Siehe auch 117.

**Metrologie.**

Siehe 304.

## G. Astronomie.

### Theoretische Astronomie.

**705.** **S. Oppenheim.* Das Stabilitätsproblem in der Astronomie. M.W.C.W. 62.

**706.** *G. Kobb.* Sur un cas d'instabilité possible. B.A. 18. 219.

**707.** *Goedseels.* Sur les systèmes au repos absolu. A.G.B. 26. A. 114.

**708.** **M. Haid.* Polhöhenschwankung und internationaler Polhöhendienst. Z.R.W.L. 17.

**709.** *A. V. Baecklund.* Zur Frage nach der Bewegung des Erdpols. A.N.K. 158. 291.

**710.** *H. Kimura.* On the existence of a new annual term in the variation of latitude independent of the components of the pole's motion. A.N.K. 158. 233.

**711.** *H. Andoyer.* Sur la théorie de la lune. B.A. 18. 177.

**712.** *H. Battermann.* Resultate für Mondort, Mondhalbmesser und Sonnenparallaxe abgeleitet aus den A.N.K. No. 3457—58 veröffentlichten Sternbedeckungen. A.N.K. 157. 167.

**713.** *W. F. Rigge.* A graphic method of predicting occultations with the aid of a star chart. A.N.K. 158. 275.

**714.** *A. W. Krassnow.* Über singuläre Auflösung der Differentialgleichungen der geometrischen Mondbahn. A.N.K. 158. 65.

**715.** *V. Levickij.* Teorja perstenja Saturna. (Theorie der Saturnringe.) R.S.M. No. 1.

**716.** *W. Villiger.* Über die Excentrizität der Saturnringe. A.N.K. 156. 161.

**717.** *G. Norén* und *S. Raab.* Hilfstafeln zur Berechnung der säkularen Störungen der kleinen Planeten. A.U.L. No. 8.

**718.** *J. Mizuhara.* Determination of the elements of parabolic orbit of a comet by graphical process. J.T. 215.

**719.** *Simonin.* Sur l'accélération de la comète d'Encke. B.A. 18. 451.

**720.** A. *Hnatek.* Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1898. V. S.A.W. 110. 231.

**721.** *C. J. Merfield.* Definit orbit elements of comet 1899. I. A.N.K. 157. 29.

**722.** *H. Seeliger.* Über kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht. S.A.M. 265.

**722a.** *H. Lemke.* Über das Gleichgewicht komischer Gasmassen. Cr. 124. 143.

**723.** *G. H. Knibbs.* The suns motion in space. J.N.S.W. 148.

**724.** *J. Stein.* Der Charakter der Airyschen Methode zur Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung. A.N.K. 158. 167.

**725.** *J. C. Kapteyn.* Méthode statistique pour la détermination de l'apex du mouvement solaire. A.N. 6. 262.

**726.** *O. C. Kapteyn.* Der Apex der Sonnenbewegung, die Konstante der Präzession und die Korrektionen der Eigenbewegungen in Deklination von Auwers und Bradley. A.N.K. 156. 1.

**727.** *L. Struve.* Über die Konstante der Präzession und die eigene Bewegung der Sonne. A.N.K. 156. 129.

**728.** *F. Folie.* Détermination de la constante de l'aberration et calcul de la vitesse du système solaire au moyen des observations de Struve. B.A.B. 329; 455.

**729.** *J. Wilsing.* Versuch einer Erklärung der Entstehung der Bewegung der Nebelhülle, welche die Nova Persei umgibt. A.N.K. 157. 345.

**730.** *W. E. Wilson.* The distance of Nova Persei. N. 298.

**731.** *W. Doberck.* On the orbit of $\eta$ Cassiopejae. A.N.K. 156. 353.

**732.** *Salet.* Détermination des orbites des étoiles doubles. B.A. 19. 61.

**733.** *J. H. Jeans.* The stability of a spherical nebula. P.R.S.L. 454.

Siehe auch 253; 490.

### Störung.

**734.** *H. Andoyer.* Sur le calcul des équations des perturbations. B.A. 19. 49.

**735.** **A. Weiler.* Über eine neue Störungstheorie. V.A.G. 1900. 319.

**736.** *C. Alasia.* Su di un recente studio del moto turbato. M.P.A. 1. 278.

**737.** *G. W. Hill.* Secular perturbations of the planets. A.J.M. 317.

**738.** **Charlier.* Säkulare Störungen der kleinen Planeten. V.A.G. 1901. 347.

**739.** *J. Mascart.* Perturbations du grand axe des petites planètes. C.R. 134. 402.

**740.** *J. Ehlers.* Über die allgemeinen Jupiterstörungen des Planeten 119 Althaea. A.V.A.S. No. 6.

Siehe auch 717

## Vielkörperproblem.

**741.** *T. Levi-Cività.* Sopra alcuni criteri d'instabilità. A.D.M. 5. 221.

**742.** *E. W. Brown.* Modern methods of treating dynamical problems and in particular the problem of 3 bodies. S. M.Am. 8. 103.

**743.** *H. v. Zeipel.* Recherches sur l'existence des séries de M. Lindstedt. A.V.A.S. No. 8.

**744.** *H. v. Zeipel.* Remarques sur les solutions périodiques de la 3. sorte. B. A. 19. 71.

**745.** *W. Ebert.* Über das Dreikörperproblem in mehrdimensionalen Räumen. A.N.K. 157. 231.

## Kosmologie.

**746.** *O. Fisher.* Mathematical notes to rival theories of cosmogonie. A.J. S. 12. 140.

**747.** *G. Arrhenius.* Zur Kosmogonie A.N. 6. 862.

**748.** *Lord Kelvin.* On the clustering of gravitational matter in any part of the Universe. P.M. 3. 1.

Siehe auch 489.

## Astrophysik.

**749.** *N. Ekholm.* Über den Energievorrat, die Temperatur und die Strahlung der Himmelskörper. A.V.A.S. No. 1.

**750.** *J. Halm.* A new solar theory. N. 351.

**751.** *R. Emden.* Beiträge zur Sonnentheorie. A.P.L. 7. 176; S.A.M. 339.

**752.** **R. Emden.* A contribution to the solar theory. A.J.C. 15. 38.

**753.** *N. Ekholm.* Über die Periodizität der Sonnenthätigkeit. A.V.A.S. No. 5.

**754.** *J. Halm.* Über eine neue Theorie zur Erklärung der Periodizität der solaren Erscheinungen. A.N.K. 156. 33.

**755.** *J. Halm.* Über die Höhe und den Gleichgewichtszustand der Sonnenatmosphäre und die Entstehungsursache der Protuberanzen. A.N.K. 156. 241. — *E. v. Oppolzer* 375.

**756.** *S. Rudnickij.* Pro pljami sonični II. (Über die Sonnenflecke.) R.S.M. No. 2.

**757.** *G. H. Bryan.* The kinetic theory of planetary athmospheres. T.R.S.L. 196. 1.

**758.** *T. J. J. See.* On the probable mass and density of mercury. A.N.K. 156. 361.

**759.** *F. F. Nipher.* The specific heat of gaseous nebulae in gravitational contraction. T.S.L. 63.

Siehe auch 221; 401; 419; 455; 489; 531.

## Sphärische Astronomie.

**760.** **F. Folie.* Die jetzigen und künftigen Formeln der sphärischen Astronomie. V.A.G. 1. 332.

**761.** *C. W. Wirtz.* Über ein Problem der sphärischen Astronomie und seine Bedeutung für die Nautik. A.H. 29. 323; 467. — *E. Wendt* 408.

**762.** *F. Kühnert.* Über die von den Chinesen Tê sing oder Tugendgestirn genannte Himmelserscheinung. S.A.W. 210. 619.

**763.** *K. Koss.* Zeit- und Ortsbestimmungen. D.A.W. 27.

**764.** *C. Schrader.* Die Bestimmung von Ortszeit und Azimut aus gleichen Sonnenhöhen. A.H. 29. 511.

**765.** *H. Kimura.* Formula and tables for determining the time with a portable transit instrument in the meridian, by eliminating azimuth constant from the observation of a circumpolar star. J. T. 209.

**766.** *A. Klingatsch.* Zur Meridianbestimmung. Z.V. 31. 133.

**767.** *B. Matusevič.* Über die Methode der Vorherberechnung des Mondes Djegud. K.D.P. 1. 181.

**768.** **C. Stechert.* Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse und ihre Verwertung zur Längenbestimmung. A.A. S. No. 1.

**769.** *L. de Ball.* Über den Einfluſs der Parallaxe, der Aberration und der Eigenbewegung auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Fixsterne. A. N.K. 158. 81.

**770.** *L. de Ball.* Über den Einfluſs der Refraktion auf die Distanz zweier Sterne. A.N.K. 158. 85.

**771.** *R. Ramos.* El Teodolito y su aplicación á la astronomia práctica. R. C.L. 4. 251.

**772.** *E. Etzold.* Richtige Aufstellung von Äquatorealen. D.M.Z. 153; 173; 181.

Siehe auch 30; 807; 887.

### Chronologie.

**773.** *M. v. Eyth.* Mathematik und Naturwissenschaft der Cheopspyramide. J.U. 1.

### Gnomonie.

**774.** *J. A. C. Oudemans.* Curva gnomonica. A.N. 6. 404.

## H. Geophysik.

### Geophysik (im engeren Sinne).

**775.** **M. P. Rudski.* Sur l'âge de la terre. B.I.C. 72.

**776.** *F. R. Helmert.* Über die Reduktion von Lotabweichungen auf ein höher gelegenes Niveau. A.N. 6. 442.

**777.** *A. v. Triulzi.* Relative Schwerebestimmungen. D.A.W. 143.

**778.** **J. B. Messerschmidt.* Die Verteilung der Schwerkraft auf der Erde. G.Z. 305.

**779.** *F. R. Helmert.* Dr. Heckers Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ozean. S.A.B. 1902. 126.

**780.** **R. v. Sterneck.* Untersuchungen über den Zusammenhang der Schwere unter der Erdoberfläche mit der Temperatur. N.J.M. 1902. 43.

**781.** **F. Cajori.* The unexplained southerly deviation of falling bodies. S. 852.

**782.** *W. Schlüter.* Erdbebenwellen. P.Z. 238.

**783.** *G. Grablovitz.* Propagazione di terremoti. R.A.L.R. 11. I. 177.

**784.** *V. Bjerknes* u. *J. W. Sandström.* Über die Darstellung des hydrographischen Beobachtungsmateriales durch Schnitte, die als Grundlage der theoretischen Diskussion der Meerescirkulationen und ihrer Ursachen dienen können. M.S.G. No. 4.

**785.** *N. Ekholm.* Über Emission nnd Absorption der Wärme und deren Bedeutung für die Temperatur der Erdoberfläche. M.Z. 1.

**786.** *J. Schubert.* Der Wärmeaustausch im festen Erdboden, in Gewässern und in der Atmosphäre. P.Z. 117.

**787.** *K. Rößler.* Magnetische Beobachtungen. D.A.W. 221.

**788.** *N. Umov.* Ein Versuch, die magnetischen Typen des Erdmagnetismus zu ermitteln. S.N.M. 1.

**789.** *Hammer.* Über die Säkularabnahme der magnetischen Deklination zu Potsdam. Z.V. 31. 181.

**790.** *E. Mathias.* Sur la distribution régulière de la déclinaison et de l'inclinaison magnétiques en France au 1. janvier 1896. C.R. 133. 864.

**791.** *L. A. Baur.* Note on the secular motions of the earths mean magnetic axis. T.M.W. 73.

Siehe auch 338; 693.

### Mathematische Meteorologie.

**792.** *Hammer.* Zur barometrischen Höhenmessung. Z.V. 31. 201.

**793.** *W. v. Bezold.* Über die Darstellung der Luftdruckverteilung durch Druckflächen und Isobaren. A.N. 6. 563.

**794.** *W. Sandström.* Über die Anwendung von Prof. V. Bjerknes' Theorie der Wirbelbewegungen in Gasen und Flüssigkeiten auf meteorologische Beobachtungen in den höheren Luftschichten. V.A.S. No. 4.

**795.** *H. Brocard.* Théorie mathématique des cyclones (bibliographie). I.M. 240.

**796.** **F. H. Bigelow.* Line integrals in the athmosphere. M.W.R. 531.

**797.** **V. Bjerknes.* The dynamic principle of the circulating movements in the athmosphere. M.W.R. 434.

**798.** **V. Bjerknes.* The circulatory movements in the athmosphere. M.W. R. 532.

**799.** *G. B. M. Zerr.* Athmospherical refraction. M.M.F. 8. 192.

**800.** **V. E. Boccara.* Sulle variazioni diurne della rifrazione atmosferica. V.C.P. 2. 204.

**800a.** **R. Potinecke.* Die Theorie des Regenbogens. W.B. 232.

**801.** *S. R. Bennet.* Actinometric observations of the solar eclipse. P.S.D. 365.

**802.** *W. v. Bezold.* Über klimatologische Mittelwerte für ganze Breitenkreise. S.A.B. 1901. 1330.

Siehe auch 31; 72; 422; 490; 491; 556; 681; 786; 888—891.

### Ebbe und Flut.

**803.** **H. Januschke.* Zur elementaren Gezeitentheorie. Z.R. 81. — *Sterba* 84.

**804.** *J. P. van der Stok.* Nouvelles contributions à la connaissance des ma-

rées dans la détroit de Macassar. A.N. 6. 137.

**805.** **Franz.* Gebrauch des Flutmessers und Flutprognosenmaschinen. J.S.G. II. 5.

### Nautik.

**806.** *W. Reuter.* Über die Benützung des Semiversus zu nautischen Rechnungen. A.H. 30. 72.

**807.** *E. Wendt.* Korrespondierende Höhen. A.H. 30. 152.

**808.** *C. W. Wirtz.* Zeitbestimmung und Chronometerkontrolle durch eine Höhendifferenz. A.H. 29. 372. — *A. Wedemeyer* 418.

**809.** *E. Guyou.* Sur l'emploi des distances lunaires à la mer. C.R. 134 133.

Siehe auch 761; 884; 892.

## I. Mathematische Naturwissenschaft.

### Mathematische Chemie.

**810.** *W. Alexejew.* Über die Bedeutung der symbolischen Invariantentheorie für die Chemie. Z.P.C. 36. 741.

**811.** *E. Study.* Die angebliche Bedeutung der Invariantentheorie für die Chemie. Z.P.C. 37. 546.

**812.** *W. Alexejew.* Über das Endlichkeitsproblem in der Chemie. Z.P.C. 38. 750.

**813.** **S. H. Harries.* Mathematical expression of the periodic law. J.P.C. 577.

**814.** *R. Wegscheider.* Über simultane Gleichgewichte und die Beziehungen zwischen Thermodynamik und Reaktionskinetik homogener Systeme. S.A.W. 110. 561.

**815.** *G. Guglielmo.* Intorno ad alcuni nuovi metodi per determinare il peso molecolare dei corpi in soluzione diluita. R.A.L.R. 10. B. 232.

**816.** *E. Cohen.* Über die Bestimmung der Arbeit, welche die Verwandtschaft leisten kann. Z.P.C. 36. 517.

**817.** *A. Schükarew.* Über polymolekulare chemische Umwandlungen. Z. P.C. 38. 353.

**818.** *E. Warburg.* Über spontane Desozonisierung. S.A.B. 1901. 1126.

**819.** *K. Drucker.* Über zwei Fälle von Katalyse im inhomogenen Systeme. Z.P.C. 36. 173.

**820.** *K. Drucker.* Die Geschwindigkeit und Katalyse im inhomogenen Systeme. Z.P.C. 36. 693.

**821.** *H. Euler.* Zur Theorie katalytischer Reaktionen. Z.P.C. 36. 641.

**822.** *J. Brode.* Katalyse bei der Reaktion zwischen Wasserstoffperoxyd und Jodwasserstoff. Z.P.C. 37. 257.

**823.** *J. D. van der Waals.* L'état moléculaire du dissolvant a-t-il une influence sur la diminution de tension de vapeur produite par des sels dissous? A.N. 4. 332.

**824.** *J. H. van't Hoff.* La formation de l'anhydrite naturelle et le rôle du temps dans les transformations chimiques, A.N. 6. 471.

**825.** *R. Wegscheider* Über die Zersetzung des Ammoniumnitrits. Z.P.C. 36. 543.

**826.** *R. Löwenherz.* Über die Zerzetzung der organischen Halogenverbindungen in äthylalkoholischer Lösung durch Auflösen von Natrium. Z.P.C. 36. 469.

**827.** *F. Jüttner.* Über die chemischen Vorgänge in dem System: Äther-Wasser-Chlorwasserstoff. Z.P.C. 38. 56.

**828.** *O. Gros.* Über die Lichtempfindlichkeit des Fluoresceins, seiner substituierten Derivate sowie der Leukobasen derselben. Z.P.C. 37. 157.

**829.** *J. van't Hoff* und *F. Weigert.* Untersuchungen über die Bildungsverhältnisse ozeanischer Salzablagerungen S.A.B. 1901. 1140.

Siehe auch 460; 461.

### Phasenlehre.

**830.** *P. Saurel.* On the phase rule. J.P.C. 401.

**831.** *F. A. H. Schreinemaker.* Die Faltenpunktskurven in ternären Systemen. A.N. 6. 170.

Siehe auch 405; 492.

### Elektrolyse.

**832.** *R. R. Ramsay.* Die Wirkung von Schwere und Druck auf die elektrolytischen Vorgänge. P.Z. 177.

**833.** *R. Gans.* Über die Abhängigkeit der elektrolytischen Überführung und der elektromotorischen Kraft reversibler Elemente von physikalischen Einflüssen. A.P.L. 6. 315.

**834.** *L. Kahlenberg.* The theory of electrolytic dissociation as viewed in the light of facts recently ascertained. J.P.C. 339.

**835.** **K. Norden.* The theory of the electrolytic rectifier. T.E. 48. 107.

Siehe auch 504.

### Thermochemie.

**836.** *Ponsot.* Chaleur de réaction entre les corps en état solide et à l'état gazeux. C.R. 134. 651.

**837.** *H. v. Steinwehr.* Studien über die Thermochemie sehr verdünnter Lösungen. Z.P.C. 38. 185.

**838.** *de Forcrand.* Valeur minima de la chaleur totale de combinaison $Q$. C.R. 133. 681.

**839.** *de Forcrand.* Sur l'équivalent thermique de la dissociation et de la vaporisation et sur la chaleur de solidification de l'ammoniac. C.R. 134. 708.

### Elektrochemie.

**840.** *P. Straneo.* Misura della diffusione elettrolitica dei numeri di trasporto e della mobilità dei ioni. R.A.L.R. 11. I. 58.

**841.** *A. Klein.* Über die Änderung der freien Energie bei der Bildung einiger schwerlöslichen Metallsalze. Z.P.C. 36. 361.

### Mathematische Physiologie.

**842.** **W. v. Zehender.* Form des Himmelsgewölbes und die Gröſsenerscheinungen der Gestirne. Z.P.P. 218.

**843.** *J. Winter.* Du volume en urologie. C.R. 134. 559; 623.

Siehe auch 465.

### Mathematische Biologie.

**844.** *A. Gallardo.* Concordancia entre los poligonos empíricos de variacion y las correspondientes curvas teóricas. A.S.A. 61.

### Mathematische Zoologie.

Siehe 39.

### Mathematische Botanik.

**845.** *S. Schwendener.* Die Divergenzen kreisförmiger Organe in Spiralsystemen mit rechtwinklig gekreuzten Kontaktlinien und deren Grenzwerte. S.A.B. 1901. 1074.

**846.** *W. F. A. Weldon.* Change in organe correlation of ficaria ranunculoides during the flowering season. Bi. 125.

### Mathematische Geologie.

**847.** *H. Brocard.* Bibliografia dello studio matematico della geologia. M.P.A. 1. 178.

Siehe auch 775; 829.

## K. Technik.

### Maschinenlehre.

**848.** **F. H. Buchholtz.* Theoretische Betrachtungen über die an Motoren für Luftschiffer zu stellenden Anforderungen. J.A.M. 27.

**849.** *V. Grazioli.* Formol a general del rendimento delle macchine a vapore. R.F.M. 4. 415.

**850.** **A. Witz.* Rendement comparé des machines à vapeur et des moteurs à gas. E.E. 30. 5; 41.

**851.** *A. Rotth.* Physikalische Probleme der Gleichstrommaschine. A.Gr. 3. 34.

Siehe auch 96; 197; 494.

### Eisenbahnwesen.

**852.** **Buchwald.* Kurvenhalbmesser und Spurerweiterung. M.V.D.S. 27.

**853.** **K. Sieber.* Straſsenbahnkurven und Radstand der Wagen. M.V.D.S. 202.

Siehe auch 212; 247; 680.

### Telegraphenwesen.

Siehe 604.

### Hydraulik.

**854.** *E. Maillet.* Sur les graphiques et les formules d'annonces de crues. J.E.P. 147.

### Luftschiffahrt.

**855.** *J. Armengaud jr.* Méthode graphique d'étudier les circonstances de la marche d'un aérostat dirigeable par l'examen de la projection de sa trajectoire sur le sol. C.R. 133. 900.

**856.** *H. Deslandres.* Méthode permettant de déterminer la vitesse propre des aérostats dirigeables. C.R. 133. 993.

**857.** *H. Deslandres.* Détermination de la trajectoire exacte des aérostats par rapports au sol. C.R. 134. 344.

Siehe auch 848.

### Elektrotechnik.

**858.** *S. *de Vilar.* La dualité en électrotechnique. E.E. 28. 237.

### Agrikulturchemie.

**859.** *V. Génin.* Sur le calcul du mouillage et de l'écremage simultanés du lait. C.R. 133. 743.

### Instrumentenkunde.

**860.** **Weitbrecht.* Zur Frage der Kreisteilung. Z.R.W.L. 5.

**861.** *Schönemann.* Der Spiegelstab und seine Verwendung. U.M.N. 7. 118.

**862.** **P. Fuchs.* Statischer Geschwindigkeitsmesser mit Fernmeſsübertragung. M.R.B. 375.

**863.** *I. Ionescu.* Relatorul de viteză (Geschwindigkeitsmesser). G.M.B. 53.

**864.** *A. Lafay.* Sur l'application de la chambre claire de Govi à la construction d'un comparateur pour règles étalons à bouts. C.R. 133. 867.

**865.** *A. Lafay.* Sur l'application de la chambre claire de Govi à la réalisation d'un appareil vérificateur des règles et des plans. C.R. 133. 920.

**866.** *O. Lummer.* Die planparallelen Platten als Interferenzspektroskop. P.Z. 172.

**867.** *A. Perot* et *C. Fabry.* Ein neues Modell eines Interferenzapparates. P.Z. 5.

**868.** *H. C. Pocklington.* On a method of increasing the sensitiveness of Michelson's interferometer. P.C.P.S. 375.

**869.** *L. Baudin.* Sur un thermomètre à éther pétrole. C.R. 133. 1207.

**870.** **R. Mewes.* Grundformel für das Kohlrausch'sche Petroläther- und für das Quecksilberthermometer. D.M. 9. 73.

**871.** *L. Holborn.* Untersuchungen über Platinwiderstände und Petrolätherthermometer. A.P.L. 6. 242.

**872.** *O. Hecker.* Untersuchung der Konstanz von Siedethermometern aus dem Glase $59^{III}$. Z.I. 21. 133.

**873.** *André Job.* Nouvelle methode pour la mesure et l'inscription des températures élevées. C.R. 134. 39.

**874.** *H. Pellat.* Méthode permettant d'évaluer en valeur absolue les très-basses températures. C.R. 133. 921.

**875.** *L. Marchis.* Die dauernden Änderungen des Glases und die Verschiebung des Nullpunktes bei Thermometern. Z.P.C. 37. 553.

**876.** *Lord Rayleigh.* On a new manometer and on the law of the pressure of gases between 1,5 and 0,01 millimetres of mercury. T.R.S.L. 196. 205.

**877.** *G. Meslin.* Sur une forme de thermomètre électrique. C.R. 134. 412.

**878.** *P. Boley.* Sur un électromètre capillaire. C.R. 134. 463.

**879.** *V. Crémieu.* Sur un relais électrostatisque. C.R. 134. 524.

**880.** *J. A. Theurer.* O elektrikách influenčnich s deskami otáčivými. (Über Influenzmaschinen mit drehbaren Platten). C. 73.

**881.** **E. Grimschl.* Ein akustischer Stromunterbrecher. V.N.V.H. LIII.

**882.** *W. Einthoven.* Sur un nouveau galvanomètre. A.N. 6. 625.

**883.** *E. Branly.* Radioconducteurs à contact unique. C.R. 134. 347.

**884.** *H. Meldau.* Der Schiffskompaſs. P.Z. 323.

**885.** *Schulze.* Der Lattenreiter. Z.V. 30. 549.

**886.** *C. Pulfrich.* Über einen Neigungsmesser. Z.I. 21. 205.

**887.** *G. Lippmann.* Appareil pour mesurer de petites distances zénithales. C.R. 134. 205.

**888.** *Guglielmo.* Sulla misura delle variazioni e del valore assoluto delle pressione atmosferica mediante il ludione. R.A.L.R. 11. I 70.

**889.** *G. Guglielmo.* Intorno ad un metodo per determinare o per eliminare la costante psicrometrica e ad un psicrometro assoluto con 3 termometri. R.A.L.R. 10. B. 193.

**890.** *J. Joly.* A fractional raingauge. P.S.D. 283.

**891.** *J. Fényi.* Sur un appareil pour l'enregistrement automatique des decharges de l'athmosphère. C.R. 134. 227.

**892.** *E. Raverot* et *P. Belly.* Loch manométrique différentiel. C.R. 133. 811.

**893.** *J. Kozák.* Zur Theorie der Küstendistanzmesser mit vertikaler Basis. M.G.A. 1902. 237.

Siehe auch 29; 32; 223; 390; 391; 414; 415; 453; 454; 599; 614; 615; 617; 653; 688; 771; 772; 805; 835.

# Verzeichnis der in technischen Zeitschriften 1901 sich vorfindenden mathematischen Abhandlungen.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

## Abkürzungen.

**A.B.** Allgemeine Bauzeitung, Wien 66.
**Ac.** Acetylen, Halle 4.
**A.E.R.J.** American Engineer and Railroad Journal 75.
**A.G.B.** Annalen für Gewerbe und Bauwesen 48—49.
**B.S.** Baumaterialenkunde, Stuttgart 6.
**B.S.E.** Bulletin de la Société pour l'Encouragement de l'Industrie Nationale, Paris 100.
**C.B.** Centralblatt der Bauverwaltung, Berlin 21.
**C.Z.** Centralzeitung für Optik und Mechanik 22.
**D.B.** Deutsche Bauzeitung 35.
**D.M.Z.** Deutsche Mechanikerzeitung 1901.
**E.** Engineer, London 91—92.
**E.E.** L'Éclairage électrique, Paris 26—29.
**Eg.** Engineering, London 70—71.
**E.Z.** Elektrotechnische Zeitschrift, Berlin 22.
**G.C.** Le Génie civil, Paris 38—39.
**G.I.** Gesundheitsingenieur 24.
**J.G.W.** Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung 44.
**M.I.C.** Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils, Paris 54.
**M.T.G.M.W.** Mitteilungen aus dem Technischen Gewerbemuseum, Wien 2. Serie 11.
**P.E.M.** Portefeuille économique des machines, Paris 4. série 10.
**P.J.** Polytechnisches Journal 316.
**P.M.C.** Der praktische Maschinenkonstrukteur 34.
**Schw.B.** Schweizerische Bauzeitung 37—38.
**S.V.G.** Sitzungsberichte des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleiſses in Preuſsen, Berlin 1901.
**T.** Der Techniker, New-York 6.
**V.V.G.** Verhandl. der Vereins zur Beförderung des Gewerbfleiſses in Preuſsen 80.
**W.B.** Wiener Bauindustriezeitung 18.
**Z.A.I.** Zeitschr. f. Architektur- und Ingenieurwesen, Hannover 2. Serie 6.
**Z.B.** Zeitschrift für Bauwesen 51.
**Z.G.** Zeitschrift für Gewässerkunde 4.
**Z.G.K.** Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie 8.
**Z.I.** Zeitschrift für Instrumentenkunde 21.
**Z.Ö.I.A.V.** Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins 53.
**Z.V.** Zeitschrift für Vermessungswesen 30.
**Z.V.D.I.** Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 45.
**Z.W.** Zeitschrift für Werkzeugmaschinen 5.

### Aerodynamik.

**1.** *F. R. v. Lössl.* Die Luftwiderstandsgesetze in neuerer Zeit. Z.Ö.I.A.V. 53. 697.

**2.** *C. Dantin.* Compteur de valeur, système Gehre. G.C. 39. 288.

**3.** *Kunze.* Zur barometrischen Höhenmessung. Z.V. 30. 545.

Siehe auch 244.

### Akustik.

**4.** *H. Armagnat.* Résonance dans les circuits à courant continu. E.E. 27. 465; 28. 482; 29. 132. — *P. M. Verhoeckx.* 28. 389; 29. 131.

**5.** *Rellstab.* Der Telephonograph. E.Z. 22. 57.

### Arithmetik, politische.

**6.** *J. Röttinger.* Hypothekarwert und Hypothekarwertbestimmung. W.B. 18. 262; 273; 280; 298; 307; 312; 320; 338.

### Astronomie, sphärische.

**7.** *E. Etzold.* Richtige Aufstellung von Äquatorealen. D.M.Z. 1901. 153. 173. 181.

### Dynamik.

**8.** *Blum.* Zur Frage der Schienenüberhöhung. C.B. 21. 462.

**9.** *E. F. Cassel, Macfarlane Gray.* Gyroscopic action and the loss of Cobra. Eg. 72. 623. — *E. Hahn* 752. — *W. L. Jordan.* 874.

**10.** *H. Wilson.* The graphics of the gyroscope. E. 91. 459. — *L. Jordan.* 485.

**11.** *M. Codron.* Expériences sur le travail des machines-outils. B.S.E. 100. 40; 215.

**12.** *J. H. Macalpine.* A solution of the vibration problem. Eg. 72. 63; 97. — *H. Techel.* 589.

**13.** *A. Blondel.* Compléments de la théorie graphique des moteurs synchrones. E.E. 27. 429.

**14.** *A. Hanssen.* The proportions of cylinders for multiple expansion engines. E. 91. 487.

**15.** *W. E. Dalby.* The balancing of locomotives. Eg. 72. 726; 755.

**16.** *W. E. Dalby.* On the balancing of the reciprocating parts of engine. Eg. 71, 436; 457; 490; 521.

**17.** *C. Körner.* Untersuchung der Beharrungsregler an Dampfmaschinen. Z.V.D.I. 45. 1842.

**18.** —. Veränderung der Tourenzahl einer Maschine durch Laufgewicht am Regulator. P.M.C. 34. 159.

**19.** *J. Macfarlane Gray.* The geometry of engine balancing. Eg. 71. 715.

**20.** —. Änderung der Tourenzahl einer Dampfmaschine durch Stufenscheibe und Laufgewicht. P.M.C. 34. 16.

**21.** *J. Rosset.* Portefeuille économique des machines. P.E.M. 10. 92.

**22.** *W. Schüle.* Zur Frage der Spannungsverteilung in einem rotirenden Schleifstein. Z.V.D.I. 45. 105. — *M. Grubler.* 106; 108. — *M. Enfslin.* 107.

**23.** *H. Güldner.* Berechnung des Schwungradgewichts der Verbrennungsmotoren. Z.V.D.I. 45. 365; 409.

**24.** *S. D. Carrothers.* Bicycles. Eg. 71. 88. — *H. E. Wimperis.* 122.

**25.** —. Untersuchung einer Dezimalwage von 100 kg Tragkraft. P.M.C. 34. 169; 176.

**26.** *E. L.* Calcul des dimensions à donner aux organes de rappel dans les distributions à déclanchement. P.E.M. 10. 189.

**27.** *R. H. Smith.* Factors of safety. E. 92. 388.

**28.** *J. Piowartsi.* Masselbrecher. P. M.C. 34. 69.

**29.** *A. Mallock.* An instrument for measuring the rolling of ships. Eg. 71. 407.

**30.** *R. Sanzin.* Dampflokomotive für 200 km/St. Geschwindigkeit. A.G.B. 49. 129.

**31.** *Rateau.* Ventilateurs et pompes centrifuges pour hautes pressions. B.S.E. 100. 728.

**32.** *R. Mewes.* Die Bedeutung der Grofsgasmaschine als Schiffsmaschine. P.J. 316. 380.

**33.** *F. J. Cole.* Locomotive design. A.E.R.J. 75. 167.

**34.** *H. H. Vaughan.* Locomotive draft appliances. A.E.R.J. 75. 367.

**35.** *Seyffert.* Federlose Fangvorrichtung für Weichenantriebe. C.B. 21. 221.

**36.** *H. B. Poynder* and *H. E. Wimperis.* The relation between voltage and speed in a shunt dynamo. Eg. 71. 562.

**37.** *Schimpf* und *Kübler.* Der elektrische Betrieb auf der Berliner Stadt- und Ringbahn. A.G.B. 48. 138.

**38.** *Pforr.* Der elektrische Betrieb auf der Berliner Stadt- und Ringbahn und seine Vorteile für die Berliner. A.G.B. 48. 217.

**39.** *W. Reichel.* Elektrische Schnellbahnen. E.Z. 22. 671; 745; 776; 841.

**40.** *S.H.* Über den elektromotorischen Antrieb von Drehscheiben und Schiebebühnen. P.J. 316. 674.

**41.** *O. Lasche.* The construction and systematic manufacture of alternators. Eg. 72. 173; 205; 240; 277.

**42.** *P. Colardeau.* Considérations théoriques et pratiques sur le calcul des moteurs à explosion pour voitures. G.C. 38. 206.

**43.** *S. Hahn.* Elektrischer Antrieb von Schmirgelmaschinen. Z. W. 5. 546.

**44.** *J. Rosset.* Moteurs et combinateurs électriques pour voitures automobiles. P.E.M. 10. 131.

**45.** *L. H. Foy.* A tractive power chart. A.E.R.J. 75. 316.

### Elektrizität.

**46.** *M. Möller.* Apparat zur Veranschaulichung des Bewegungsgesetzes elektrischer Ströme. V.V.G. 80. 129.

**47.** *J. B. Pomey.* Sur un cas particulier d'équilibre électrostatique de deux cylindres de revolution parallèles. E.E. 29. 457.

**48.** *M. v. Hoór.* Neue Beiträge zur Naturgeschichte dielektrischer Körper. E.Z. 22. 170.

**49.** *P. Sacerdote.* Sur la déformation des diélectriques dans un champ électrostatique. E.E. 26. 332.

**50.** *K. R. Johnson.* Sur les conditions de la formation des décharges disruptives. E.E. 26. 393.

**51.** *H. Sire de Vilar.* La dualité en électrotechnique. E.E. 27. 252. 278; 28. 236.

**52.** *L. Finzi.* Der maximale Wirkungsgrad von Gleichstrommaschinen. E.Z. 22. 634.

**53.** *W. Peukert.* Neue Wirkungen des Gleichstromlichtbogens. E.Z. 22. 417.

**54.** *W. M.* Neuer Elektrizitätszähler für Gleich- und Wechselstrom. A.G.B. 48. 230.

**55.** *H. S. Meyer.* Parallelbetrieb in Wechselstromsystemen. E.Z. 22. 905. — *R. Franke.* 998.

**56.** *F. Breisig.* Darf man die Theorie rein sinusförmiger Wechselströme in Fragen der Kabeltelegraphie anwenden? E.Z. 22. 415.

**57.** *J. Fischer-Hinnen.* Berechnung des Spannungsabfalls von Wechselstromgeneratoren. E.Z. 22. 1061.

**58.** *F. Horschitz.* Zur Theorie des kurzgeschlossenen Wechselstromgenerators. E.Z. 22. 537.

**59.** *E. Orlich.* Über Einrichtungen und Methoden zur Prüfung von Wechselstromzählern in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. E.Z. 22. 94.

**60.** *L. Barbillon.* Diagramme de fonctionnement d'un alternateur branché sur un réseau. E.E. 27. 408.

**61.** *G. Giles.* Prédétermination de la chute de tension dans les alternateurs. E.E. 27. 90; 137.

**62.** *A. Siewert.* Über den Einfluſs der Umfangsgeschwindigkeit auf die äuſseren Dimensionen und das aktive Materialgewicht von Drehstromgeneratoren. E.Z. 22. 462.

**63.** *F. Niethammer.* Spannungsabfall von Drehstromgeneratoren. E.Z. 22. 255; 475. — *A. Blondel.* 474. — *J. C. La Cour.* 565.

**64.** *G. Stern.* Über Energiemessungen an Drehstrommotoren. E.Z. 22. 539.

**65.** *R. Goldschmidt.* Über den Kurzschluſs und Anlauf von Drehstrommotoren. E.Z. 22. 335.

**66.** *E. Rosenberg.* Über ein Phänomen bei Kurzschluſs von Drehstrommaschinen. E.Z. 22. 357; 377. — *E. Leonarz.* 553.

**67.** *A. Siewert.* Die Berechnung des Kurzschluſsstromes von Drehstrommotoren. E.Z. 22. 615.

**68.** *J. Heubach.* Der Widerstand des Kurzschluſsankers E.Z. 22. 430. — *J. Fischer-Hinnen.* 476. — *L. Fleischmann.* 613.

**69.** *M. Osnos.* Widerstand, Stromverteilung und Energieaufnahme von Kurzschluſsankern. E.Z. 22. 172. — *J. Fischer-Hinnen.* 245.

**70.** *B. A. Behrend; G. Osanna.* Diagramme des allgemeinen Transformators. E.Z. 22. 86.

**71.** *K. Kuhlmann.* Kreisdiagramme für spezielle Fälle des allgemeinen Transformators. E.Z. 22. 341.

**72.** *M. Soubrier.* Sur le temps périodique d'oscillation naturelle d'un alternateur couché. E.E. 29. 177.

**73.** *K. Pichelmeyer.* Zur Theorie der Stromwendung. E.Z. 22. 967. — *F. Punga.* 1036.

**74.** *H. S. Meyer.* Über die Berechnung rotierender Umformer. E.Z. 22. 295.

**75.** *A. Blondel.* Théorie graphique de la régulation des convertisseurs rotatifs. E.E. 29. 206; 283.

**76.** *M. Latour.* Sur la non-existence de la supériorité signalée des courants triphases dans les transports d'énergie. E.E. 26. 250.

**77.** *P. Weiſshaar.* Ein Beitrag zur rechnerischen Behandlung des Dreiphasenmotor-Diagramms. E.Z. 22. 943.

**78.** *H. Aron.* Elektrizitätszähler für Dreiphasenstrom mit vier Leitungen. E.Z. 22. 215. — *H. Kamps.* 267.

**79.** *I. Galmozzi.* Sur la traction électrique des courants polyphasés. E.E. 26. 473.

**80.** *J. L. La Cour.* Formfaktor und Scheitelfaktor. E.Z. 22. 554; 631. — *G. Reuschke.* 593.

**81.** *H. Grob.* Eine neue Motorschaltung. E.Z. 22. 211. — *M. Osnos.* 311; 406. — *R. Bauch.* 355.

**82.** *Peukert.* Messung der Arbeitsverluste in Dynamomaschinen. E.Z. 22. 393. — *K. Kuhlmann.* 442. — *L. Bloch.* 459.

**83.** *M. Corsepion.* Beurteilung der Eigenschaften von Dynamomaschinen auf Grund der Nutenanordnung. E.Z. 22. 988; 1003; 1023.

**84.** *J. Jonas.* Über die Berechnung des Streuungsfaktors asynchroner Motoren. E.Z. 22. 440; 611. — *J. Heubach.* 515.

**85.** *L. Bernard.* Beitrag zur graphischen Behandlung der Nebenschluſsmaschine. E.Z. 22. 892.

**86.** *G. Seibt.* Zur Theorie des Multiplikators für schnelle elektrische Schwingungen. E.Z. 22. 580. — *H. Cahen.* 646.

**87.** —. Mesure de la résistance intérieure des accumulateurs. G.C. 39. 373.

**88.** *E. Perreau.* Étude géométrique du condensateur transformateur. E.E. 27. 185.

**89.** *M. Leblame.* Sur la stabilité de la marche des condensateurs. E.E. 29. 229.

**90.** *M. Latour.* Sur l'économie de cuivre susceptible d'être réalisée par l'emploi des accumulateurs dans les transports d'énergie à faible distance. E.E. 26. 279.

**91.** *M. Latour.* Sur les propriétés des anneaux à collecteur. E.E. 29. 294; 328.

**92.** —. Die elektrische Glühlampe. J.G.W. 44. 323; 345; 361.

**93.** *P. Bethke.* Erwärmung und Widerstände für aussetzende Betriebe. E.Z. 22. 71.

**94.** *E. Heinke.* Dimensionierung von Zellenschalterleitungen. E.Z. 22. 1006.

**95.** *F. Lubberger.* Elektrische Messungen an städtischen Rohrnetzen. J.G.W. 44. 723.

**96.** S. *Krohn.* Zur Messung der elektrischen Ströme in den städtischen Rohrleitungen. E.Z. 22. 269. — *Jastrow* 391.

**97.** *G. Stern.* Leistungsmessung mittelst angenäherter Methode. E.Z. 22. 577.

**98.** *J. Teichmüller.* Ausgleichsleitungen. E.Z. 22. 229; 249; 271; 574. — *S. W. Edelstein.* 391; 631.

**99.** *H. E. Wimperis.* Méthode de détermination de la résistance à la traction. E.E. 29. 330.

**100.** *G. de Gelder.* Untersuchung über die praktische Brauchbarkeit des Wrightschen Höchstverbrauchsmessers. J.G.W. 44. 82; 98.

**101.** *G. Benischek.* Die Abhängigkeit der Eisenverluste von der Kurvenform. E.Z. 22. 52. — *J. H. West.* 246.

**102.** *G. Guéroult.* Étude sur l'exploitation des tramways. E.E. 29. 351.

**103.** *K. R. Johnson.* Sur l'excitateur Hertz et son application à la télégraphie sans fil. E.E. 28. 178. — *H. Poincaré.* 29. 305.

**104.** *K. Strecker.* Über die Bestimmung des Isolationswiderstandes von Telegraphenkabeln. E.Z. 22. 959.

**105.** *R. Slaby.* Abgestimmte und mehrfache Funkentelegraphie. E.Z. 22. 38.

**106.** *F. F. Roeber.* Les systèmes de télégraphie et téléphonie à grande distance de Pupin, Thompson et Reed. E.E. 28. 325. 374.

**107.** *F. Breisig.* Über den Einfluſs der Ableitung auf oberirdische Fernsprecheinrichtungen nach Pupins System. E.Z. 22. 1029.

**108.** *W. Blackstone.* Système Pupin pour la transmission des ondes électriques. E.E. 28. 168.

**109.** *E. Hohmann.* Das Wrightsche Stromtarifsystem. E.Z. 22. 49.

**110.** *K. Wilkens.* Die Bemessung des Stromkreises bei Elektrizitätswerken. E.Z. 22. 116.

**111.** *M. Claudé.* The electrolysis of gas and water pipes. Eg. 71. 590; 620.

Siehe auch 4; 5; 36—41; 43—44; 174; 217.

## Fehlerrechnung.

**112.** *S. v. Kobbe.* Über ein abgekürztes Ausgleichungsverfahren. Z.V. 30. 291.

**113.** *A. Blümcke.* Zur Jordan'schen Theorie des Maximalfehlers. Z.V. 30. 229.

**114.** *H. Koller.* Graphische Fehlerverteilung beim Einketten und bei der Koordinatenumformung. Z.V. 30. 335.

## Festigkeitslehre und Elastizität.

**115.** *O. Mohr.* Zur Festigkeitslehre. Z.V.D.I. 45. 740. — *W. Voigt.* 1033.

**116.** *O. L.* Aus der Festigkeitslehre. Z.Ö.I.A.V. 53. 778.

**117.** *M. Enſslin.* Die Durchbiegung von ungleich starken Wellen. P.J. 316. 341.

**118.** *D. A. Symons.* Moment of resistance. Eg. 72. 753 — *H. H. Broughton, G. A. Garratt, E. J. M. Davies* 783.

**119.** *C. Bach.* Eine Stelle an manchen Maschinenteilen, deren Beanspruchung auf Grund der üblichen Berechnung stark unterschätzt wird. Z.V.D.I. 45. 1567.

**120.** *G. Ramisch.* Kinematische Untersuchungen der Elastizität von Federn. P.J. 316. 453.

**121.** *A. Rejtö.* Rationelle Durchführung der Materialprüfung auf Grund des Gesetzes der Kraftvermittlung und der innern Reibung. (Deutsch. franz. engl.). B.S. 6. 34; 53; 61; 77; 125.

**122.** *M. Rudeloff.* Einfluſs des Biegens und Richtens auf die Festigkeitseigenschaften von Fluſseisen. Z.V.D.I. 45. 46.

**123.** *G. Barkhusen.* Die Verbundkörper aus Mörtel und Eisen im Bauwesen. Z.A.I. 6. 133.

**124.** *J. E. Brik.* Zwei Bruchversuche mit Massierdecken nach System „Hennebique". A.B. 66. 19.

**125.** *J. Kübler.* Die richtige Knickformel. Z.V.D.I. 45. 365; 400. — *M. Kinkel.* 898. — *Prandtl.* 900.

**126.** *A. Schneider.* Zur Theorie der Knickfestigkeit. Z.Ö.A.I.V. 53. 633; 649.

**127.** *Kriemler.* Beitrag zur Theorie der Knickung. C.B. 21. 238.

**128.** *M. R. v. Thullie.* Berechnung der höheren Säulen auf Knickfestigkeit. Z.Ö.I.A.V. 53. 761.

**129.** *S. Rappaport.* Über Betoneisenkonstruktion. Schw.B. 38. 198.

**130.** *Wilcke.* Bestimmung kleinster Querschnitte und geringster Stoffmenge für Streben oder Kopfbänder, die auf Zerknickung beansprucht werden. C.B. 21. 468.

**131.** *G. Perl.* Die Beanspruchung der Kugeln im Kugellager. P.J. 316. 69.

**132.** *Stribeck.* Über Kugellager. A.G.B. 49. 2.

**133.** *Schwinning.* Versuche über die zulässige Belastung von Kugeln und Kugellager. Z.V.D.I. 45. 332.

**134.** *Autenrieth.* Beitrag zur Bestimmung der gröfsten Schubspannung im Querschnitt eines geraden, auf Drehung beanspruchten Stabes. Z.V.D.I. 45. 1099.

**135.** *Ramisch.* Elementare Untersuchungen über die Elastizität eines Balkens auf mehreren Stützen. V.V.G. 80. 183.

**136.** *G. Ramisch.* Bestimmung des wirklichen Wegs, welchen ein Punkt eines belasteten massiven Balkens nach erfolgter Biegung desselben zurückgelegt hat. P.J. 316. 330.

**137.** *M. R. v. Thullie.* Zur Berechnung der zusammengesetzten Hohlträger. Z.Ö.I.A.V. 53. 326.

**138.** *E. Herrmann.* Zur Theorie der Festigkeit krummer Träger. P.J. 316. 405.

**139.** *O. Schmiedel.* Berechnung eines als Parabelträger konstruierten Laufkranträgers durch Einflufslinien. P.M.C. 34. 24; 30.

**140.** —. Berechnung eines eisernen Fachwerkträgers für 22,5 mm Spannweite. P.M.C. 34. 48; 56.

**141.** *Ramisch.* Elementare Untersuchung eines durch zwei Zugstangen und eine Strebe verstärkten Trägers. P.J. 316. 9.

**142.** *A. Francke.* Einige Formeln für den elastisch gelagerten Träger. Z.A.I. 6. 13.

**143.** *J. Thieme.* Beitrag zur Berechnung von kontinuierlichen Trägern über zwei Öffnungen. Z.V.D.I. 45. 1819.

**144.** *F. Milius.* Die Berechnung freitragender bogenförmiger Wellblechdächer. P.M.C. 34. 9.

**145.** *R. H. Smith.* The strength of struts. E. 91. 388.

**146.** *O. Speer.* Beitrag zur Berechnung von steifen Querrahmen. Z.A.I. 6. 183.

**147.** *G. Ramisch.* Untersuchung eines von gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräften beanspruchten dünnen Kreisrings. P.J. 316. 389.

**148.** *K. Reinhardt.* Selbsspannende Kolbenringe. Z.V.D.I. 45. 232; 373.

**149.** *G. Schwarz.* Festigkeit von Scheibenkolben. Z.V.D.I. 45. 1419.

**150.** *L. Cosyn.* Étude théorique sur la résistance des voûtes. Schw.B. 38. 139; 153; 169.

**151.** —. Eine neue graphische Methode zur Berechnung der Bandbremsen. P.M.C. 34 65.

**152.** *A. Vieth.* Giefsereikran für 1500 kg Nutzlast. P.M.C. 34. 96.

**153.** *F. Engesser.* Über Bogenbrücken mit elastischen Pfeilern. Z.B. 51. 311.

**154.** *J. Melan.* Grundzüge für die Berechnung und Konstruktion der Eisenbahnbrücken in Nordamerika. Z.Ö.I.A.V. 53. 257.

**155.** *E. Lubini.* Einige Brückenverstärkungen der Gotthardbahn. Schw.B. 37. 23; 35.

**156.** *J. Hervieu.* Le pont J. F. Lépine. Schw.B. 38. 145; 161; 177.

**157.** *A. Morizot.* Les ponts métalliques à arendes (Système Virendeel). Schw.B. 38. 33; 49.

**158.** *S. Périsée.* Chute par gauchissement d'un pont démontable. M.I.C. 54 A. 823.

**159.** *G. Baehr.* La salle des fêtes de l'exposition. G.C. 38. 1.

**160.** *R. Leupold.* Über die Berechnung der Schornsteine. T. 6. 105.

**161.** *K. Reinhardt.* Festigkeit der Schwungräder. Z.V.D.I. 45. 267.

**162.** *J. Bruhn.* The transverse strength of ships. Eg. 72. 30.

**163.** *F. H. Wagner.* Die Platten in Vernietungen cylindrischer Flüssigkeitsbehälter. T. 6. 165.

**164.** *E. Braufs.* Die Konstruktion offener Wasserbehälter aus Eisenblech. Z.G.K. 8. 167.

**165.** *L. H. Fry.* A boiler shell chart. A.E.R.J. 75. 192.

**166.** *J. Goodmann.* The strength of drop forged crane hooks. Eg. 72. 537.

Siehe auch 212—216; 241—242.

### Geodäsie.

**167.** *Wilcke.* Teilung eines Grundstücks mit veränderlichem Wert der Flächeneinheit. Z.V. 30. 159; 307.

**168.** *E. Doležal.* Festlegung eines polygonalen Zuges bei Verwendung neuer

Instrumente für optische Distanzmessung. Z.Ö.I.A.V. 53. 785; 833.

**169.** *J. Urbanski.* Über Lösungen geodätischer Aufgaben bei Verfassung der Detailprojekte von Wasserstraſsen. Z.Ö.I.A.V. 53. 573; 721. — *R. Holländer.* 720.

**170.** *E. Hammer.* Neuer Tachymetertheodolit zur unmittelbaren Lattenablesung der horizontalen Entfernung und des Höhenunterschieds. Z.A.I. 6. 42.

**171.** *S. Wellisch.* Eine praktische Neuerung beim Tachymetrieren. Z.Ö.A.I.V. 53. 638. — *A. Tichy.* 927.

**172.** *F. Deinert.* Landesvermessung in Chile. Z.V. 30. 277.

Siehe auch 114; 223—225; 229—231; 277; 279.

## Graphischer Calcul.

**173.** *A. Sieber.* Graphische Lösung höherer algebraischer Gleichungen. Schw.B. 37. 116; 180.

**174.** *P. Pforr.* Die Anwendung des Seilecks für die Berechnung der Stromverteilung bei elektrischen Bahnen. E.Z. 22. 411. — *G. Brandt* 515.

Siehe auch 13; 151; 246—247.

## Hydrostatik, Hydrodynamik und Hydraulik.

**175.** *H. Gravelius.* Siedecks neue Geschwindigkeitsformel. Z.H. 4. 165.

**176.** *R. Siedeck.* Studie über eine neue Formel zur Ermittelung der Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen und Strömen. Z.Ö.I.A.V. 53. 397; 409; 445.

**177.** *H. Bindemann.* Die mittlere Abfluſsmenge in Flüssen. C.B. 21. 273. — *Gravelius* 369.

**178.** *G. Crugnola.* Zur Dynamik des Fluſsbetts. Z.H. 4. 268.

**179.** *R. H. Smith.* The flow of water in channels and pipes. E. 91. 613.

**180.** *P. Forchheimer.* Wasserbewegung durch Boden Z.V.D.I. 45. 1736.

**181.** *C. H. Wingfield.* The influence of depth of immersion on the distribution of pressure over a submerged moving plate. Eg. 71. 433.

**182.** *K. Rudolf.* Ventilspiel bei Pumpen und Gebläsen. P.J. 316. 309; 331.

**183.** *K. Rudolf.* Beurteilung der Saugwirkung einer Kolbenpumpe. P.J. 316. 728.

**184.** *Hagens.* Die Vorgänge beim Ansaugen der Pumpen. Z.V.D.I. 45. 1535.

**185.** —. Über die zulässige Saughöhe der Pumpen, welche aus der Luftleere saugen. P.J. 316. 684.

**186.** *C. Blecken.* Das Pettonpumpwerk. J.G.W. 44. 24.

**187.** *G. Rauter.* Über Aräometer mit willkürlicher Einteilung. P.J. 316. 677.

**188.** *G. Ramisch.* Bestimmung der Eingrabungstiefe einer Spundwand. P.J. 316. 744.

**189.** *Hecker.* Beitrag zur Berechnung von Kanalisationsleitungen. G.I. 24. 374; 389.

**190.** *E. Brauſs.* Die Dimensionen der Wasserleitung für Haus- und Badebedarf. G.I. 24. 269.

**191.** *R. Mewes.* Berechnung der Warmwasser-, Wasser- und Gasleitungen. P.J. 316. 686; 698.

**192.** *J. Horowitz.* Die Trinkwasserversorgung in Dalmatien. A.B. 66. 59.

**193.** *N. Baashuus.* Zur Konstruktion der Laufräder der Radialturbinen. Z.V.D.I. 45. 1602.

**194.** *F. Fischer.* Beitrag zur Bestimmung des Einflusses der Verzögerung auf die in städtischen Kanälen abzuführenden Gröſstwassermengen. G.I. 24. 169.

**195.** — Beitrag zum Kapitel: Stauberechnungen. D.B. 35. 179.

**196.** *A. Klir.* Staustufe bei Troja. A.B. 66. 39.

**197.** *Brauneis.* Beispiel der Berechnung einer Wasserwerkanlage. P.M.C. 34. 137.

**198.** *P. Forchheimer.* Günstigste Grabenneigung und Rohrweite bei Wasserkraft-Anlagen. Z.Ö.I.A.V. 53. 775.

**199.** *J. Gröger.* Trogschleusen auf geneigten Fahrbahnen mit besonderer Rücksichtnahme auf die Erhaltung eines ruhigen Wasserspiegels. Z.Ö.I.A.V. 53. 725; 745.

**200.** *A. Hauſsner.* Der Holländer. P.J. 316. 437; 456; 474; 490; 508; 541; 556; 576; 589.

**201.** *K. Ereky.* Der Holländer und seine Theorie. P.J. 316. 235.

**202.** *J. P. Church.* Theory of locomotive water scoops. A.E.R.J. 75. 376.

**203.** *Thiele.* Schiffswiderstand auf Kanälen. C.B. 21. 345.

**204.** *J. A. Normand.* Approximate rules for the determination of the displacement and dimensions of a ship in

accordance with a given programme of requirements. E. 92. 311.

Siehe auch 29; 31; 262.

### Inhalte.

**205.** *J. H. Lonie.* Volum of load on ballast or coal cars. A.E.R.J. 75. 57.

**206.** *L. H. Fry.* To determine the weight of water in a boiler. A.E.R.J. 75. 346.

### Kartenprojektion.

**207.** *Franke.* Koordinaten und Projektionen. Z.V. 30. 517.

### Kinematik.

**208.** *A. Herzog.* Über den Beschleunigungszustand des Kurbelvierecks. Schw.B. 37. 199.

**209.** *A. Schaffer.* Über Zahnräder. Z.Ö.I.A.V. 53. 798; 818.

**210.** — Engrenages coniques de série fonctionnant sous un angle quelconque. G.C. 39. 228.

**211.** *T. Pregél.* J. E. Reineckers Werkzeugmaschinen. P.J. 316. 357; 377; 395; 411; 459; 477.

**212.** *G. Ramisch.* Kinematische Untersuchung eines belasteten ebenen Stabzuges. P.J. 316 533.

**213.** *G. Ramisch.* Kinematische Untersuchung einer zwischen zwei mit einander gelenkartig befestigten Balken befindlichen dicken Blattfeder. P.J. 316. 645.

**214.** *G. Ramisch.* Kinematische Untersuchung eines kreisförmigen Bogenträgers mit Kämpfergelenken, letztere verbunden durch eine Stange. P.J. 316. 597.

**215.** *G. Ramisch.* Kinematische Theorie des Fachwerkbogens mit eingespannten Kämpfern. Z.Ö.I.A.V. 53. 595.

**216.** *G. Ramisch.* Kinematische Untersuchung des doppelten Hängewerks. P.J. 316. 213.

Siehe auch 120.

### Kurven.

**217.** *M. Schenkel.* Geometrische Örter an Wechselstromdiagrammen. E.Z. 22. 1043.

### Magnetismus.

**218.** *E. Müllendorf.* Das Gesetz der magnetischen Induktion. E.Z. 22. 925.

**219.** *E. Dick.* Über die Kraftlinienverteilung in Nutenankern bei stark gesättigten Zähnen und die Bestimmung der zugehörigen magnetomotorischen Kraft wie des minimalsten Luftabstandes $\delta$. E.Z. 22. 598.

**220.** *F. Jacobsen.* Graphische Ermittelung des hysteretischen Voreilwinkels. E.Z. 22. 529.

**221.** *W. Beneke.* Über den Einfluſs der Polform von Magneten auf die Zugkraft derselben. E.Z. 22. 542.

**222.** *H. Kamps.* Über die durch Oxydschichten des Eisens verursachten Fehler magnetischer Messungen. E.Z. 22. 75.

### Meſswerkzeuge.

**223.** *Schulze.* Der Lattenreiter. Z.V. 30. 549.

**224.** *Puller.* Schnellmesser, ein Schiebetachymeter für lotrechte Lattenstellung. C.R. 21. 510; Z.V. 30. 531.

**225.** *G. Hilscher.* Die tachymetrische Meſslatte. Z.V. 30. 210.

**226.** *C. Pulfrich.* Über einen Neigungsmesser. Z.I. 21. 205.

### Näherungsmethoden.

**227.** *Röther.* Näherungsformel für $x \pm ax = b$ und $\sqrt{x^2 + y^2}$. Z.V. 30. 654.

**228.** *Steiff.* Näherungsmethode für $x^2 + y^2 = s$. Z.V. 30. 133. — *W. Wojtan* 135. — *Puller* 653.

**229.** *E. Hammer.* Zur Kreisbogenabsteckung. Z.V. 30. 205.

**230.** *Szarvas.* Abstecken von Kreisbögen aus dem Tangentialpunkt. Z.V. 30. 129. — *Puller* 383. — *Hafferl* 384.

**231.** *A. Schleussinger.* Über Verhältniszahlen zur Absteckung von Kreisbogen. Z.V. 30. 657.

### Nomographie.

**232.** *R. Soreau.* Contribution à la théorie et aux applications de la nomographie. M.I.C. 54. B. 191.

### Optik.

**233.** *R. Fritsch.* Über die Perspektiv-Brillengläser. C.Z. 22. 212.

**234.** *C. Hecker.* Über die Beurteilung der Raumtiefe in dem stereoskopischen Entfernungsmesser von Zeiss-Jena. Z.V. 30. 65.

**235.** *W. Airy.* Geodesy. E. 91. 407.

**236.** *P. Hoppe.* Über grofse astronomische Fernrohre. A.G.B. 49. 114; 130.

Siehe auch 7.

### Rechenmaschinen.

**237.** *Puller.* Rechenscheibe mit Glasläufer und Lupe. Z.V. 30. 296.

**238.** *Schweth.* Eine Erweiterung des Anwendungsgebiets des Rechenschiebers. Z.V.D.J. 45. 567.

**239.** *H. Sossna.* Ergebnisse einer Zuverlässigkeitsuntersuchung mit der Rechenmaschine „Brunsviga". Z.V. 30. 636.

### Reibung.

**240.** *Camerer.* Zapfenreibung, Zapfenkraft und Koeffizient der Zapfenreibung. Z.V.D.I. 45. 1501.

**241.** *Stribeck.* Kugellager für verschiedene Belastungen. Z.V.D.I. 45. 73; 118.

**242.** *F. Heerwagen.* Kugellager. Z.V.D.I. 45. 1701.

**243.** *S. Hahn.* Reibungsverluste von Vorgelegen. P.J. 316. 672.

**244.** *C. R. Aird.* Über die Luftreibung am Spiegel der Ströme. Z.A.I. 6. 463.

### Reihen.

**245.** *G. Fischer-Hinnen.* Methode zur schnellen Bestimmung harmonischer Wellen. E.Z. 22. 396.

### Statik.

**246.** *M. Kinkel.* Beweis einiger Konstruktionen mit Hilfe der graphischen Statik. Schw.B. 37. 19.

**247.** *G. Ramisch.* Beiträge zur graphischen Statik. P.J. 316. 808; C.B. 21. 635.

**248.** *G. Ramisch.* Beiträge zur Lehre von den Einflufslinien. D.B. 35. 459.

**249.** *A. Bantlin.* Beitrag zur Bestimmung der Biegungsspannung in gekrümmten stabförmigen Körpern. Z.V.D.I. 45. 201.

**250.** *A. Osterfeld.* Die Berechnung der Spannungen in den Pfosten einfacher Fachwerkbalken. Z.V.D.I. 45. 1420.

**251.** *G. Ramisch.* Beitrag zur Bestimmung der Ortsveränderung von einem Knotenpunkte eines belasteten einfachen Fachwerkbalkens. P.J. 316. 277.

**252.** *G. Ramisch.* Untersuchung eines zweifach statisch unbestimmten Fachwerkträgers. P.J. 316. 101.

**253.** *Müller-Breslau.* Zur Berechnung von Gitterbalkenträgern mit gekrümmten Gurtungen. C.B. 21. 453.

**254.** *G. Ramisch.* Ableitung eines zweifach statisch unbestimmten Bogenträgers aus einem dreifach statisch unbestimmten Bogenträger. P.J. 316. 725.

**255.** *T. Landsberg.* Neue Raumfachwerke. C.B. 21. 550.

**256.** *Müller-Breslau.* In Sachen des statisch bestimmten und unbestimmten mehrteiligen Strebenfachwerks. D.B. 35. 558.

**257.** *A. Umlauf.* Bestimmung der Achsenlager der Füllungsglieder ebener Fachwerke bei veränderlichen Gurtquerschnitten. Z.Ö.I.A.V. 53. 582.

**258.** *G. Ramisch.* Beitrag zur Untersuchung der Spannungen in einem Fachwerk. P.J. 316. 697.

**259.** *Zimmermann.* Das Raumfachwerk des Reichstagshauses. C.B. 21. 201; 209.

**260.** *T. Landsberg.* Beitrag zur Theorie der Gewölbe. Z.V.D.I. 45. 1765; 1781.

**261.** *Fries.* Ausbildung der Stirnmauern auf überschütteten Gewölben zur Verminderung des ungünstigen Einflusses des Erddrucks. B.B. 35. 191.

**262.** *Gnuschke.* Über eine bemerkenswerte Gattung von Bogenlinien, ihre Anwendung für untermauerte Brückengewölbe und ihre Bedeutung in der Hydrostatik. Z.B. 51. 607.

**263.** *A. Zschetzsche.* Die Kuppel des Reichstagshauses in Berlin. Z.Ö.I.A.V. 53. 52; 65; 81; 924. — *H. Zimmermann.* 310; 922.

**264.** *P. Neumann.* Druckkräfte bei Mauerwerk unter Ausschlufs von Zugspannungen. C.B. 21. 370.

**265.** *F. Dircksen.* Die neuen Belastungsvorschriften für die eisernen Brücken der preufsischen Staatseisenbahnverwaltung vom April 1901. C.B. 21. 381; 405.

**266.** *M. Schurich.* Die Kreiskoppel. C.B. 21. 360.

**267.** *J. Weyrauch.* Über die Zunahme der Brückenspannweiten im 19. Jahrhundert. Z.B. 51. 465; 617.

**268.** *O. Schmiedel.* Statische Berechnung einer Eisenbahnbrücke von 18 m Stützweite. P. M. C. 34. 180; 192; 199.

**269.** *F. C. Kunz.* Die Brücke der Pennsylvania-Eisenbahn über den Delaware bei Philadelphia. A.B. 66. 5.

**270.** —. Internationales Gewindesystem auf metrischer Grundlage. Z.Ö.I.A.V. 53. 273.

**271.** —. Statische Berechnung eines Kabelüberführungsständers für 112 Leitungen. P.M.C. 34. 89..

**272.** *A. Francke.* Erddruck. Z.B. 51. 639.

**273.** *S.* Tafeln zur Berechnung des Erddrucks. C.B. 21. 525.

**274.** *E. Beyerhaus.* Die wagrechte Seitenkraft des Erddrucks. C.B. 21. 451. — *Puller.* 452.

**275.** *Kaiser.* Neigung von Böschungen. C.B. 21. 63. — *Sachse.* 139. — *E. Beyerhaus* 140; 451. — *Puller.* 216; 452.

## Trigonometrie.

**276.** *G. Bischoff.* Sphärisch-trigonometrische Beziehungen. Z. V. 30. 397.

**277.** *G. Heil.* Eine Abart des Rückwärtseinschneidens. Z.V. 30. 645.

**278.** *Wilcke.* Die Linie des gröfsten Gefälls. Z.V. 30. 629.

**279.** *H. Löscher.* Über eine Erweitedes Rückwärtseinschneidens. Z.V. 30. 485.

## Wärme.

**280.** *R. Mewes.* Die Grundlage der Wärmemechanik nach Dühring, Grofs und Mewes, Slaby und Casalonga. V.V.G. 80. 211.

**281.** *A. Denizot.* Zum zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Z.G.R. 8. 192; 201.

**282.** *A. Böttcher.* Betrachtungen über wärmetheoretische Vorgänge mit besonderer Berücksichtigung von Luft und Dampf als arbeitende Körper in Wärmekraftmaschinen. V.V.G. 80. 439.

**283.** *E. G. M. Davies.* The phenomene of boiler explosions. E. 91. 546.

**284.** *K. Bräuer.* Beitrag zur Theorie der Polytrope. P.J. 316. 501.

**285.** — Überhitzer. Z.G.K. 8. 30.

**286.** *A. Dosch.* Die Brutto- und Nettoverdampfung. P. J. 316. 181; 203.

**287.** *R. Mewes.* Die Spannung des Wasserdampfs und die Dampfspannungsformeln. P.J. 316. 717.

**288.** *G. Recknagel.* Abkühlung und Erwärmung geschlossener Räume. Z.V.D.I. 45. 1801.

**289.** *E. Hausbrand.* Das Trocknen mit direcktem Feuer. G.I. 24. 353.

**290.** *J. B. Goebel.* Elementare Ableitung der Gleichung von H. Fischer zur Berechnung der Druckverluste in Dampfleitungen. G.I. 24. 33.

**291.** *E. Herrmann.* Berechnung der Dampfmaschinen. P.J. 316. 517; 536.

**292.** *A. Hanssen.* The proportions of cylindres for multiple expansion engines. Eg. 71. 588.

**293.** *F. W. Burstell.* Gas engine research. Eg. 72. 593.

**294.** *E. Meyer.* Untersuchungen am Gasmotor. Z.V.D.I. 45. 1297; 1341.

**295.** *A. v. Ihering.* Die spezifischen Wärme der Gase und die kalorimetrische Untersuchung der Gasmaschine. J.G.W. 44. 285.

**296.** *A. v. Ihering.* Die spezifischen Wärmen der Verbrennungsprodukte der Gasmaschinen. J.G.W. 44. 66.

**297.** *E. Löwenstein.* Gasmotoren und ihr Verwendungsgebiet. M.T.G.M.W. 11. 99.

**298.** *R. Mewes.* Über den Wirkungsgrad der Verbrennungskraftmaschinen. P.J. 316. 251.

**299.** *R. Barkow.* Beitrag zur Berechnung der Rentabilität der Gasmaschine. Z.V.D.I. 45. 1640.

**300.** *M. Kuhn.* Steuerung mit konstanter Füllung im Niederdruckcylinder bei veränderlicher Füllung im Hochdruckcylinder für Verbandlokomotiven. A.G.B. 49. 177.

**301.** *M. Müller.* Die Berechnung der Motorleitung im Bahnbetrieb. E.Z. 22. 921.

**302.** *Wittfeld.* Über die wirtschaftlich vorteilhafteste Belastung der Heizfläche der Lokomotiven. E. B. 21. 466.

**303.** *M. Richter.* Schnellbetrieb auf den Eisenbahnen der Gegenwart. P.J. 316. 362. 661.

**304.** *E. Rasch.* Über die Grundbedingungen einer ökonomischen Lichterzeugung. J.G.W. 44. 152; 170.

**305.** *Wilde.* Selbstthätige Dampfabsperrung beim Bruch einer Rohrleitung. S.V.G. 1901. 231.

**306.** *M. Grellert.* Das Verhältnis der Heizflächen zwischen Kohlen- und Gasheizung. G.I. 24. 337.

**307.** *O. Maw.* Kondenswasser und die Apparate zu seiner Wiedergewinnung. G. J. 24. 237.

**308.** *W. L.* Elektrische Tiefenthermometer. C. Z. 22. 81.

**309.** *O. Hecker.* Untersuchung der Konstanz von Siedethermometern aus dem Glase $59^{III}$. Z. I. 21. 133.

**310.** *G. Hartmann.* Die elektrische Heizeinrichtung des Potsdamer Sternspektrographen No. III. Z.I. 21. 313.

**311.** *R. Hammerschmidt.* Zur Umrechnung des aus Calciumcarbid entwickelten Rohacetylens auf die für Handelsware geltenden Normalien. Ac 4. 69.

**312.** *F. Mall.* Über Wärmetransmission. Z. G. K. 8. 22.

Siehe auch 2; 53.

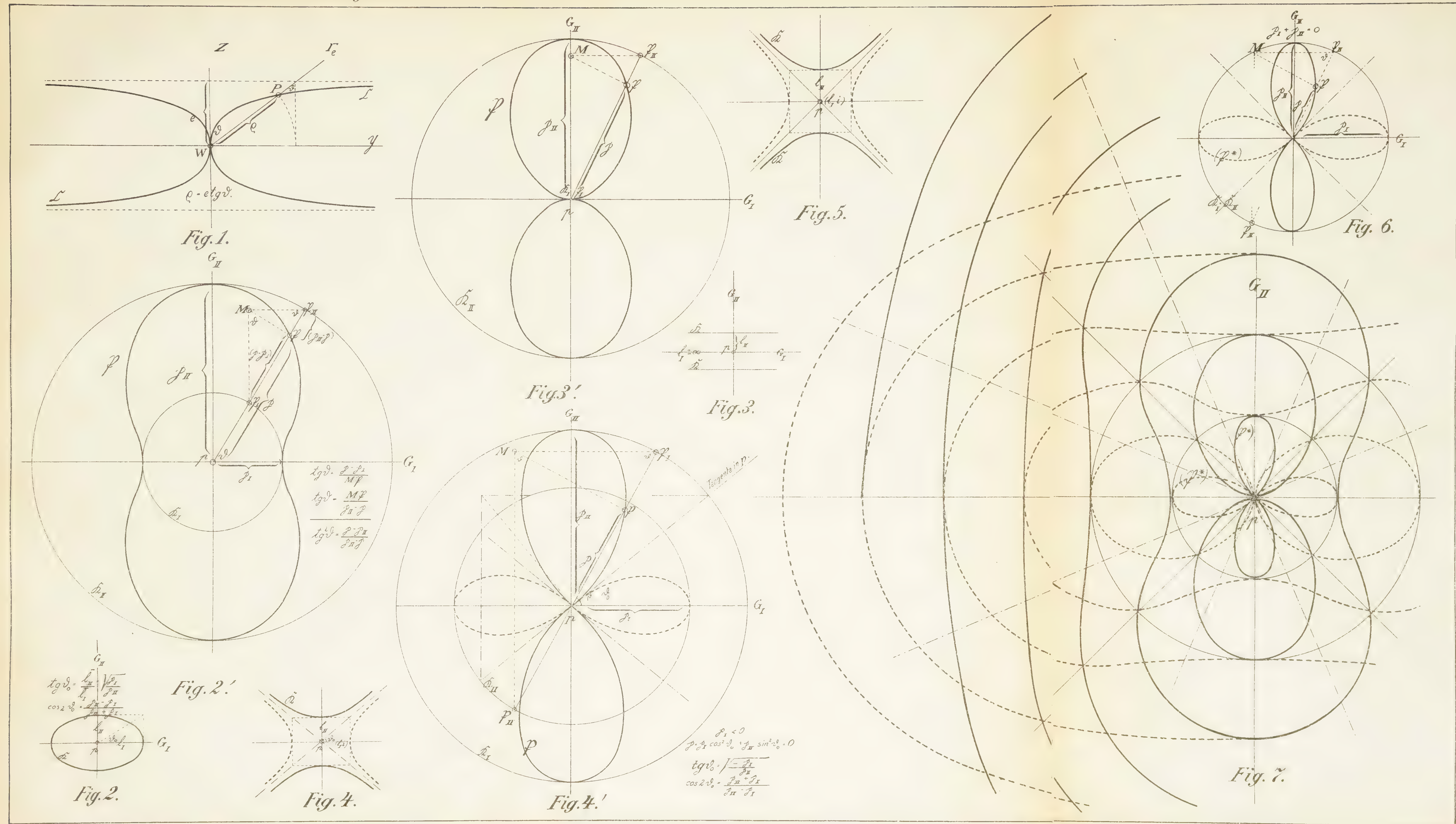
### Zeichenwerkzeuge.

**313.** — Der Ellipsenzirkel von Marcus Kriss. Z. Ö. I. A. V. 53. 404.

**314.** *Kossmehl.* Ein neues Zeichendreieck. C. B. 21. 36.

**315.** *Puller.* Verschiedene Neigungen an Zeichendreiecken. C. B. 21. 440.

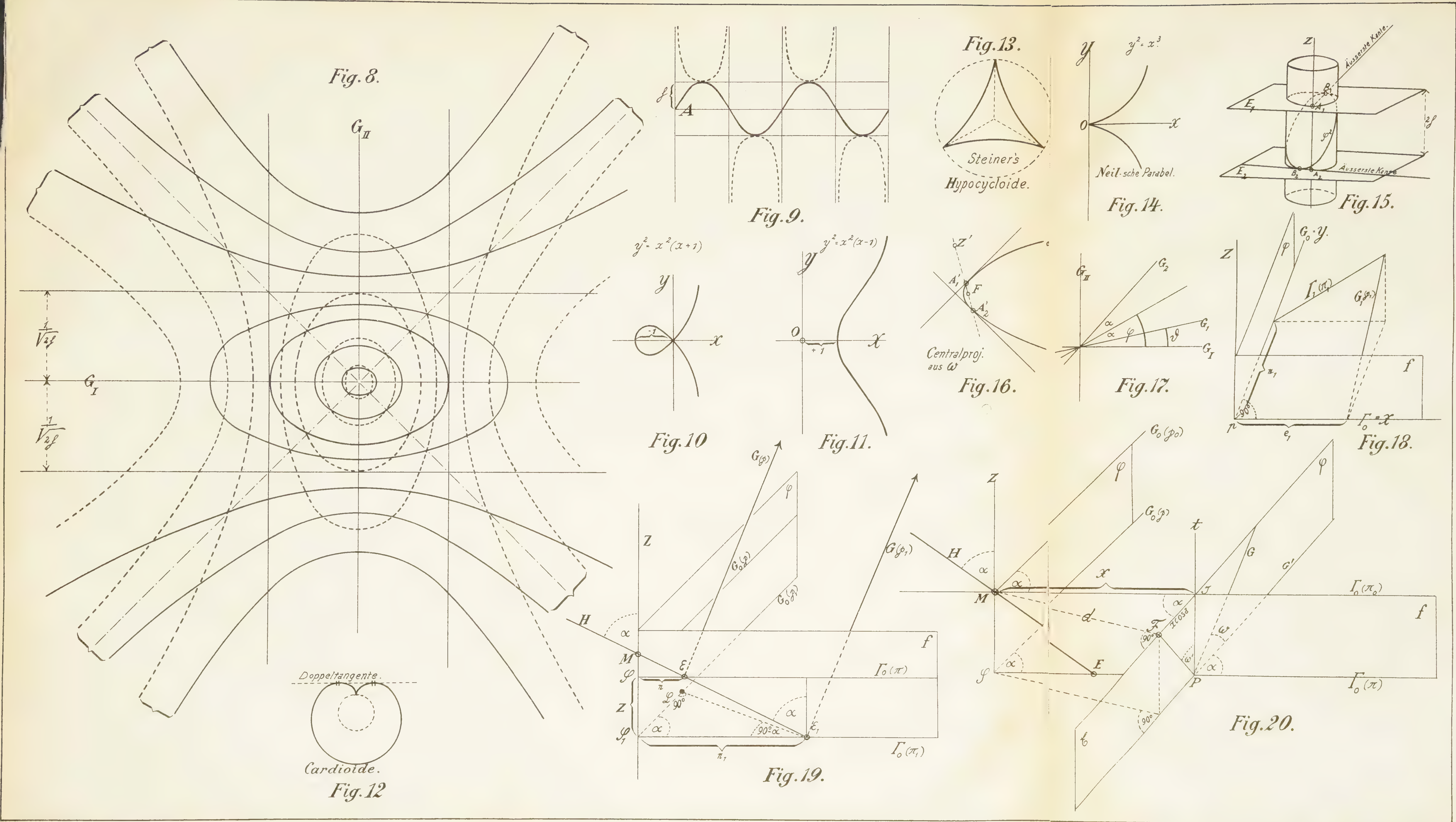






Verlag v. B. G. Teubner Leipzig.
Lith. u. Druck v. Emil Gerasch, Leipzig-R.







Verlag v. B. G. Teubner Leipzig.
Lith. u. Druck v. Emil Gerasch Leipzig-R.

# Zeichnerische Ermittelung der Kräfte im Kreisbogenträger mit und ohne Kämpfergelenke.

Von Baurat A. Francke in Herzberg a. Harz.

Mit 9 Fig. auf 2 Tafeln.

Streckt man einen Bogen in eine Gerade und trägt an jeder Stelle das, im betreffenden Bogenpunkte wirkende innere Biegungsmoment als Belastungshöhe auf, verbindet alsdann diese Belastungskräfte durch ein Seilpolygon, so erhält man bekanntlich, als Ergebnis einer zweifachen Integration der allgemeinen Biegungsgleichung $EI\frac{d^2z}{ds^2} = \pm M$ die zeichnerische Darstellung der, in Richtung des Krümmungshalbmessers gemessenen elastischen Durchbiegung $z$.

Weil, für gegen 1 verschwindende, belanglose Werte $\frac{I}{Fr^2}$ die elastische Achsenschiebung $w$ eines Kreisbogenträgers gegeben wird durch den einfachen Ausdruck:

$$w = \int z dw = \frac{1}{r}\int z ds,$$

so ist die Änderung der Länge der Bogenachse dargestellt durch den Flächeninhalt $F = \int z ds$ der $z$-Kurve und man kann daher aus der Stetigkeit der nun einmal vorhandenen Bogenachsenlänge, also auf Grund der Forderung $\int z ds = 0$, aus der zeichnerischen Darstellung der Durchbiegung $z$ die durch irgendwelche Belastung $P$ erzeugte Kräfteverteilung in einfacher Weise ermitteln, indem man eben die gesuchten, unbekannten Kräfte, z. B. beim Bogen mit zwei Kämpfergelenken den, in Richtung der Schlufssehne wirkenden Bogenschub $H$ der Bedingung $\int z ds = 0$ entsprechend bestimmt.

Hierbei empfiehlt es sich, namentlich um für die möglichen und denkbaren Belastungsfälle von vornherein jedes zeichnerische Probieren auszuschliefsen, die Wirkungen der gesuchten, erzeugten Kraft $H$ und

der gegebenen Belastung $P$ stets für sich gesondert zu betrachten, also den Schub $H$, genau wie bei dem entsprechenden analytischen Verfahren, auf Grund der Beziehung zu bestimmen:

$$0 = H\Delta_H + P\Delta_P \quad \text{oder} \quad \frac{H}{P} = \frac{\Delta_P}{-\Delta_H} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}},$$

so daſs also der Nenner $-\Delta_H$ der im Zustand $H = -1$ erzeugten Änderung der Länge der Bogenachse entspricht, während der Zähler $\Delta_P$ die durch die Belastung $P$ an und für sich, also unter der Voraussetzung $H = 0$, erzeugte Änderung dieser Länge darstellt.

## I. Der Kreisbogenträger mit Kämpfergelenken.

Wir betrachten, Abb. 1, den Kreisbogenträger mit Kämpfergelenken im Zustande $H = 1$, setzen also voraus, daſs der im übrigen völlig unbelastete Bogen einen inneren, wagerechten Scheitelschub $H = 1$ zu tragen habe.

Indem wir, Abb. 1a, auf der Geraden $O_1 A_1$ für jeden Punkt $s$ den Hebelarm $p$ lotrecht als Belastungshöhe auftragen, erhalten wir in der Kurve $B A_1$ eine zeichnerische Darstellung der dem Zustande $H = 1$ entsprechenden inneren Momente $p$, und indem wir diese Kurve $p$ als Belastungslinie der geraden Strecke $O_1 A_1$ auffassen und diese Kräfte $p$, Abb. 1b, durch ein Seilpolygon verbinden, erhalten wir, Abb. 1b, die zeichnerische Darstellung der elastischen Durchbiegung $z$ des Bogenträgers bei Erfüllung der durch die Symmetrie geforderten Bedingung $\frac{dz}{ds} = 0$ für den Scheitel.

Der Inhalt $O_{11} A_2 B_1 = F$ dieser $z$-Linie stellt ein Maſs dar für die dem Zustande $H = \pm 1$ entsprechende Änderung der Bogenachsenlänge und kann mithin angesehen werden als der, ein für allemal feststehende, Nennerwert des durch irgendwelche Belastung $P$, $q$ erzeugten Bogenschubes $H$.

Um letzteren für irgendwelche Belastung $P$ zu bestimmen, braucht man daher für den Einzelfall lediglich den zugehörigen Zählerwert zu ermitteln.

Sei beispielsweise, Abb. 2, der Bogen belastet durch die im Bogenpunkt $D$ angreifende, beliebig gerichtete Einzelkraft $P$, so denke man sich die Belastung ergänzt zur punktiert angegebenen, symmetrischen Belastung, wobei also der Schub $H$, in Vergleich zur Wirkung einer einzigen Last $P$, sich verdoppeln würde, und betrachte für diesen gedachten symmetrischen Belastungsfall lediglich die Sonderwirkung der

Belastung, nicht etwa auch zugleich die ja bereits bekannte, nach Abb. 1 bereits ermittelte, Sonderwirkung von $H$.

Trägt man also, Abb. 2a, unter der Voraussetzung $H = 0$, die inneren Biegungsmomente $p$ auf der gerade gestreckten Bogenstrecke $O_1 A_1$ auf, am einfachsten, indem man die Hebelarme $a$ der Einzelkraft $P$ in Bezug auf die rechts von $D$ gelegenen Bogenpunkte auf der Geraden $BA_{11}$ aufträgt und durch den äufsersten Punkt $A_1$ die Wagerechte $O_1 A_1$ zieht, und betrachtet den Linienzug $BDA_1$ oder $p$ als Belastung der Strecke $O_1 A_1$, so erhält man, Abb. 2b, durch Verbindung der Belastungskräfte $p$ durch ein Seilpolygon die Darstellung der zugehörigen elastischen Durchbiegung $z$ und also im Inhalt $O_{11} B_1 A_3 = F_1$ dieser $z$-Kurve den gesuchten Zählerwert, so dafs also der von einer einzigen Einzelkraft $P$ erzeugte Schub $H$ bestimmt ist durch:

$$\frac{2H}{P} = \frac{F_1}{F}.$$

## II. Der Kreisbogenträger mit eingemauerten, undrehbaren und unverschiebbaren Kämpfern.

Ein Bogenträger mit eingemauerten Kämpfern ist statisch dreifach unbestimmt. Es bedarf daher zur Feststellung der durch irgendwelche Belastung im Bogen erzeugten Kräfte einer dreifachen Angabe in Bezug auf die Kräfteverteilung, und nehmen wir die drei im Scheitel des symmetrisch geformten Bogens erzeugten Kräfte, nämlich die Querkraft $Q_0$, die Längskraft $K_0$ und das Moment $M_0$, als die drei Bestimmungsgröfsen der Kräfteverteilung an.

Die durch irgendwelche Belastung $P$, $q$ erzeugte Querkraft $Q_0$ kann, wie später näher gezeigt wird, für sich durch Betrachtung des entsprechenden antisymmetrischen Belastungsfalles gefunden werden, während der erzeugte Schub $H_0$ und das Scheitelmoment $M_0$ am einfachsten durch Betrachtung des symmetrischen Belastungsfalles, in welchem $Q_0$ verschwindet, ermittelt werden kann.

Wir betrachten, Abb. 3, zunächst den unbelasteten Bogen im Zustande des Scheitelschubes $H$ oder $H = 1$, wie solcher Zustand beispielsweise durch gleichmäfsige Wärmeänderung thatsächlich herbeigeführt werden kann.

In diesem Zustande $H$ hat der Bogen, abgesehen von diesem inneren Scheitelschub $H$, auch gleichzeitig ein zu $H$ zugehöriges, von $H$ erzeugtes inneres Scheitelmoment $M$ zu tragen, welches seinem absoluten Werte nach mit $H$ wächst und abnimmt und mithin ausgedrückt werden kann durch:

$$M = -Hh.$$

Der Hebelarm $h$ kann leicht zeichnerisch bestimmt werden.

Strecken wir, Abb. 3a, den Bogen $OA$ in die Gerade $OA$ und tragen auf dieser Geraden die Hebelarme $c$ der Kraft $H$ in Bezug auf die Bogenpunkte als die dem Schube $H$ entsprechende Momentenbelastung $c$ auf, so mufs der Flächeninhalt des Rechtecks $OBB_1A =$ dem Inhalt der Momentenbelastungsfläche $OAC$ sein, wenn die Höhe $h$ des Rechteckes den Hebelarm $h$ des von $H$ erzeugten Scheitelmomentes $M = -Hh$ darstellt.

Denn fassen wir die Momentenfläche $OAC$ auf als Belastungsfläche, so würden wir, durch Zeichnung des entsprechenden Seilpolygons, die dem Werte $H = H$, $M = 0$ entsprechende elastische Durchbiegung $z$ des Bogenträgers erhalten und die letzte, am Kämpfer gelegene Seite dieses Seilpolygons würde mit ihrer Richtung der elastischen Verdrehung $\frac{dz}{ds}$ daselbst entsprechen.

Verbänden wir aber ein zweites Mal die Belastung der Höhe $h$ durch ein Seilpolygon, so würde die letzte Seite die dem Werte Horizontalschub $= 0$, Moment $= h$ entsprechende elastische Verdrehung $\frac{dz}{ds}$ des Kämpferpunktes darstellen.

Da nun, nach der Voraussetzung, die Kämpferpunkte undrehbar sind, so mufs die Gesamtwirkung der Kräfte $M$ und $H$ die elastische Kämpferverdrehung $\frac{dz}{ds} = 0$ ergeben, d. h. es mufs sein:

$$h \,.\, OA = \text{Fläche } OAC.$$

Man kann daher die Länge $h$ durch sehr einfache zeichnerische Ausführungen, z. B. durch Zurückführen des Flächeninhaltes $OAC$ auf die Grundlinie $OA$ als Basis auffinden.

Indem man nun die Belastungslinie $OC$ der Abb. 3a auf die Wagerechte $BB_1$ bezieht, also die Belastung $c - h = b$ betrachtet und diese Belastungskräfte $b$ durch ein Seilpolygon verbindet, findet man, Abb. 3b, die Linie der elastischen Durchbiegung $z$ bei Erfüllung der notwendigen Bedingung $\frac{dz}{ds} = 0$ im Scheitel wie am Kämpfer.

Der Inhalt $O_1A_1D = F$ aber dieser $z$-Linie stellt ein Mafs dar für die durch den Zustand $H$ erzeugte Änderung der Bogenachsenlänge und kann daher als der allgemeine, ein für allemal giltige, Nennerwert genommen werden für jeden durch irgendwelche Belastung $P$, $q$ ... erzeugten Scheitelschub $H_0$.

Um beispielsweise die Wirkungen $H_0$, $M_0$ einer einzigen, beliebig gerichteten Kraft $P$, Abb. 4, zu ermitteln, denken wir uns die Belastung

ergänzt zur punktiert angegebenen symmetrischen Belastung mit den Werten $2H_0$, $2M_0$.

Indem wir, Abb. 4a, den Bogen geradestrecken und die Bogenhälften $OA$ lediglich unter Wirkung der Einzellast $P$ und des, der symmetrischen Belastung $P$ zugehörigen, von den Lasten $P$, unter Voraussetzung $H = 0$, an sich erzeugten Scheitelmomentes $Pa$ betrachten, tragen wir in Abb. 4a das statische Moment der Einzelkraft $P$ in Bezug auf jeden Punkt der Bogenstrecke $EA$ auf, indem wir den Hebelarm $A$ als Belastungshöhe annehmen.

Ziehen wir hier wiederum die Wagerechte $BB_1$ der Bedingung gemäfs:

Rechteck $OBB_1A$ = Momentenfläche $EAC$, so erhalten wir in der Höhe $OB = a$ des Rechteckes den Hebelarm $a$ des Momentes $Pa$.

Nehmen wir nun die Lasthöhe $d - a$ an, beziehen also auch hier wieder die Belastungslinie $OEC$ auf die Wagerechte $BB_1$, so erhalten wir, Abb. 4b, durch Zeichnung des entsprechenden, die notwendige Bedingung $\frac{dz}{ds} = 0$ in $O$ wie in $A$ erfüllenden Seilpolygons die zugehörige $z$-Linie mit dem Inhalt $F_1$, als Zählerwert des von $P$ erzeugten Schubes, und wir haben, als Wirkung einer einzigen Kraft $P$, die erzeugten Scheitelkräfte $H_0$, $M_0$ bestimmt mit den Werten:

$$2H_0 = P\frac{F_1}{F},$$

$$2M_0 = P\left\{a - h\frac{F_1}{F}\right\}.$$

Sei, Abb. 5, die Kräfteverteilung zu ermitteln für die lotrecht wirkenden, durch die Belastungshöhen $p_1$ auf der linken, $p_2$ auf der rechten Seite dargestellten Lasten, so denke man sich, zur Bestimmung der erzeugten Scheitelwerte paarer Ordnung die Belastung ergänzt zur symmetrischen Belastung $p = p_1 + p_2$, welche wir für die rechte Bogenhälfte durch den Belastungszug $C_2B_2$, mit unterer Begrenzung durch den Bogen $OA$, dargestellt haben.

Indem man, Abb. 5a und 5b, diese Belastungskräfte $p$ verbindet durch eine wagerechte Kraft $K$, erhält man in den Seilpolygonhöhen $A$, in Bezug auf die wagerechte $K$-Linie der Abb. 5a, ein Mafs für das statische Moment $Kd$ der, von $C$ ab bis zum betreffenden Bogenpunkte gezählten, Belastung $p$ in Bezug auf diesen Bogenpunkt.

Streckt man, Abb. 5c, wiederum den Bogen, trägt die Höhen $d$ als Momentlasthöhen auf, bestimmt auch hier wiederum die Wagerechte $BB_1$ nach der Bedingung $a \,.\, OA$ = Inhalt $OCA$, bezieht die Momentenlinie $OC$ auf diese Wagerechte $BB_1$, indem man also die

Lasthöhen $q = d - a$ annimmt, und verbindet, Abb. 5d, diese Kräfte $q$ durch ein Seilpolygon, so erhält man auch hier wiederum aus dem Inhalt $OAD = F_2$ der z-Linie den Zählerwert des erzeugten Schubes, und als Wirkung der durch die gegebene Belastungskurve $BCC_1B_1$ der Abb. 5 dargestellten Lasten erhalten wir die Scheitelwerte $H_0$, $M_0$ mit den Werten:

$$2H_0 = K\frac{F_2}{F},$$

$$2M_0 = K\left\{a - h\frac{F_2}{F}\right\}.$$

Um für eine einzige, wandernde, lotrechte Last $P$ die Einflufslinie des Scheitelschubes $H_0$ zu bestimmen, kann man die zur Lage $x$ zugehörige Momentenbelastung stets in einfacher Weise, Abb. 6 und 6a, durch entsprechende Verschiebung der Grundlinie $O_{11}A_{11}$, auf welche die Hebelarme von $P$ zu beziehen sind, erhalten.

In Abb. 6c und 6d führten wir die Bestimmung für den Hauptwert der Scheitellage, $z = 0$, des Näheren aus, wobei also wieder die Werte gelten:

$$2H_0 = P\frac{F_0}{F}; \quad 2M_0 = P\left\{a - h\frac{F_0}{F}\right\},$$

wo $F$, $h$ die ein für allemal festgestellten Werte der Abb. 1b, 1a darstellen.

Bestimmt man $H_0$ für verschiedene Stellungen $x$ der lotrechten Einzelkraft $P$, so erhält man, Abb. 6b, die Einflufslinie $H_0$ für wandernde, lotrechte Einzellast $P$.

Ist das Trägheitsmoment $I$ nicht, wie wir bisher voraussetzten, unveränderlich, sondern vielmehr entweder sprungweise oder auch stetig veränderlich, so hat man überall die Momentenbelastung im Verhältnis $\frac{C}{I}$ zu nehmen, wo $C$ einen bestimmten, unveränderlichen, $I$ aber den jeweiligen Wert des Trägheitsmomentes bedeutet.

Wäre beispielsweise, wie Abb. 7 andeutet, in den Bogenpunkten $D$ ein unstetiger Sprung des Trägheitsmomentes vorhanden, so zwar dafs auf den Kämpferstrecken $DA$ das Trägheitsmoment $I_1$ den fünffachen Wert des Trägheitsmomentes $I_0$ der Scheitelstrecke $DD$ erhielte, so wären die Momentenbelastungen bezüglich der Punkte der Kämpferstrecke nur mit dem fünften Teile in Vergleich zur Scheitelstrecke in Betracht zu ziehen.

Zur Bestimmung des Nennerwertes $F_H$ und des Hebelarmes $h_0$ würden die Abb. 3c und 3d an die Stelle der betreffenden, für unveränderlichen Querschnitt giltigen Abb. 3a und 3b treten.

Sei beispielsweise die Wirkung einer lotrechten Scheitellast, Abb. 7, zu betrachten, so würden die Abb. 6c und 6d durch die entsprechenden Abb. 7a und 7b zu ersetzen sein.

An Stelle der Kurve $OC$ der Abb. 6c würde die gebrochene Linie $OD'D''C'$ treten, Abb. 7a, und die durchlaufende Wagerechte $BB_1$ der Abb. 6a würde durch den gebrochenen, wagerechten Zug $BD - DB_1$ der Abb. 7a zu ersetzen sein, wobei $AB_1 = \frac{OB}{5}$, und Fläche $OBDDB_1A = OD'D''C'A$ ist.

Die durch $P$ erzeugten Kräfte $H_0$, $M_0$ sind auch hier gegeben durch:

$$2H_0 = P\frac{F_v}{F_H},$$

$$2M_0 = P\left(a_v - h_v\frac{F_v}{F_H}\right).$$

Vergleicht man die Ergebnisse, so findet man, daſs bei dem hier angenommenen sprungweisen Wachsen des Trägheitsmomentes $H_0$ gröſser, $M_0$ kleiner ausfällt, als bei unveränderlichem Querschnitt.

Zur vollständigen Klarstellung der Kräfteverteilung würde im allgemeinen noch die Bestimmung der im Scheitel erzeugten dritten Kraft $Q_0$ erforderlich werden.

Um diese zu bestimmen, betrachtet man am einfachsten den antisymmetrischen Belastungsfall, indem man also alle gegebenen Belastungskräfte noch einmal auf der entgegengesetzten Bogenseite in symmetrisch liegenden Linien, aber mit entgegengesetztem, antisymmetrisch gerichtetem Sinn wirken läſst.

Alsdann verschwinden alle Scheitelwerte paarer Ordnung, $H_0$, $M_0$ und insbesondere auch die elastische Scheiteldurchbiegung $z_0$, während die Scheitelwerte unpaarer Ordnung, insbesondere also die Scheitelquerkraft $Q_0$, sich verdoppeln, und man bestimmt den Wert $Q_0$ eben auf Grund der Bedingung des Verschwindens von $z$ im Scheitelpunkt.

Versteht man unter $z_a$ die von $Q_0$ allein, unter $z_P$ aber die von der jeweiligen Belastung $P$, im antisymmetrischen Belastungsfall, allein für sich erzeugte verhältnismäſsige Scheiteldurchbiegung $z$, so ist also die Bedingung zu erfüllen:

$$0 = z_P P + z_Q Q_0 \quad \text{oder} \quad \frac{Q_0}{P} = \frac{z_P}{-z_a} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

und für die gegebene, nicht zur Antisymmetrie ergänzte, einfache Belastung $P$ gilt der halbe Wert dieses für Antisymmetrie giltigen Wertes $Q_0$.

Auch bei diesen Betrachtungen empfiehlt es sich der Einfachheit halber im allgemeinen, die Wirkungen für sich gesondert zu betrachten, die Zähler- und Nennerwerte für sich zu ermitteln.

Wir tragen daher, Abb. 8 und 8a, für den Zustand $Q = -1$ den Hebelarm $p$ der Einzelkraft $Q$, in Bezug auf die Bogenpunkte einer Bogenseite, als Belastungshöhe des geradegestreckten Bogens $O_1 A$ auf, und verbinden, Abb. 8b, diese Belastungskräfte $p$ durch ein Seilpolygon und erhalten, bei Erfüllung der notwendigen Bedingung $\frac{dz}{ds} = 0$ am undrehbaren Kämpfer, die Darstellung der zugehörigen elastischen Durchbiegung $z$ und daher in der Länge $O_{11} C = L$ den, ein für allemal feststehenden, Nennerwert des von irgendwelcher Belastung erzeugten Scheitelschubes $Q_0$.

Um beispielsweise die Scheitelquerkraft für die in Abb. 3 gegebenen Belastungen $p_1$ und $p_2$ zu ermitteln, denken wir uns den Belastungsfall ergänzt zum antisymmetrischen Belastungsfall, indem wir also, Abb. 7, für die eine rechte Bogenhälfte die Belastung $p = p_2 - p_1$ darstellen.

Die für die linke Seite gedacht, genau gleiche, aber aufwärts, entgegengesetzt wirkende Belastung $-p = p_1 - p_2$ braucht überhaupt nicht gezeichnet zu werden.

Indem wir die lotrecht abwärtswirkenden Belastungskräfte $p$ der rechten Bogenseite, Abb. 9c, durch eine wagerechte Kraft $K$ verbinden, erhalten wir durch die Höhen $d$ der Seilpolygonpunkte über der $K$-Linie die inneren Momente $Kd$, welche diese Belastung $p$ für sich allein erzeugt.

Diese Momente $d$ wurden, Abb. 9d, auf der Geraden $O_1 A_1$, als Belastungen des in eine Gerade gestreckten Bogens, aufgetragen und alsdann durch ein Seilpolygon verbunden.

Aus der sich hieraus ergebenden, die notwendige Bedingung $\frac{dz}{ds} = 0$ am Kämpfer erfüllenden Darstellung der zugehörigen elastischen Durchbiegung $z$, ergiebt sich der Scheitelwert $h$ als Zähler des erzeugten Querschubes $Q_0$, so daſs also der durch die gegebenen Belastungen $p_1 p_2$ der Abb. 5 erzeugte Schub $Q_0$, seiner absoluten Gröſse nach, bestimmt ist durch das Verhältnis:

$$\frac{Q_0}{2K} = \frac{h}{L}.$$

---

2.

3

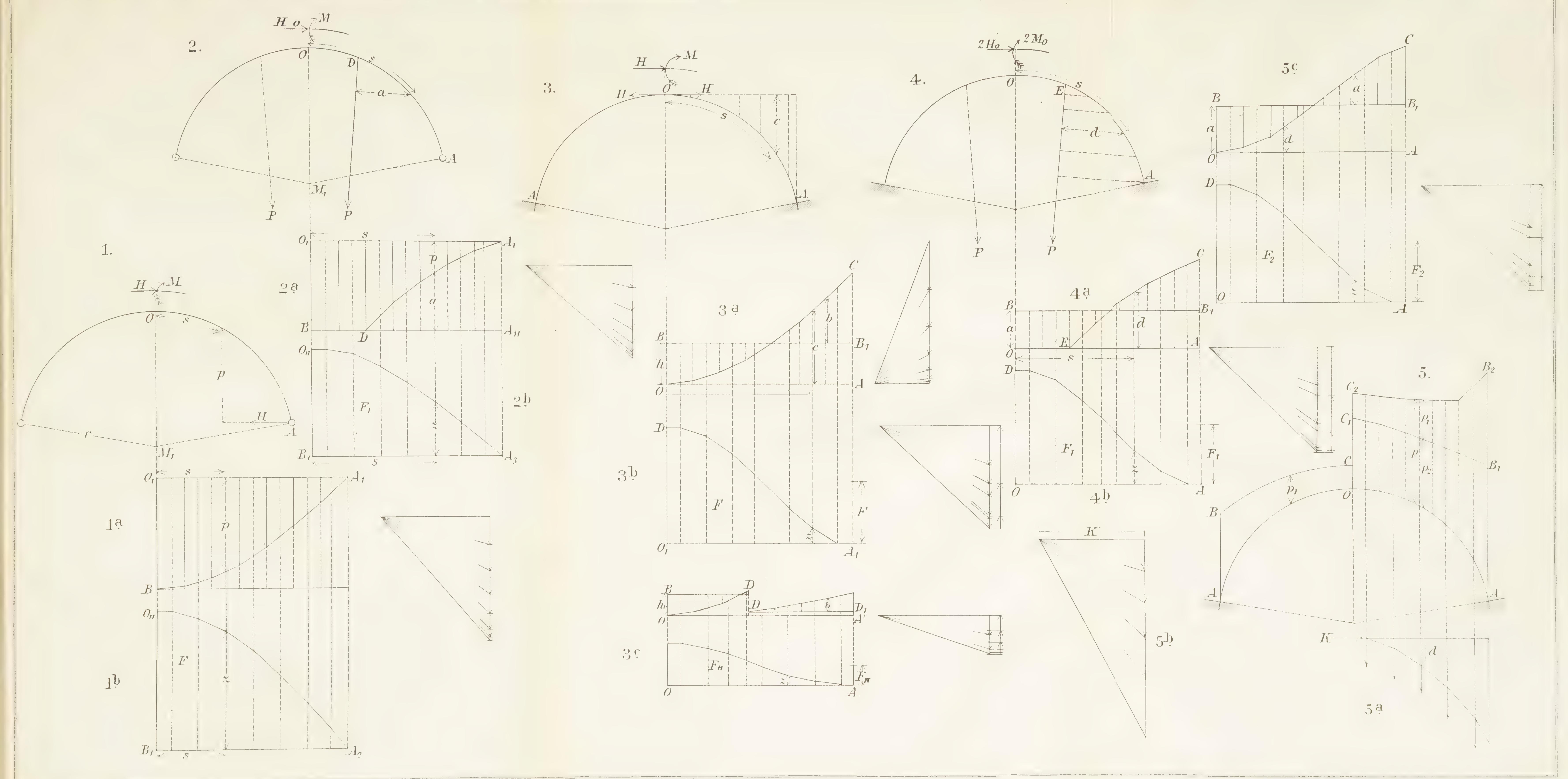
1.

2ª

2ᵇ

1ª

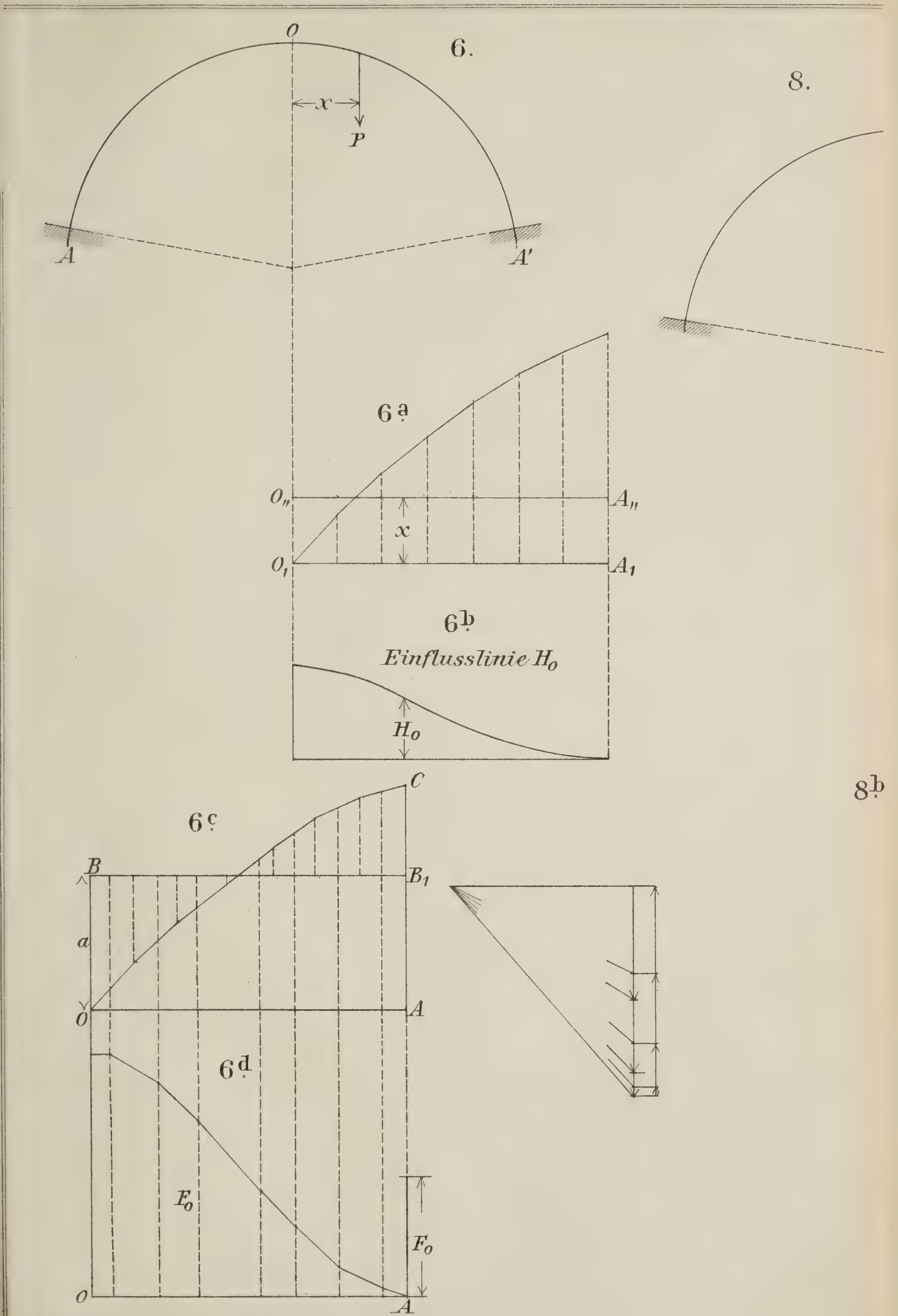
1ᵇ

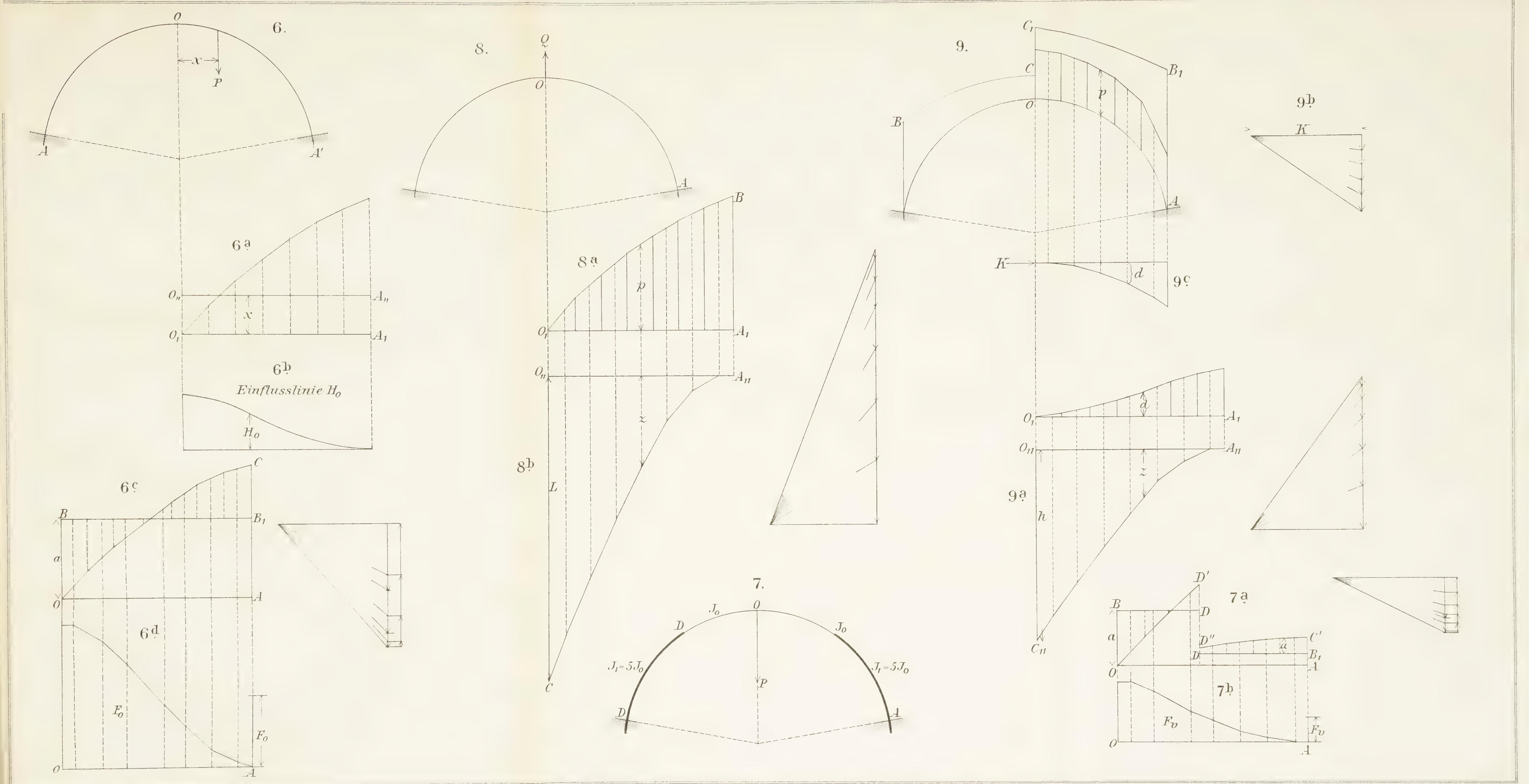




Verlag v. B. G. Teubner in Leipzig.




6.
O
x
P
A
A′
8.
6a
O″
A″
x
O1
A1
6b
Einflusslinie H0
H0
8b
C
6c
B
B1
a
O
A
6d
F0
F0
O
A






Verlag v. B. G. Teubner in Leipzig

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.





# Der Spitzbogenträger mit Scheitelgelenk und sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment.

Von Baurat Adolf Francke in Herzberg a. Harz.

Mit 8 Fig. auf 1 Tafel.

Der, an beiden Kämpfern undrehbar eingemauerte, Bogenträger mit Scheitelgelenk, Abb. 1, ist zweifach statisch unbestimmt, daher zur Bestimmung der von irgend welcher Belastung $P$, $p$, $q$ erzeugten Bogenkräfte eine zweifache Angabe erforderlich ist, und wählen wir als Bestimmungsgröfsen die im Scheitel erzeugte wagerechte Schubkraft $\eta$, sowie die daselbst erzeugte lotrechte Schubkraft $\zeta$.

Wir setzen allgemein den für praktische Fälle meist in Betracht kommenden und jedenfalls wichtigsten Fall einer symmetrischen Ausbildung des Bogenträgers voraus und erhalten unter dieser Annahme den Wert der durch irgend welche Belastung $P$ erzeugten wagerechten Scheitelkraft $\eta$ am einfachsten durch die Betrachtung des symmetrischen Belastungsfalles, in welchem wir uns also alle gegebenen Belastungen $P$ noch einmal symmetrisch auf der entgegengesetzten Bogenseite wirkend denken. Alsdann wird $\zeta = 0$, während die wagerechte Schubkraft sich verdoppelt auf den Wert $2\eta$, welcher auf Grund der allgemeinen Bedingung der Symmetrie, dafs die wagerechte Verschiebung des Scheitelpunktes verschwindet, bestimmt werden kann.

Die Bestimmungsgleichung für $\eta$ nimmt daher stets die Form an:

$$2\eta \cdot h_\eta + P h_P = 0 \quad \text{oder:} \quad \frac{2}{P} = \frac{h_P}{-h_\eta} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

wenn $h_P$ die durch $P$ an und für sich, im Zustande $\eta = 0$, $\zeta = 0$, also am freien einseitig eingemauerten Bogenbalken, veranlafste wagerechte Verschiebung des Kopfes, Scheitels, bedeutet, während der Nenner, $-h_\eta$, die im Zustande $\eta = -1$ veranlafste wagerechte Verschiebung des Kopfes bedeutet, Abb. 1[a].

Es empfiehlt sich, der Übersichtlichkeit und Einfachheit halber, den Wert des Nenners ein für alle Mal festzustellen, den Wert des je zugehörigen Zählers aber ebenfalls für sich, also unter der Voraussetzung $\eta = 0$, festzustellen.

Die zugehörige, durch irgend welche Belastung $P$ erzeugte lotrechte Scheitelkraft $\zeta$ aber bestimmt man am einfachsten durch Betrachtung des antisymmetrischen Belastungsfalles, indem man also die

gegebene Belastung $P$ noch einmal auf der entgegengesetzten Trägerhälfte in symmetrischer Lage aber mit nicht symmetrischem, sondern umgekehrtem Richtungssinn wirken läfst. In diesem Falle der Antisymmetrie verschwindet $\eta$, während $\zeta$ sich verdoppelt und der Wert der erzeugten lotrechten Schubkraft allgemein zu bestimmen ist auf Grund der Bedingung, dafs die lotrechte Verschiebung $v$ des Scheitelpunktes $= 0$ ist.

Man erhält daraus die allgemeine Bestimmungsgleichung für $\zeta$:

$$2\zeta v_\zeta + P v_P = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{2\zeta}{P} = \frac{v_P}{-v_\zeta} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}},$$

wenn $v_P$ die durch $P = 1$, $-v_\zeta$ die durch $\zeta = -1$, Abb. 1[b], veranlafste lotrechte Verschiebung des Scheitelpunktes bedeutet.

Auch hier empfiehlt es sich der Einfachheit halber, die Zähler- und Nennerwerte stets für sich zu berechnen.

Um nun zunächst den allgemeinen Nennerwert des durch irgend welche Belastung erzeugten, wagerechten Schubes $\eta$ ein für allemal festzusetzen, betrachten wir den Bogen, Abb. 1[a], im Belastungszustand $\eta = -1$.

In demselben gilt für die lotrecht zum Bogen, also in Richtung des Halbmessers zu messende elastische Durchbiegung $z$, die Differentialgleichung:

$$\frac{EI}{r^3}\frac{d^2 z}{d\omega^2} = \sin\lambda - \sin\omega.$$

Insbesondere gelten daher für die Strecke I des Trägheitsmomentes $I_1$, also für Winkelwerte $\omega$ von $\omega = \gamma$ bis $\omega = \gamma_1$ die Gleichungen:

$$\frac{EI_1}{r^3}\frac{dz}{d\omega} = \cos\omega - \cos\gamma + (\omega - \gamma)\sin\lambda$$

$$\frac{EI_1}{r^3} z = \sin\omega - \sin\gamma - (\omega - \gamma)\cos\gamma + \frac{(\omega - \gamma)^2 \sin\lambda}{2}$$

$$\frac{EI_1}{r^3} w = \cos\gamma - \cos\omega - (\omega - \gamma)\sin\gamma - \frac{(\omega - \gamma)^2\cos\gamma}{2} + \frac{(\omega - \gamma)^3 \sin\lambda}{6}.$$

Für $\omega = \gamma_1$, dem Punkte der sprungweisen Abnahme des Trägheitsmomentes $I_1$ auf den Wert $I_2$ gelten mithin die Gleichungen:

$$\varphi = \frac{EI_1}{r^3}\frac{dz}{d\omega_{\gamma_1}} = \cos\gamma_1 - \cos\gamma + (\gamma_1 - \gamma)\sin\lambda$$

$$\psi = \frac{EI_1}{r^3} z_{\gamma_1} = \sin\gamma_1 - \sin\gamma - (\gamma_1 - \gamma)\cos\gamma + \frac{(\gamma_1 - \gamma)^2 \sin\lambda}{2}$$

$$\varkappa = \frac{EI_1}{r^3} w_{\gamma_1} = \cos\gamma - \cos\gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma)\sin\gamma - \frac{(\gamma_1 - \gamma)^2\cos\gamma}{3} + \frac{(\gamma_1 - \gamma)^3\sin\lambda}{6}.$$

Wird $i = \frac{I_1 - I_2}{I_1}$ gesetzt, so gelten mithin für die Strecke des Trägheitsmomentes $I_2$, also für Werte $\omega = \gamma_1$ bis $\omega = \lambda$ die Gleichungen:

$$\frac{EI_1}{r^3} w = \cos\gamma - \cos\omega - (\omega - \gamma)\sin\gamma - \frac{(\omega - \gamma)^3 \sin\lambda}{6}$$
$$- i\left\{\frac{\varphi(\omega - \gamma_1)^2}{2} + \psi(\omega - \gamma_1) + \varkappa\right\}$$

$$\frac{EI_1}{r^3} z = \sin\omega - \sin\gamma - (\omega - \gamma)\cos\gamma + \frac{(\omega - \gamma)^2 \sin\lambda}{2}$$
$$- i\{\varphi(\omega - \gamma_1) + \psi\}.$$

Weil nun die wagerechte elastische Bewegung des Scheitelpunktes $h = w \sin\lambda + z\cos\lambda$ ist, so erhält man durch Einsetzung des Wertes $\omega = \lambda$ in die obigen beiden Gleichungen und Bildung des Ausdruckes $\frac{EI_2 h}{r^3 \sin\lambda} = \frac{EI_2}{r^3}\{w + z \operatorname{cotang}\lambda\}$ den allgemeinen Ausdruck des Nennerwertes $N_\eta$ des von irgend welcher Belastung erzeugten wagerechten Scheitelschubes $\eta$ mit dem Werte:

$$N_\eta = (1 - i)G + iG_1$$

wenn $G$ die allgemeine Funktion bedeutet:

$$G = \cos\gamma + \frac{\beta^3}{6}\sin\lambda - \beta\sin\gamma - \frac{\beta^2}{2}(\cos\gamma - \cos\lambda)$$
$$- \operatorname{cotang}\lambda\,(\sin\gamma + \beta\cos\gamma)$$

$$G_1 = \cos\gamma_1 + \frac{\beta_1^3}{6}\sin\lambda - \beta_1\sin\gamma_1 - \frac{\beta_1^2}{2}(\cos\gamma_1 - \cos\lambda)$$
$$- \operatorname{cotang}\lambda\,(\sin\gamma_1 + \beta_1\cos\gamma_1).$$

Sind, Abb. 2, mehrere Sprünge des Trägheitsmomentes vorhanden, ist $i_1 = \frac{I_1 - I_2}{I_1}$, $i_2 = \frac{I_2 - I_3}{I_2}$, so gilt die allgemeine Formel:

$$N_\eta = (1 - i_1)(1 - i_2)G + i_1(1 - i_2)G_1 + i_2 G_2$$

wobei also $G_2$ aus $G$ durch Vertauschung von $\gamma$ mit $\gamma_2$, $\beta$ mit $\beta_2$ hervorgeht.

Wären aber beliebig viele Sprünge $i_1 \cdot\cdot i_n$ vorhanden, so würde die Formel gelten:

$$N_\eta = (1 - i_1)(1 - i_2)\cdot\cdot(1 - i_n)G + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot i_n G_n.$$

Um aber den allgemeinen Nennerwert des im Scheitel erzeugten, lotrechten Schubes vorweg ein für allemal festzustellen, betrachten wir,

Abb. 1[b], eine Bogenlänge im Zustande $\eta = 0$, $\zeta = -1$, wobei die Momentengleichung gilt:

$$\frac{EI}{r^3}\frac{d^2 z}{d\omega^2} = \cos\omega - \cos\lambda \cdot$$

Insbesondere gelten daher für die Strecke des Trägheitsmomentes $I_1$, also für Werte $\omega$ von $\omega = \gamma$ bis $\gamma_1$ die Gleichungen:

$$\frac{EI_1}{r^3}\frac{dz}{d\omega} = \sin\omega - (\omega - \gamma)\cos\lambda - \sin\gamma\,,$$

$$\frac{EI_1}{r^3} z = \cos\gamma - \cos\omega - (\omega-\gamma)\sin\gamma - \frac{(\omega-\gamma)^2\cos\lambda}{2}\,,$$

$$\frac{EI_1}{r^3} w = (\omega-\gamma)\cos\gamma + \sin\gamma - \sin\omega - \frac{(\omega-\gamma)^2\sin\gamma}{2} - \frac{(\omega-\gamma)^3\cos\lambda}{6}\cdot$$

Und indem wir in genau analoger Weise, wie im vorigen Falle, die Gleichungen für die Strecke des Trägheitsmomentes $I_2$ bilden:

$$\frac{EI_2}{r^3} w = (\omega-\gamma)\cos\gamma + \sin\gamma - \sin\omega - \frac{(\omega-\gamma)^2\sin\gamma}{2} - \frac{(\omega-\gamma)^2\cos\lambda}{6}$$
$$- i\left\{\frac{\varphi(\omega-\gamma_1)^2}{2} + \psi(\omega-\gamma_1) + \varkappa\right\},$$

$$\frac{EI_2}{r^3} z = \cos\gamma - \cos\omega - (\omega-\gamma)\sin\gamma - \frac{(\omega-\gamma)^2\cos\lambda}{2}$$
$$- i\{\varphi(\omega-\gamma_1) + \psi\},$$

erhalten wir für $\omega = \lambda$ aus dem Werte:

$$\frac{EI_2}{r^3\sin\lambda}\cdot v = \frac{EI_2}{r^3}\{z - w\,\mathrm{cotang}\,\lambda\}$$

den allgemeinen Ausdruck des Nenners $N_\zeta$:

$$N_\zeta = (1-i)C + iC_1,$$

wenn $C$ die allgemeine Funktion darstellt:

$$C = \cos\gamma - \beta\sin\gamma - \frac{\beta^2}{2}\cos\lambda + \mathrm{cotang}\,\lambda\left\{\frac{\beta^3}{6}\cos\lambda - \sin\gamma\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right) - \beta\cos\gamma\right\}$$

$$C_1 = \cos\gamma_1 - \beta_1\sin\gamma - \frac{\beta_1^2}{2}\cos\lambda$$
$$+ \mathrm{cotang}\,\lambda\left\{\frac{\beta_1^3}{6}\cos\lambda - \sin\gamma_1\left(1-\frac{\beta_1^2}{2}\right) - \beta_1\cos\gamma_1\right\}\cdot$$

Sind, wie z. B. in Abb. 2, mehrere Sprünge $i_1$, $i_2$ des Trägheitsmomentes vorhanden, so gilt der Nennerwert:

$$N_\zeta = (1-i_1)(1-i_2)C + i_1(1-i_2)C_1 + i_2 C_2$$

wobei also $C_2$ aus $C$ durch Vertauschung von $\gamma$ mit $\gamma_2$, $\beta$ mit $\beta_2$ hervorgeht.

Eine lotrechte Einzelkraft $P = 1$ erzeugt den wagerechten Scheitelschub $\eta$ mit dem Werte, Abb. 3:

$$2\eta N_\eta = Z_\eta = (1 - i)B + iB_1,$$

wenn $B$ die allgemeine Funktion darstellt:

$$B = \frac{\cos\beta + \beta\sin\beta - \cos\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) - \alpha\sin\alpha}{\sin\lambda} - \frac{\beta^2\sin\gamma}{2}$$

$$- \cos\delta\left\{\frac{\beta^2\operatorname{cotang}\lambda}{2} + \frac{\beta^3 - \alpha^3}{6}\right\},$$

$$B_1 = \frac{\cos\beta_1 + \beta_1\sin\beta_1 - \cos\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) - \alpha\sin\alpha}{\sin\lambda} - \frac{\beta_1^2\sin\gamma_1}{2}$$

$$- \cos\delta\left\{\frac{\beta_1^2\operatorname{cotang}\lambda}{2} + \frac{\beta_1^3 - \alpha^3}{6}\right\},$$

wobei die Bedingung besteht, dafs $P$ auf der Scheitelstrecke steht, also $\beta_1 > \alpha$ ist.

Ist $\beta_1 < \alpha$, so lautet die Formel:

$$2\eta N_\eta = (1 - i)B \quad \text{oder} \quad 2\eta = \frac{(1 - i)B}{(1 - i)G + iG_1}.$$

Sind, Abb. 4, mehrere Sprünge $i_1$, $i_2$, $i_3$ des Trägheitsmomentes vorhanden, so gilt der Wert:

$$2\eta N_\eta = (1-i_1)(1-i_2)(1-i_3)B + i_1(1-i_2)(1-i_3)B_1 + i_2(1-i_3)B_2 + i_3 B_3,$$

wenn $P$ auf der Scheitelstrecke steht.

Steht $P$ nicht auf der Scheitelstrecke, sondern z. B. auf der Strecke des Trägheitsmomentes $I_2$, so fallen im Zähler die Werte $B_2$, $B_3$ aus, weil $\alpha > \beta_2$ und $\alpha > \beta_3$ ist, so dafs also die Formel gilt:

$$2\eta = \frac{(1 - i_1)(1 - i_2)(1 - i_3)B + i_1(1 - i_2)(1 - i_3)B_1}{(1 - i_1)(1 - i_2)(1 - i_3)G + i_1(1 - i_2)(1 - i_3)G_1 + i_2(1 - i_3)G_2 + i_3 G_3}.$$

Die Formeln werden am einfachsten abgeleitet aus der Betrachtung des, Abb. 3, punktiert angegebenen symmetrischen Belastungsfalles, für welchen die Momentengleichung gilt:

$$\frac{EI}{Pr^3}\frac{d^2z}{d\omega^2} = 2\eta(\sin\omega - \sin\lambda) + \cos\omega - \cos\delta, \quad + \cos\delta - \cos\omega,$$

welche Gleichung für die Strecken bis $\omega = \delta$ bei dem Komma abzubrechen ist, während für die Strecken von $\omega = \delta$ bis $\omega = \lambda$ die Gesamtformel gilt und man hat also, weil der Nenner von $\eta$ bereits für sich festgestellt wurde, lediglich die Wirkung von $P$ an und für sich

zu betrachten, mithin zur Feststellung des Zählers lediglich die Gleichung

$$\frac{EI}{Pr^3}\frac{d^2z}{d\omega^2} = \cos\omega - \cos\delta\,, \quad + \cos\omega - \cos\delta$$

und ihre Integrale zu betrachten und bestimmt also diesen Zähler auf Grund des sich aus denselben ergebenden Wertes von $w_\lambda + z_\lambda \operatorname{cotang} \lambda$.

Zur Berechnung aber des durch eine lotrechte Einzelkraft $P$ erzeugten Scheitelschubes $\zeta P$ mit lotrechter Richtung, betrachtet man, Abb. 5, am zweckmäſsigsten den punktiert angegebenen, antisymmetrischen Zustand, für welchen die Differentialgleichung gilt:

$$\frac{EI}{Pr^3}\frac{d^2z}{d\omega^2} = 2\zeta(\cos\lambda - \cos\omega) + \cos\omega - \cos\delta\,, \quad + \cos\delta - \cos\omega\,,$$

aus deren Integralen, auf Grund der Bedingung, lotrechte Gesamt-Verschiebung des Scheitels $= z_\beta \sin\lambda - w_\beta \cos\lambda = 0$ oder, nach Teilung mit $\sin\lambda$ $z_\lambda - w_\lambda \operatorname{cotang}\lambda = 0$ der Wert folgt:

$$2\zeta N_\zeta = (1 - i)D + i_1 D_1,$$

wenn $D$ die allgemeine Funktion darstellt:

$$D = \frac{\sin\beta - \beta\cos\beta + \alpha\cos\alpha - \sin\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)}{\sin\lambda} - \frac{\beta^2}{2}\cos\delta$$

$$+ \operatorname{cotang}\lambda\left[\frac{\cos\delta\,(\beta^3 - \alpha^3)}{6} + \frac{\beta^2}{2}\sin\gamma\right],$$

$$D_1 = \frac{\sin\beta_1 - \beta_1\cos\beta_1 + \alpha\cos\alpha - \sin\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)}{\sin\lambda} - \frac{\beta_1^2}{2}\cos\delta$$

$$+ \operatorname{cotang}\lambda\left[\frac{\cos\delta\,(\beta_1^3 - \alpha^3)}{6} + \frac{\beta_1^2}{2}\sin\gamma_1\right].$$

Bei Ergänzung der in Abb. 6 dargestellten Belastung einer wagerechten Einzelkraft $S = 1$ zur punktiert angegebenen, symmetrischen Belastung gilt die Momentengleichung:

$$\frac{EI}{r^3}\frac{d^2z}{d\omega^2} = 2\eta(\sin\omega - \sin\lambda) + \sin\delta - \sin\omega\,, \quad + \sin\omega - \sin\delta\,,$$

aus deren Integralen der Ausdruck des von einer einzigen wagerechten Kraft $S = 1$ erzeugten wagerechten Scheitelschubes $\eta$ hergeleitet werden kann mit dem Werte:

$$2\eta N_\eta = (1 - i)F + iF_1,$$

wenn $F$ die allgemeine Funktion darstellt:

$$F = \frac{\sin\beta - \beta\cos\beta + \alpha\cos\alpha + \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right)\sin\alpha}{\sin\lambda} + \frac{(\beta^3 - \alpha^3)}{6}\sin\delta$$
$$+ \frac{\beta^2}{2}\{\operatorname{cotang}\lambda\sin\delta - \cos\gamma\},$$

$$F_1 = \frac{\sin\beta_1 - \beta_1\cos\beta_1 + \alpha\cos\alpha + \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right)\sin\alpha}{\sin\lambda} + \frac{(\beta_1^3 - \alpha_1^3)}{6}\sin\lambda$$
$$+ \frac{\beta_1^2}{2}\{\operatorname{cotang}\lambda\cdot\sin\delta_1 - \cos\gamma_1\}\cdot$$

Ist $\alpha > \beta_1$, greift $S$ auf der Strecke des Trägheitsmoments $I_2$ an, so gilt der Wert:

$$2\eta N_\eta = (1-i)F \quad \text{oder} \quad 2\eta = \frac{(1-i)F}{(1-i)G + iG_1}\cdot$$

Sind, Abb. 7, mehrere Sprünge $i$ des Trägheitsmomentes vorhanden, so gilt der Wert:

$$2\eta N_\eta = (1-i_1)(1-i_2)F + i_1(1-i_2)F_1 + i_2F_2,$$

wobei im Zähler, also auf der rechten Seite, $F_2$ fortzulassen ist, wenn $\alpha > \beta_2$ ist, also $S$ auf der Strecke des Trägheitsmomentes $I_2$ angreift.

Wird, Abb. 8, die wagerechte Einzelbelastung $S = 1$ ergänzt zur antisymmetrischen Belastung, so ist der wagerechte Scheitelschub $\eta = 0$, während der lotrechte Scheitelschub $\zeta$ sich verdoppelt. Demgemäſs gilt die Momentengleichung:

$$\frac{EI}{Sr^3}\frac{d^2z}{d\omega^2} = 2\zeta(\cos\lambda - \cos\omega) + \sin\delta - \sin\omega, \quad + \sin\omega - \sin\delta,$$

aus deren Integralen der durch eine Einzelkraft $S$ erzeugte lotrechte Scheitelschub $\zeta$ abgeleitet werden kann auf Grund der Bedingung $z - w\operatorname{cotang}\lambda = 0$ für $\omega = \lambda$ mit dem Werte:

$$2\zeta N_\zeta = (1-i)K + iK_1,$$

wenn $K$ die allgemeine Funktion darstellt:

$$K = \frac{\beta^2}{2}\sin\delta + \frac{\cos\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + \alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta - \cos\beta}{\sin\lambda}$$
$$- \operatorname{cotang}\lambda\left[\frac{(\beta^3 - \alpha^3)}{6}\sin\delta - \frac{\beta^2}{2}\cos\gamma\right],$$

$$K_1 = \frac{\beta_1^2}{2}\sin\delta + \frac{\cos\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + \alpha\sin\alpha - \beta_1\sin\beta_1 - \cos\beta_1}{\sin\lambda}$$
$$- \operatorname{cotang}\lambda\left[\frac{(\beta_2^3 - \alpha^3)}{6}\sin\delta - \frac{\beta_1^2\cos\gamma_1}{2}\right].$$

Ist $\alpha > \beta_1$, so gilt die Formel:

$$2\zeta N_\zeta = (1 - i_1)K$$

und sind beliebig viele Sprünge des Trägheitsmomentes, Abb. 7, $i_1$, $i_2$ vorhanden, so gilt die allgemeinere Formel:

$$2\zeta N_\zeta = (1 - i_1)(1 - i_2)K + i_1(1 - i_2)K_1 + i_2 K_2$$

mit der Bedingung, dafs im Zähler, also auf der rechten Seite, der Wert $K_2$, $K_1$ fortzulassen wäre, wenn $S$ nicht auf der Mittelstrecke steht, $\alpha > \beta_2$, $\alpha > \beta_1$ ist.

Für positive Werte beziehen sich die hier gegebenen Formeln sämtlich auf den hier gezeichneten Fall des flachen Spitzbogenträgers, bei welchem die Mittelpunkte $MM_1$, unterhalb der Schlufssehne, also unterhalb der durch die Kämpferpunkte gezogenen Wagerechten liegen.

Für $\gamma = 0$ beziehen sich dieselben auf den vollen Spitzbogen, bei welchem die Mittelpunkte $MM_1$, wie beim Halbkreise, auf der durch die Kämpferpunkte gezogenen Wagerechten liegen.

Für negative Werte $\gamma$ aber wird der übervolle Spitzbogenträger betrachtet, bei welchem die Mittelpunkte $MM_1$ oberhalb der durch die Kämpferpunkte gezogenen Wagerechten liegen.

Für $\lambda = 90$ fallen in allen Fällen die Mittelpunkte $MM_1$ zusammen und alle Formeln beziehen sich auf den Kreisbogen mit Mittelgelenk.

---

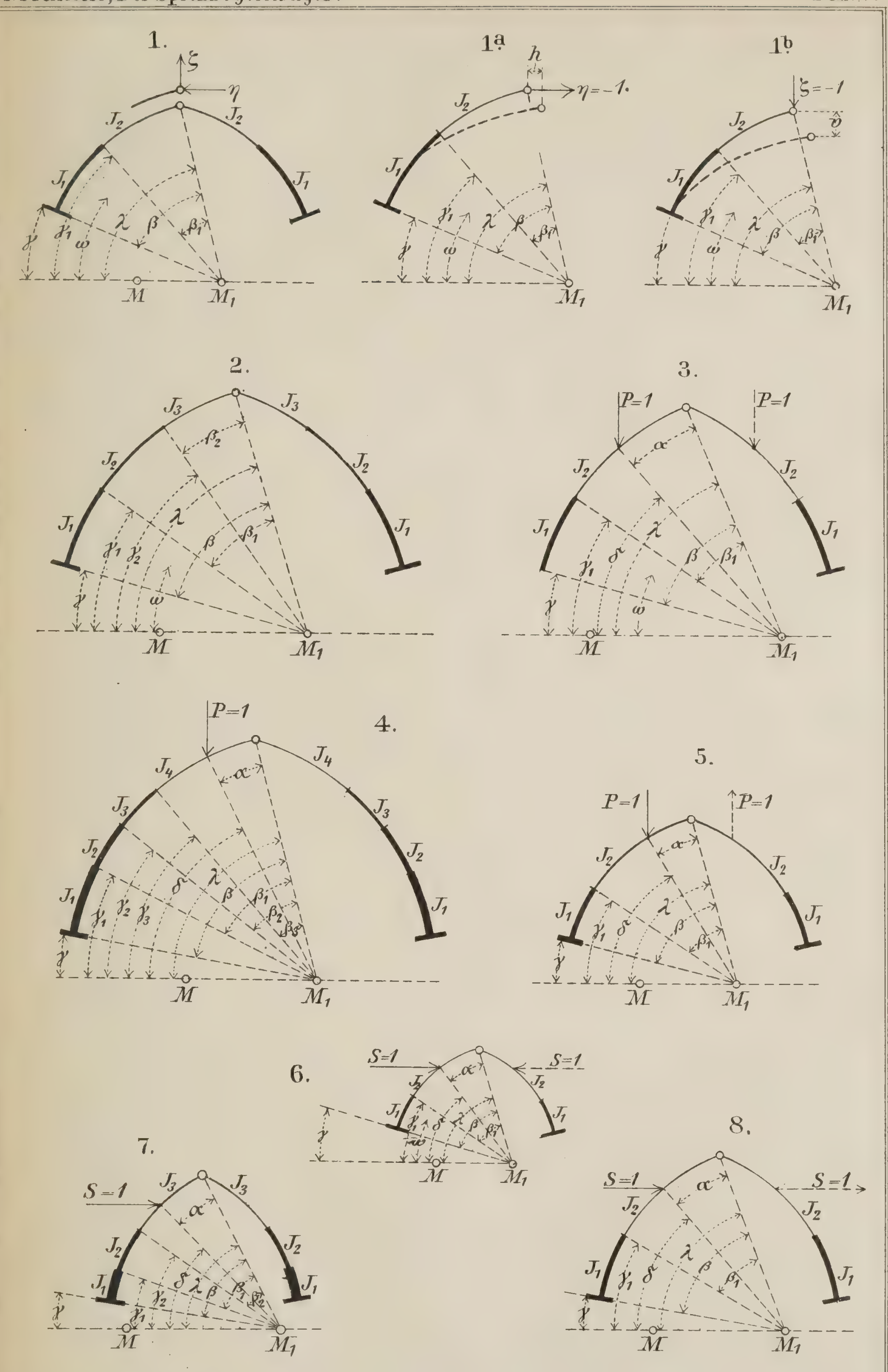
# Zur Theorie der doppelt gestreckten Koppelkurve: Die „Krümmung" der Kurve in den Punkten mit sechspunktig berührender Tangente.

Von R. Müller in Braunschweig.

**1.** In einem früheren Aufsatze[1]) haben wir die Gesamtheit derjenigen Kurbelmechanismen untersucht, bei denen ein bestimmter Punkt $K$ der Koppelebene eine Bahnkurve $\varkappa$ beschreibt, die eine sechspunktig berührende Tangente $g$ besitzt. Im vorliegenden Falle schmiegt sich die Kurve $\varkappa$ der Geraden $g$ so innig an, dafs beide ein endliches Stück mit einander gemein zu haben scheinen, und wir sagen deshalb, der Mechanismus bewirke eine sechspunktige *Geradführung* des Punktes $K$

---

1) Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente. Diese Zeitschrift 46. Bd., S. 330.


1.
1a.
1b.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
M
M1
P=1
S=1
η=-1.
ζ=-1



auf der Geraden $g$. Vom Standpunkte der Praxis betrachtet, wird die erreichte Geradführung für umso vollkommener gelten, je gröfser die Anschlufsstrecke ist, längs welcher $g$ und $\varkappa$ scheinbar zusammenfallen. Um die hier vorliegenden Verhältnisse der mathematischen Behandlung zugänglich zu machen, bedarf es zuvor der Einführung eines Mafses für die jeweilige Gröfse der Anschmiegung der Kurve $\varkappa$ an die Gerade $g$. Wir folgen dabei einem von Herrn Mehmke gemachten Vorschlage, der den Begriff der Krümmung einer ebenen Kurve in zweckmäfsiger Weise verallgemeinert: In einem gewöhnlichen Kurvenpunkte, in welchem die Tangente mit der Kurve zwei unendlich benachbarte Punkte gemein hat, ist der Kontingenzwinkel $d\mu$ von derselben Ordnung unendlich klein, wie das Bogenelement $d\sigma$, also die Krümmung $\frac{d\mu}{d\sigma}$ eine endliche, nicht verschwindende Gröfse. Besitzt dagegen die Kurve an der betrachteten Stelle eine $n$-punktig berührende Tangente, so ist $d\mu$ von derselben Ordnung unendlich klein wie $d\sigma^{n-1}$, also der Quotient $\frac{d\mu}{d\sigma^{n-1}}$ endlich und von Null verschieden. Dieser Ausdruck wird von Herrn Mehmke als *Krümmung $n-1^{ter}$ Ordnung* bezeichnet; er liefert uns das gewünschte Mafs für den Grad der Annäherung der Kurve an die betreffende singuläre Tangente.

Wir machen hiervon im Folgenden eine Anwendung auf denjenigen Sonderfall der sechspunktigen Geradführung, bei welchem der beschreibende Punkt $K$ auf der Koppelgeraden selbst liegt. Dann ist die Kurve $\varkappa$ in Bezug auf das feste Glied des Gelenkvierecks symmetrisch und hat demnach *zwei* sechspunktig berührende Tangenten; wir haben sie deshalb als *doppelt gestreckte Koppelkurve* bezeichnet.

Fig. 1.



**2.** Zuvor beschäftigen wir uns mit einer *Umformung des Ausdrucks für die Krümmung $n-1^{ter}$ Ordnung* für den gegenwärtig vorliegenden Fall, dafs die betrachtete Kurve als Bahn eines Punktes bei der komplanen Bewegung eines starren ebenen Systems erzeugt wird. Angenommen, das System gelange aus der Anfangslage $S$ in die unendlich benachbarten Lagen $S', S'' \ldots$ durch aufeinander folgende Drehungen von der Gröfse $d\vartheta$, $d\vartheta + d^2\vartheta \ldots$ bezw. um die Pole $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q} \ldots$ Sind $K, K' \ldots$ die zugehörigen Lagen eines Systempunktes, der die Bahnkurve $\varkappa$ beschreibt, so bestimmen die Geraden $\mathfrak{P}K$ und $\mathfrak{Q}K'$ den Krümmungsmittelpunkt $\mathsf{K}$ von $\varkappa$ an der Stelle $K$ (Fig. 1). Sei nun $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = ds$, der Kontingenzwinkel der Polbahn bei $\mathfrak{Q} = d\tau$,

$\mathfrak{P}K = \mathfrak{P}K' = r$, $\mathfrak{Q}K' = r + dr$, $\angle \mathfrak{Q}\mathfrak{P}K = \varphi$ und der Winkel, den $\mathfrak{Q}K'$ mit dem folgenden Element der Polbahn bildet, $= \varphi + d\varphi$, ferner $KK' = d\sigma$, $\angle \mathfrak{P}K\mathfrak{Q} = d\mu$ und $\angle \mathfrak{P}K'\mathfrak{Q} = d\nu$; dann ist die Krümmung der Kurve $\varkappa$ im Punkte $K$

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{d\mu}{d\sigma}.$$

Dabei ist

$$(1) \qquad d\sigma = r\,d\vartheta$$

und $d\mu = d\nu - d\vartheta$. Aus dem Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}K'$ folgt aber

$$(2) \qquad d\nu = \frac{ds}{r} \sin\varphi,$$

also wird

$$d\mu = \frac{ds \sin\varphi - r\,d\vartheta}{r}$$

und

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{ds \sin\varphi - r\,d\vartheta}{r^2 d\vartheta}.$$

Bezeichnen wir noch mit $y_1$ den Durchmesser des Wendekreises der Systemlage $S$, so ist bekanntlich

$$(3) \qquad y_1 = \frac{ds}{d\vartheta},$$

mithin ergiebt sich

$$(4) \qquad \mathfrak{K}_1 = \frac{y_1 \sin\varphi - r}{r^2}.$$

Wir wollen jetzt annehmen, der Punkt $K$ liege auf dem Wendekreise, es sei also

$$(5) \qquad r = y_1 \sin\varphi.$$

Dann wird $\mathfrak{K}_1 = 0$, und die Kurve $\varkappa$ hat an der betrachteten Stelle eine Krümmung zweiter Ordnung $\mathfrak{K}_2$, die gleich ist dem Kontingenzwinkel, dividiert durch das Quadrat des Bogenelements $d\sigma$. Da im vorliegenden Fall die Geraden $\mathfrak{P}K$ und $\mathfrak{Q}K'$ parallel sind, so haben wir als Kontingenzwinkel den Winkel $d^2\mu$ einzuführen, den die Gerade $\mathfrak{Q}K'$ mit der darauf folgenden Normale von $\varkappa$ einschließt. Wegen $d\mu = \mathfrak{K}_1 \cdot d\sigma$ wird aber für die Punkte des Wendekreises $d^2\mu = d\mathfrak{K}_1 \cdot d\sigma$, wobei $d\mathfrak{K}_1$ das Inkrement von $\mathfrak{K}_1$ für die unmittelbar folgende Systemlage $S'$ bedeutet. Demnach ist

$$\mathfrak{K}_2 = \frac{d^2\mu}{d\sigma^2} = \frac{d\mathfrak{K}_1}{d\sigma}.$$

Nun folgt aus Gleichung (4) mit Rücksicht auf (5)

$$d\mathfrak{K}_1 = \frac{1}{r^2}\left(dy_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi\, d\varphi - dr\right);$$

es handelt sich also zunächst um die Bestimmung der Werte von $dy_1$, $d\varphi$ und $dr$. Betrachten wir das Element $ds$ der Polbahn — was immer erlaubt ist — als konstant, so finden wir aus (3)

$$dy_1 = -\frac{ds\,d^2\vartheta}{d\vartheta^2}. \tag{6}$$

Ferner ergiebt sich aus dem Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}K'$

$$\varphi + d\varphi + d\tau = \varphi - d\vartheta + d\nu$$

oder nach (2)

$$d\varphi = \frac{ds}{r}\sin\varphi - (d\vartheta + d\tau). \tag{7}$$

Für jeden Punkt des Wendekreises ist aber $ds \sin\varphi = r\,d\vartheta$, und dann geht Gleichung (7) über in

$$d\varphi = -\,d\tau; \tag{8}$$

es wird also

$$y_1 \cos\varphi\, d\varphi = -\frac{ds\,d\tau}{d\vartheta}\cos\varphi.$$

Endlich folgt aus dem Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}K'$

$$r + dr = r\cos d\nu - ds\cos(\varphi + d\varphi + d\tau)$$

d. h.

$$dr = -\,ds\cos\varphi; \tag{9}$$

wir erhalten daher

$$d\mathfrak{K}_1 = \frac{1}{r^2}\left\{-\frac{ds\,d^2\vartheta}{d\vartheta^2}\sin\varphi + \frac{ds\,(d\vartheta - d\tau)}{d\vartheta}\cos\varphi\right\}$$

und nach (1)

$$\mathfrak{K}_2 = \frac{1}{r^3}\left\{-\frac{ds\,d^2\vartheta}{d\vartheta^3}\sin\varphi + \frac{ds\,(d\vartheta - d\tau)}{d\vartheta^2}\cos\varphi\right\}.$$

Die weitere Umgestaltung dieses Ausdrucks knüpft sich an die Einführung gewisser Punkte, die wir bei früherer Gelegenheit als *Wendepole höherer Ordnung* bezeichnet haben.[1]) Unter Wendepol im gewöhnlichen Sinne — Wendepol erster Ordnung — versteht man bekanntlich den Punkt $W_1$ der Systemlage $S$, in welchem der durch $\mathfrak{P}$ gehende Wendekreis die Polbahnnormale zum zweiten Mal schneidet; es ist also $\mathfrak{P}W_1 = y_1$. Jede der $\infty^2$ Systemkurven $a$, deren Hüllbahnkurven gerade Linien sind, berührt die betreffende Gerade augenblicklich in demjenigen Punkte, dessen Normale durch $\mathfrak{P}$ geht, und der

1) Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks. Diese Zeitschrift 42. Bd. Seite 250.

zugehörige Krümmungsmittelpunkt von $a$ ist der Fuſspunkt des von $W_1$ auf die Normale gefällten Lotes. Dieses Lot ist aber die Normale der Evolute $a_1$ von $a$, oder die Tangente der Evolute $a_2$ von $a_1$ — der *zweiten* Evolute von $a$. Ziehen wir in ihrem Berührungspunkte mit $a_2$ wieder die Normale, so schneiden sich für alle Kurven $a$ die so erhaltenen Normalen ihrer zweiten Evoluten in einem bestimmten Punkte $W_2$, dem zweiten Wendepol der Systemlage $S$. Es gehen ferner die entsprechenden Normalen der dritten Evoluten durch einen dritten Wendepol $W_3$ u. s. w. Durch Angabe des Pols $\mathfrak{P}$ und der $n-2$ Wendepole $W_1, W_2 \dots W_{n-2}$ ist die Bewegung des Systems für $n$ unendlich benachbarte Lagen bestimmt. — Bezeichnen wir allgemein mit $x_i$, $y_i$ die rechtwinkligen Koordinaten von $W_i$ für $\mathfrak{P}$ als Anfangspunkt, die Polbahntangente in der Richtung von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}$ als positive $x$-Achse und $\mathfrak{P}W_1$ als positive $y$-Achse, so ist zunächst[1])

$$x_2 = \frac{ds\,d^2\vartheta}{d\vartheta^3} \tag{10}$$

und

$$y_2 = \frac{ds\,(d\vartheta - d\tau)}{d\vartheta^2}; \tag{11}$$

folglich geht die Gleichung für $\mathfrak{K}_2$ über in

$$\mathfrak{K}_2 = \frac{y_2 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi}{r^3}. \tag{12}$$

Hier bedeutet der Zähler die Entfernung des Punktes $W_2$ von $\mathfrak{P}K$, die in demselben Sinne positiv gerechnet wird, wie die Entfernung des Punktes $W_1$ von derselben Geraden.

**3.** Wir setzen weiter voraus, der auf dem Wendekreise liegende Punkt $K$ sei insbesondere der Ballsche Punkt der Systemlage $S$; es bestehe also neben (5) noch die Gleichung

$$y_2 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi = 0. \tag{13}$$

In diesem Falle wird auch $\mathfrak{K}_2 = 0$; die Kurve $\varkappa$ hat in $K$ eine vierpunktig berührende Tangente und eine Krümmung dritter Ordnung

$$\mathfrak{K}_3 = \frac{d\mathfrak{K}_2}{d\sigma} = \frac{d\mathfrak{K}_2}{dy_1} : \frac{d\sigma}{dy_1}.$$

Jetzt ergiebt sich aus (12) unter Berücksichtigung von (13)

$$\frac{d\mathfrak{K}_2}{dy_1} = \frac{1}{r^3}\left\{\frac{dy_2}{dy_1}\cos\varphi - \frac{dx_2}{dy_1}\sin\varphi - (y_2 \sin\varphi + x_2\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dy_1}\right\}.$$

1) Vergl. vorige Note.

Nun folgt aus (8) und (6)

$$\frac{d\varphi}{dy_1} = \frac{d\tau\, d\vartheta^2}{ds\, d^2\vartheta};$$

nach (3) und (11) ist aber

$$y_1 - y_2 = \frac{ds\, d\tau}{d\vartheta^2},$$

also wird nach (10)

$$(14) \qquad \frac{d\varphi}{dy_1} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 x_2}.$$

Auf Grund früherer Darlegungen[1]) ist ferner

$$(15) \qquad \frac{dy_i}{dy_1} = \frac{1}{x_2}\left(x_{i+1} + \frac{y_1 - y_2}{y_1}\, x_i\right)$$

und

$$(16) \qquad \frac{dx_i}{dy_1} = \frac{1}{x_2}\left(y_1 - y_{i+1} - \frac{y_1 - y_2}{y_1}\, y_i\right);$$

wir erhalten demnach für $i = 2$

$$\frac{d\mathfrak{K}_2}{dy_1} = \frac{1}{r^3 x_2}\left\{\left(x_3 + \frac{y_1 - y_2}{y_1}\, x_2\right)\cos\varphi - \left(y_1 - y_3 - \frac{y_1 - y_2}{y_1}\, y_2\right)\sin\varphi - (y_2 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)\frac{y_1 - y_2}{y_1}\right\}$$

$$= \frac{1}{r^3 x_2}\left\{x_3 \cos\varphi + (y_3 - y_1)\sin\varphi\right\}.$$

Schliefslich ist nach (1), (6) und (10)

$$(17) \qquad \frac{d\sigma}{dy_1} = -\frac{r}{x_2},$$

mithin ergiebt sich

$$(18) \qquad \mathfrak{K}_3 = \frac{(y_1 - y_3)\sin\varphi - x_3 \cos\varphi}{r^4}.$$

Dabei wird durch den Zähler die Entfernung des Punktes $W_3$ von der Geraden $K W_1$ dargestellt, gerechnet in der Richtung von $\mathfrak{P}$ nach $K$.

Wir wenden uns nunmehr zu dem singulären Fall, dafs aufser den Gleichungen (5) und (13) noch die Bedingung

$$(19) \qquad (y_1 - y_3)\sin\varphi - x_3 \cos\varphi = 0$$

erfüllt sei. Dann ist $W_1 W_3$ senkrecht auf $\mathfrak{P} W_2$, und der Schnittpunkt $K$ beider Geraden beschreibt momentan eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente, also mit einer Krümmung vierter Ordnung

$$\mathfrak{K}_4 = \frac{d\mathfrak{K}_3}{dy_1} : \frac{d\sigma}{dy_1}.$$

---

1) Desgl. S. 250, Gleichungen (7).

In analoger Weise wie vorhin finden wir aus (18)

$$\frac{d\mathfrak{K}_3}{dy_1}=\frac{1}{r^4}\left\{\left(1-\frac{dy_3}{dy_1}\right)\sin\varphi-\frac{dx_3}{dy_1}\cos\varphi+\left[(y_1-y_3)\cos\varphi+x_3\sin\varphi\right]\frac{d\varphi}{dy_1}\right\}$$

oder nach (14), (15) und (16)

$$\frac{d\mathfrak{K}_3}{dy_1}=\frac{1}{r^4x_2}\cdot$$

$$\left\{\left(x_2-x_4-\frac{y_1-y_2}{y_1}x_3\right)\sin\varphi-\left(y_1-y_4-\frac{y_1-y_2}{y_1}y_3\right)\cos\varphi+\left[(y_1-y_3)\cos\varphi+x_3\sin\varphi\right]\frac{y_1-y_2}{y_1}\right\}$$

$$=\frac{1}{r^4x_2}\left\{(y_4-y_2)\cos\varphi-(x_4-x_2)\sin\varphi\right\}$$

$$=\frac{1}{r^4x_2}(y_4\cos\varphi-x_4\sin\varphi)$$

und folglich

$$\mathfrak{K}_4=-\frac{y_4\cos\varphi-x_4\sin\varphi}{r^5}. \tag{20}$$

Ist auch

$$y_4\cos\varphi-x_4\sin\varphi=0, \tag{21}$$

liegt also der Punkt $W_4$ auf der Geraden $\mathfrak{P}W_2$, so hat die Kurve $\varkappa$ mit der Geraden $W_1K$ an der mit $K$ bezeichneten Stelle sechs unendlich benachbarte Punkte gemein; sie besitzt demnach in $K$ eine Krümmung fünfter Ordnung, für die sich auf ganz demselben Wege wie bisher der Wert ergiebt:

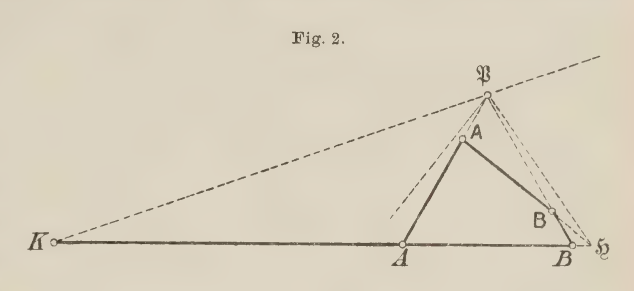
$$\mathfrak{K}_5=-\frac{(y_1-y_5)\sin\varphi-x_5\cos\varphi}{r^6}. \tag{22}$$

Und überhaupt: *Beschreibt in der Systemlage S der Ballsche Punkt K eine Bahnstelle mit n-punktig berührender Tangente ($n>4$), so liegen von den Wendepolen $W_1$, $W_2\ldots W_{n-2}$ die Punkte mit geradem Index auf einer durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden, die Punkte mit ungeradem Index auf einer dazu senkrechten Geraden, die jene in K schneidet, und dann hat die Bahnkurve $\varkappa$ in K eine Krümmung $n-1^{ter}$ Ordnung, deren absoluter Wert gleich ist dem Abstande des Punktes $W_{n-1}$ von der Geraden $KW_{n-3}$, dividiert durch die $n^{te}$ Potenz der Strecke $\mathfrak{P}K$.*

4. *Anwendung auf die doppelt gestreckte Koppelkurve.* Um den zur Erzeugung einer doppelt gestreckten Koppelkurve erforderlichen Kurbelmechanismus zu konstruieren, zeichnen wir über der beliebig gewählten Strecke $AB=c$ das gleichseitige Dreieck $AB\mathfrak{P}$, verbinden $\mathfrak{P}$ mit einem beliebigeu Punkte $\mathfrak{H}$ von $AB$ und tragen in $\mathfrak{H}$ das Dreifache des Winkels $B\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ nach derselben Seite an $\mathfrak{H}\mathfrak{P}$ an; die so erhaltene Gerade schneide $A\mathfrak{P}$ und $B\mathfrak{P}$ bezw. in $\mathsf{A}$ und $\mathsf{B}$ (Fig. 2). Wir fällen

ferner von $\mathfrak{P}$ auf $\mathsf{AB}$ ein Lot, tragen den Winkel, den dieses mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ bildet, in $\mathfrak{P}$ nach der entgegengesetzten Seite an $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ an und bestimmen den Schnittpunkt $K$ der so gefundenen Geraden mit $AB$. Dann wird durch das Viereck $\mathsf{AB}BA$ ein Kurbelmechanismus dargestellt, bei welchem der Punkt $K$ der Koppelgeraden $AB$ augenblicklich eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente durchschreitet.

Fig. 2.




Wir stellen uns nunmehr die Aufgabe, für die Bahnkurve $\varkappa$ des Punktes $K$ nach Gleichung (22) die Krümmung fünfter Ordnung zu berechnen. Dies erfordert zunächst die Ermittelung der Koordinaten $r$, $\varphi$ des Punktes $K$ und der Gröſsen $y_1$, $x_5$, $y_5$ für die betrachtete Lage der Koppelebene.

Die Polbahntangente und die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ bilden bekanntlich bezw. mit $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}B$ nach entgegengesetzten Seiten gleiche Winkel. Setzen wir also $\angle B\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \alpha$, so ist für den Punkt $A$ $\angle\varphi = \alpha$, mithin für $K$ $\angle\varphi = 150^0 - \alpha$ und $r = y_1 \sin\varphi = y_1 \sin(30^0 + \alpha)$. — Zur Bestimmung von $y_1$ benutzen wir Gleichung (4); aus dieser folgt

$$(23) \qquad y_1 = \frac{r^2\mathfrak{K}_1 + r}{\sin\varphi}.$$

Nun kennen wir für den Punkt $A$ die Werte von $r$, $\varphi$ und $\mathfrak{K}_1$, denn es ist $r = c$, $\varphi = \alpha$ und der Krümmungsradius der zugehörigen Bahnkurve

$$A\mathsf{A} = c\,\frac{\sin(60^0 + \alpha)\sin(60^0 - 4\alpha)}{\sin(60^0 - \alpha)\sin(60^0 + 4\alpha)}.$$

Da aber in Fig. 1 der Krümmungsmittelpunkt $\mathsf{K}$ nicht zwischen $\mathfrak{P}$ und $K$, sondern auf der Verlängerung von $\mathfrak{P}K$ liegt, so setzen wir in (23) $\mathfrak{K}_1 = -\frac{1}{A\mathsf{A}}$ und finden somit

$$(24) \qquad y_1 = \frac{c\sin 60^0 \sin 3\alpha}{\sin\alpha \sin(\alpha + 60^0)\sin(4\alpha - 60^0)}.$$

Die Berechnung von $x_5$, $y_5$ stützt sich auf den Umstand, daſs bei der speziellen Bewegung, welche die Koppelebene eines Kurbelmechanismus ausführt, stets zwei Systempunkte — im vorliegenden Falle $A$ und $B$ — vorhanden sind, welche Bahnkurven von konstanter Krümmung erzeugen. Wir beschränken uns darauf, den Gang dieser

etwas langwierigen Rechnung kurz zu skizzieren: Beschreibt in Fig. 1 der Punkt $K$ einen Kreis um K, so verschwinden die sämtlichen Ableitungen der zugehörigen Krümmung $\mathfrak{K}_1$ nach $y_1$. Es ergiebt sich also zunächst für die erste Ableitung des Ausdrucks (4) die Gleichung

$$(25)\qquad r\left(\sin\varphi + y_1\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dy_1} - \frac{dr}{dy_1}\right) - 2\,\frac{dr}{dy_1}\,(y_1\sin\varphi - r) = 0.$$

Nun ist nach (6), (7) und (9)

$$\frac{d\varphi}{dy_1} = -\frac{d\vartheta^2}{d^2\vartheta}\cdot\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{d\vartheta^2\,(d\vartheta + d\tau)}{ds\,d^2\vartheta}$$

und

$$\frac{dr}{dy_1} = \frac{d\vartheta^2}{d^2\vartheta}\cos\varphi,$$

oder nach (3), (10) und (11)

$$\frac{d\varphi}{dy_1} = -\frac{y_1}{r x_2}\sin\varphi + \frac{2y_1 - y_2}{y_1 x_2}$$

und

$$\frac{dr}{dy_1} = \frac{y_1}{x_2}\cos\varphi;$$

daher geht (25) über in

$$(26)\qquad r\,(x_2\sin\varphi - y_2\cos\varphi) = 3y_1\cos\varphi\,(y_1\sin\varphi - r).$$

Um weiter auszudrücken, dafs auch $\frac{d^2\mathfrak{K}_1}{dy_1^2} = 0$ ist, differenzieren wir die eben erhaltene Gleichung wieder nach $y_1$ und ersetzen die Ableitungen von $x_2$ und $y_2$ durch die aus den Formeln (16) und (15) sich ergebenden Werte. Dadurch entsteht eine Gleichung, in der aufser den Gröfsen $r$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ auch noch $x_3$ und $y_3$ in der Verbindung $x_3\cos\varphi + (y_3 - y_1)\sin\varphi$ auftreten. Durch fortgesetzte Differentiation bilden wir ebenso die Gleichungen

$$\frac{d^3\mathfrak{K}_1}{dy_1^3} = 0$$

und

$$\frac{d^4\mathfrak{K}_1}{dy_1^4} = 0;$$

davon enthält die erste ein Glied mit dem Faktor $x_4\sin\varphi - y_4\cos\varphi$, und in der zweiten kommen noch die Koordinaten des fünften Wendepols hinzu in der Verbindung $x_5\cos\varphi + (y_5 - y_1)\sin\varphi$.

Die Polarkoordinaten der Punkte $A$ und $B$ müssen jeder dieser Gleichungen genügen. Setzen wir nun in (26) zuerst $r = c$, $\varphi = \alpha$,

darauf $r = c$, $\varphi = \alpha + 60^0$, so erhalten wir zwei Gleichungen, aus denen wir $x_2$ und $y_2$ berechnen können. Ebenso liefert

$$\frac{d^2 \mathfrak{K}_1}{d y_1^2} = 0$$

zwei Gleichungen mit den Unbekannten $x_3$ und $y_3$ u. s. f., und wir gelangen somit schliefslich zu den gesuchten Werten von $x_5$ und $y_5$.

Wir erhalten nunmehr die Krümmung der Kurve $\varkappa$ im Punkte $K$, indem wir die gefundenen Werte in Gleichung (22) einsetzen. Ohne uns bei Zwischenrechnungen aufzuhalten, beschränken wir uns auf die Mitteilung des Resultates; es ergiebt sich

$$(27) \qquad \mathfrak{K}_5 = - \frac{80 \cos\alpha \cos 2\alpha \sin(30^0 - \alpha) \sin(30^0 + 2\alpha) \sin(30^0 - 2\alpha)}{c^5 \sqrt{3} \sin^4(30^0 + \alpha)}.$$

Bezeichnen wir noch mit $\lambda$ den Winkel, den $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ mit dem von $\mathfrak{P}$ auf $AB$ gefällten Lote einschliefst, so wird $\alpha = \lambda - 30^0$; setzen wir also zur Abkürzung

$$(28) \quad L = \sin\lambda \sin(\lambda + 15^0) \sin(\lambda - 15^0) \sin(\lambda + 45^0) \sin(\lambda - 45^0)$$
$$\sin(\lambda + 60^0) \sin(\lambda - 60^0) \sin(\lambda + 75^0) \sin(\lambda - 75^0),$$

so folgt

$$(29) \qquad \mathfrak{K}_5 = \frac{640}{\sqrt{3}\, c^5 \sin^5\lambda} \cdot L.$$

**5.** Lassen wir bei unbeschränkt veränderlichem $c$ den Winkel $\lambda$ alle Werte zwischen $0^0$ und $90^0$ durchlaufen, so liefert die in Fig. 2 ausgeführte Konstruktion die Gesamtheit aller Kurbelmechanismen, welche doppelt gestreckte Koppelkurven $\varkappa$ erzeugen, und zwar jeden möglichen Mechanismus einmal, während jede der $\infty^2$ Kurven $\varkappa$ dreimal erhalten wird. Wir haben nämlich bei früherer Gelegenheit[1]) gezeigt, dafs die Kurven $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, die bei beliebig gewählten Koppelstrecken zu den Winkeln $\alpha$, $\alpha' = \alpha - 60^0$ und $\alpha'' = 60^0 - \alpha$ gehören, einander ähnlich sind. Setzen wir aber in dem mit $L$ bezeichneten Ausdruck (28) an Stelle von $\lambda$ die Werte $\lambda' = \alpha' + 30^0 = \lambda - 60^0$ und $\lambda'' = \alpha'' + 30^0 = 120^0 - \lambda$, so bleibt sein absoluter Wert ungeändert. Dasselbe gilt also nach Gleichung (29) auch von der Krümmung $\mathfrak{K}_5$, wenn wir über die Längen $c$, $c'$, $c''$ der zugehörigen Koppelstrecken passend verfügen; bedeutet nämlich $e$ eine beliebig angenommene Strecke, so haben wir zu setzen $c = \frac{e}{\sin\lambda}$, $c' = \frac{e}{\sin\lambda'}$,

1) Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente a. a. O. S. 334.

$c'' = \frac{e}{\sin \lambda''}$. In diesem Falle sind also die Kurven $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ nicht nur einander ähnlich, sondern kongruent.

Um nun die vorliegenden Mechanismen hinsichtlich der Vollkommenheit der jeweilig erreichten Geradführung vergleichen zu können, wollen wir zunächst aus den $\infty^2$ Kurven $\varkappa$ eine einfach unendliche Schar herausgreifen, die zwei Bedingungen genügen möge: Es sollen nämlich keine zwei Kurven der Schar einander ähnlich sein, und es soll zu jeder der Schar nicht angehörenden Kurve $\varkappa$ eine dazu ähnliche Kurve der Schar existieren. Nach dem Vorhergehenden wird dies nicht erreicht, wenn wir für einen bestimmten Wert von $c$ den Winkel $\lambda$ alle möglichen Werte annehmen lassen; wir müssen vielmehr jedem Wert von $\lambda$ als Koppelstrecke die Länge $c = \frac{e}{\sin \lambda}$ zuordnen, wobei $e$ eine beliebig aber fest gewählte Strecke bezeichnet. Da nunmehr zu den Winkeln $\lambda$, $\lambda' = \lambda - 60^0$ und $\lambda'' = 120^0 - \lambda$ drei Kurbelmechanismen gehören, welche dieselbe Kurve $\varkappa$ erzeugen, so erhalten wir bereits die sämtlichen Kurven der Schar, wenn wir den Winkel $\lambda$ nur ein Drittel des angegebenen Intervalls, etwa alle Werte zwischen $60^0$ und $90^0$ durchlaufen lassen.

Die Formel (29) für die Krümmung fünfter Ordnung verwandelt sich gegenwärtig in

$$\mathfrak{K}_5 = \frac{640}{\sqrt{3}\, e^5} \cdot L.$$

Da die Strecke $e$ für alle Kurven der Schar konstant bleibt, so ist $\mathfrak{K}_5$ dem Ausdruck $L$ proportional und die betreffende Geradführung also umso vollkommener, je kleiner der absolute Wert von $L$ wird. In dem betrachteten Intervall verschwindet nun $L$ für $\lambda = 60^0$ und $\lambda = 75^0$. In beiden Fällen artet aber der zugehörige Kurbelmechanismus in einen Schubkurbelmechanismus aus, und der mit $K$ bezeichnete Punkt beschreibt überhaupt nicht mehr eine krumme Linie, sondern bewegt sich genau in einer Geraden.[1]) Wir können hieraus schliefsen, dafs bei einer eigentlichen sechspunktigen Geradführung die Krümmung $\mathfrak{K}_5$ der Kurve $\varkappa$ einen besonders kleinen Wert annehmen wird, wenn sich der Winkel $\lambda$ von $60^0$ oder von $75^0$ nur wenig unterscheidet. — Um ferner die Werte von $\lambda$ zu bestimmen, für welche der absolute Wert von $L$ ein Maximum erreicht, bringen wir den Ausdruck (28) auf die Form

$$L = \frac{1}{128} (128 \sin^9 \lambda - 288 \sin^7 \lambda + 216 \sin^5 \lambda - 58 \sin^3 \lambda + 3 \sin \lambda)$$

---

1) Desgl. S. 337 Fig. 3 und 5.

und bilden

$$\frac{dL}{d\lambda} = 0.$$

Dann ergiebt sich

$$\cos\lambda \{ 3 (2 \sin\lambda)^8 - 21 (2 \sin\lambda)^6 + 45 (2 \sin\lambda)^4 - 29 (2 \sin\lambda)^2 + 2 \} = 0$$

oder

$$\cos\lambda \{ (2 \sin\lambda)^2 - 1 \} \{ 3 (2 \sin\lambda)^6 - 18 (2 \sin\lambda)^4 + 27 (2 \sin\lambda)^2 - 2 \} = 0.$$

Hier verschwindet der erste Faktor für $\lambda = 90^0$; dies entspricht dem zuerst von Tschebischeff behandelten Mechanismus, bei welchem $\mathsf{A}A = \mathsf{B}B$ ist, die Seiten $AB$, $\mathsf{AB}$ und $\mathsf{A}A$ sich verhalten wie $1:3:4$ und der Punkt $K$ in der Mitte von $AB$ liegt.[1]) Der letzten Gleichung wird ferner genügt, wenn $(2 \sin\lambda)^2 - 1 = 0$, d. h. $\lambda = \pm 30^0$ ist. Dieser Fall ist aber von dem eben betrachteten nicht wesentlich verschieden; er liefert genau dieselbe Kurve $\varkappa$, die gegenwärtig nur durch einen anderen Kurbelmechanismus erzeugt wird. Setzen wir endlich den dritten Faktor gleich Null, so finden wir für $\lambda$ — angenähert — die Werte $\pm 68^0 2'$, $\pm 8^0 2'$, $\pm 51^0 58'$, die wiederum ein und dieselbe Kurve $\varkappa$ definieren. Die Krümmung erreicht also im betrachteten Intervall zweimal ein Maximum, nämlich für $\lambda = 68^0 2'$ und für $\lambda = 90^0$. Um von den Veränderungen der Krümmung $\mathfrak{K}_5$ bei variablem $\lambda$ ein Bild zu geben, sind in der folgenden Tabelle zu einer Reihe von Werten des Winkels $\lambda$ die zugehörigen Werte von $L$ bis auf fünf Dezimalstellen berechnet worden:

| $\lambda$ | $60^0$ | $65^0$ | $68^0 2'$ | $70^0$ | $75^0$ | $82\frac{1}{2}^0$ | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | 0 | $-0{,}00175$ | $-0{,}00213$ | $-0{,}00195$ | 0 | $0{,}00510$ | $\frac{1}{128} = 0{,}00781$ |

*Der Annahme $\lambda = 90^0$ entspricht demnach der bei weitem ungünstigste Fall der sechspunktigen Geradführung durch eine doppelt gestreckte Koppelkurve.*

Braunschweig, 31. Dezember 1901.

---

1) Desgl. Fig. 7.

# Zur Lehre von der Momentanbewegung eines starren ebenen Systems: Eine Eigenschaft der Burmesterschen Punkte.

Von R. Müller in Braunschweig.

In jeder Lage eines komplan bewegten starren ebenen Systems giebt es bekanntlich vier Punkte, welche augenblicklich Bahnstellen mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreis durchschreiten; wir haben sie früher als die Burmesterschen Punkte der betreffenden Systemlage bezeichnet.[1] Im Folgenden beschäftigen wir uns insbesondere mit solchen Systemlagen, bei denen jedem dieser Punkte ein *sechs*punktig berührender Krümmungskreis zukommt.

Der momentane Bewegungszustand des Systems sei für sechs unendlich benachbarte Lagen definiert durch Angabe des Pols $\mathfrak{P}$ und der Rückkehrpole $\Psi_1$, $\Psi_2$, $\Psi_3$, $\Psi_4$.[2] Wir bezeichnen mit $\xi_i$ und $\eta_i$ die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes $\Psi_i$ für $\mathfrak{P}$ als Anfangspunkt und die Polbahntangente als $\xi$-Achse; dabei ist also $\xi_1 = 0$, weil die Polbahnnormale durch $\Psi_1$ geht. Hinsichtlich der Vorzeichen wollen wir festsetzen, daſs die negative $\eta$-Achse den Punkt $\Psi_1$ enthalten und durch eine Drehung um $90^0$ entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers mit der positiven $\xi$-Achse zusammenfallen möge. Ist $A$ die augenblickliche Lage eines Systempunkts, $r$ seine Entfernung von $\mathfrak{P}$ und $\varphi$ der Winkel, den die Gerade $\mathfrak{P}A$ mit der positiven $\xi$-Achse bildet, so hat die Bahnkurve dieses Punktes an der mit $A$ bezeichneten Stelle einen vierpunktig berührenden Krümmungskreis, wenn $r$ und $\varphi$ der Gleichung der Kreispunktkurve genügen[3])

$$(1) \qquad r(\eta_2 \cos\varphi - \xi_2 \sin\varphi) + 3\eta_1^2 \cos\varphi \sin\varphi = 0 .$$

Im Falle fünfpunktiger Berührung muſs überdies

$$(2) \qquad r^2[\xi_3 \cos\varphi + (\eta_3 - \eta_1)\sin\varphi]$$
$$+ r\eta_1[3\eta_1^2 \cos^2\varphi + 4\xi_2 \cos\varphi \sin\varphi + (4\eta_2 - 3\eta_1)\sin^2\varphi] + 3\eta_1^3 \sin\varphi = 0$$

sein, und soll der Krümmungskreis sogar sechs unendlich benachbarte

---

1) Über die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen, diese Zeitschrift 37. Bd. S. 129.

2) Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks. Daselbst 42. Bd. S. 247.

3) Ebenda S. 255.

Punkte mit der Bahnkurve gemein haben, so tritt zu diesen Gleichungen noch die neue Bedingung

$$(3)\qquad r^2(\xi_4 \sin\varphi - \eta_4 \cos\varphi)$$
$$+ r\eta_1[(2\xi_3 + 10\xi_2)\cos^2\varphi - (3\eta_3 - 16\eta_2 + 12\eta_1)\cos\varphi\sin\varphi + (5\xi_3 - 6\xi_2)\sin^2\varphi]$$
$$+\eta_1^2[(-2\eta_2 + 6\eta_1)\cos^3\varphi + 20\xi_2\cos^2\varphi\sin\varphi + (6\eta_2 + 12\eta_1)\cos\varphi\sin^2\varphi + 12\xi_2\sin^3\varphi] = 0.$$

Aus (1) und (2) ergiebt sich durch Elimination von $r$ zur Bestimmung der Burmesterschen Punkte $M_I$, $M_{II}$, $M_{III}$, $M_{IV}$ die Gleichung

$$(4)\quad \xi_2^2\tan^4\varphi + \xi_2(2\eta_2 - 3\eta_1)\tan^3\varphi + (5\xi_2^2 - 3\eta_1^2 + 3\eta_1\eta_2 + 3\eta_1\eta_3 - 3\eta_2^2)\tan^2\varphi$$
$$+ 3(\eta_1\xi_2 + \eta_1\xi_3 - 2\eta_2\xi_2)\tan\varphi + \eta_2(\eta_2 - 3\eta_1) = 0.$$

Ebenso folgt aus (1) und (3)

$$(5)\qquad 12\xi_2^3\tan^5\varphi + 3\xi_2(5\eta_1\xi_3 - 2\eta_1\xi_2 - 6\eta_2\xi_2)\tan^4\varphi$$
$$+ (9\eta_1^2\xi_4 - 15\eta_1\eta_2\xi_3 - 9\eta_1\eta_3\xi_2 + 42\eta_1\eta_2\xi_2 - 36\eta_1^2\xi_2 + 20\xi_2^3)\tan^3\varphi$$
$$+ 3(-3\eta_1^2\eta_4 + 3\eta_1\eta_2\eta_3 - 12\eta_1\eta_2^2 + 12\eta_1^2\eta_2 + 2\eta_2^3 + 2\eta_1\xi_2\xi_3 + 12\eta_1\xi_2^2 - 14\eta_2\xi_2^2)\tan^2\varphi$$
$$+ 6\eta_2(4\eta_2\xi_2 - \eta_1\xi_3 - 7\eta_1\xi_2)\tan\varphi - 2\eta_2^2(\eta_2 - 3\eta_1) = 0.$$

Aus (4) und (5) erhalten wir durch Elimination von $\tan\varphi$ die Bedingung, welcher die Gröſsen $\eta_1, \xi_2, \eta_2 \ldots \eta_4$ genügen müssen, wenn in der betrachteten Systemlage *einem* der vier Punkte $M_i$ ein sechspunktig berührender Krümmungskreis entspricht. Soll dies bei *zweien* der Punkte $M_i$ der Fall sein, so gelangen wir zu *zwei* Bedingungen, indem wir ausdrücken, daſs die Gleichungen (4) und (5) zwei gemeinsame Wurzeln besitzen müssen, u. s. w. Wird endlich gefordert, daſs *jeder* der vier Punkte $M_i$ augenblicklich eine Bahnstelle mit sechspunktig berührendem Krümmungskreise durchlaufen soll, so muſs jede Wurzel von (4) auch der Gleichung (5) genügen, diese muſs also übergehen in

$$[\xi_2^2\tan^4\varphi + \xi_2(2\eta_2 - 3\eta_1)\tan^3\varphi + \cdots + \eta_2(\eta_2 - 3\eta_1)](12\xi_2\tan\varphi - 2\eta_2) = 0.$$

Nach Ausführung der Multiplikation ergeben sich hieraus durch Vergleichung mit (5) die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}
&(6)\qquad 3\eta_1\xi_3 = 2\xi_2(4\eta_2 - 3\eta_1)\\
&(7)\qquad 9\eta_1^2\xi_4 = 5\xi_2(8\xi_2^2 - 6\eta_1\eta_2 + 9\eta_1\eta_3)\\
&(8)\qquad 9\eta_1^2\eta_4 = 5(6\eta_1^2\eta_2 - 6\eta_1\eta_2^2 + 3\eta_1\eta_2\eta_3 + 12\eta_1\xi_2^2 - 8\eta_2\xi_2^2).
\end{aligned}\right\}$$

Genau soviel und folglich dieselben Bedingungen würden wir aber erhalten haben, wenn wir nur verlangt hätten, daſs *drei* der vier Punkte

$M_i$ die erwähnte Eigenschaft besitzen sollten. Wir dürfen daher schliefsen: *Wenn in einer Systemlage drei der Burmesterschen Punkte sechspunktig berührende Krümmungskreise haben, so gilt dasselbe notwendig auch vom vierten dieser Punkte.*

Denken wir uns an Stelle der Rückkehrpole $\Psi_1 \dots \Psi_4$ die Wendepole $W_1 \dots W_4$ gegeben, ersetzen also die $\xi_i$, $\eta_i$ durch die Koordinaten $x_i$, $y_i$ mittels der Formeln[1])

$$\begin{array}{llll} \eta_1 = -y_1 & \eta_2 = -3y_1 + y_2 & \eta_3 = -6y_1 + 4y_2 - y_3 & \eta_4 = -10y_1 + 10y_2 - 5y_3 + y_4 \\ & \xi_2 = \quad x_2 & \xi_3 = \quad 4x_2 - \ x_3 & \xi_4 = \quad 10x_2 - \ 5x_3 + \ x_4, \end{array}$$

so bleiben die Gleichungen (6) bis (8), wie auch (4), ihrer Form nach völlig ungeändert. Es ist dies selbstverständlich, denn wenn z. B. der Punkt $M_I$ in sechs aufeinander folgenden Systemlagen auf einem Kreise bleibt, dessen Mittelpunkt wir mit $\mathsf{M}_I$ bezeichnen wollen, so befinden sich bei der umgekehrten Bewegung, die bekanntlich die ursprünglichen Wendepole zu Rückkehrpolen hat, sechs Lagen des Punktes $\mathsf{M}_I$ auf einem Kreise um $M_I$.

Die vier Punkte $M_I \dots M_{IV}$ liegen auf einem Kegelschnitt, der in $\mathfrak{P}$ die Gerade $\mathfrak{P}W$ berührt.[2]) Ist Gleichung (6) erfüllt, so bilden die Achsen dieses Kegelschnitts, wie wir nur beiläufig erwähnen wollen, mit der Poltangente Winkel von 45°.

*Anwendung auf das Gelenkviereck.*[3]) Bei der speziellen Bewegung, welche die Koppelebene eines Gelenkvierecks ausführt, fallen beständig zwei der Burmesterschen Punkte mit den Endpunkten der Koppelstrecke zusammen. Beschreibt also in einer bestimmten Koppellage einer der beiden andern Punkte $M_i$ ausnahmsweise eine Bahnstelle mit sechspunktig berührendem Krümmungskreis, so gilt dies auch vom letzten dieser Punkte. Derartige Koppellagen sind demnach blofs *einer* Bedingung unterworfen, d. h. die Bedingungsgleichungen (7) und (8) sind im vorliegenden Falle ohne weiteres erfüllt, sobald Gleichung (6) besteht, die wir jetzt in der auf die Wendepole bezüglichen Form schreiben wollen:

$$(10) \qquad 3y_1x_3 = 2x_2(4y_2 - 3y_1).$$

Die Gröfsen $y_1$, $x_2$, $y_2$, $x_3$ sind für die gegenwärtig behandelte Bewegung bei früherer Gelegenheit berechnet worden.[4]) Verstehen wir

1) Ebenda S. 251.

2) Über die Bewegung u. s. w. a. a. O. S. 147.

3) Vergl. Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, diese Zeitschrift 37. Bd. S. 213.

4) Beiträge u. s. w. a. a. O. S. 259.

nämlich unter $\mathsf{AB}BA$ ein Gelenkviereck mit dem festen Glied $\mathsf{AB}$ und bezeichnen für eine bestimmte Koppellage mit $\mathfrak{P}$ den Pol, d. h. den Schnittpunkt der Geraden $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$, mit $\mathfrak{H}$ den Schnittpunkt von $\mathsf{AB}$ und $AB$, endlich mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Kotangenten der Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, welche bez. die Glieder $\mathsf{B}B$, $\mathsf{A}A$, $AB$, $\mathsf{AB}$ mit der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ bilden, so ist

$$x_2 = 3y_1 \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c} - \mathfrak{d}}, \quad y_2 = -3y_1 \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{c} - \mathfrak{d}},$$

$$x_3 = \frac{3y_1}{(\mathfrak{c} - \mathfrak{d})^2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c} - \mathfrak{d} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} - 5\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d} - \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}).$$

(Den Wert von $y_1$ haben wir nicht angegeben, da dieser im Folgenden nicht weiter in Betracht kommt.) Gleichung (10) geht nunmehr über in

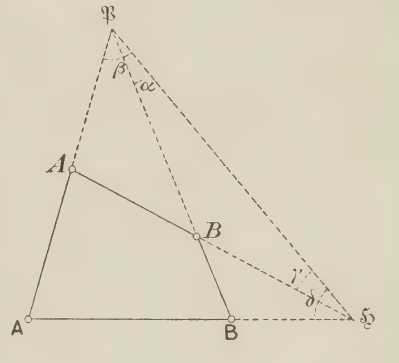
$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{c}\mathfrak{d} - 1) - (\mathfrak{c} + \mathfrak{d})(\mathfrak{a}\mathfrak{b} - 1) = 0$$

oder

$$\cot(\alpha + \beta) - \cot(\gamma + \delta) = 0$$

d. h.

$$(11) \qquad \alpha + \beta = \gamma + \delta.[1]$$




Da wir offenbar zu ganz derselben Gleichung gelangt wären, wenn wir $\mathsf{AB}$ als beweglich und irgend ein anderes Glied als fest angesehen hätten, so folgt der Satz: *Bringt man die Glieder eines Gelenkvierecks in eine Lage, die der Gleichung* (11) *genügt, so beschreibt bei der Momentanbewegung, die irgend eines der vier Glieder in Bezug auf das gegenüberliegende ausführt, jeder der Burmesterschen Punkte eine Bahnstelle mit sechspunktig berührendem Krümmungskreis.*

Gleichung (11) ist naturgemäſs auch erfüllt, wenn einer der Burmesterschen Punkte eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente durchläuft. Diese Bemerkung gestattet bei dem früher von uns behandelten Problem der sechspunktigen Geradführung eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung.[2])

Braunschweig, 18. Januar 1902.

---

1) Oder $\alpha + \beta = \gamma + \delta + 180^0$, was aber auf dasselbe hinauskommt.

2) Beiträge u. s. w. a. a. O. S. 260.

# Über einige Kurven, die mit der Theorie des ebenen Gelenkvierecks im Zusammenhang stehen.

Von R. Müller in Braunschweig.

Die nachfolgenden Mitteilungen bilden im wesentlichen eine verkürzte Wiedergabe eines Aufsatzes in der *Festschrift zur Feier des siebzigsten Geburtstages von Richard Dedekind* (Braunschweig 1901). Einzelne Partien sind unverändert abgedruckt, und nur der zweite Abschnitt ist durch Zusätze vermehrt worden.

**1.** Bei der Untersuchung der Formänderungen, die bei einem vorgelegten Kurbelmechanismus hinsichtlich der Gestalt der Koppelkurve eintreten, wenn man den beschreibenden Punkt in der Koppelebene beliebig verlegt, erlangen drei bestimmte Kurven dieser Ebene eine ausschlaggebende Bedeutung, nämlich die *Polkurve* $p$, die *Übergangskurve* $q$ — d. i. der Ort der Systempunkte, welche Koppelkurven mit einem Selbstberührungspunkte erzeugen — und der *Ort* $u$ *der Ballschen Punkte*, also derjenigen Systempunkte, deren Bahnen einen Flachpunkt (Undulationspunkt) besitzen. Denn jede Koppelkurve hat im allgemeinen drei endliche Doppelpunkte; davon geht jedesmal einer in eine Spitze über, falls der beschreibende Punkt auf $p$ liegt, und an Stelle dieser Spitze tritt ein isolierter oder ein Knotenpunkt, wenn der Systempunkt in der nächsten Umgebung des vorigen, aber aufserhalb $p$ auf der einen oder der entgegengesetzten Seite von $p$ gewählt wird. In analoger Weise teilt die Kurve $q$ die Koppelebene in zwei Gebiete, so dafs den Punkten des einen Koppelkurven mit drei reellen Doppelpunkten, denen des anderen solche mit einem reellen und zwei konjugiert imaginären Doppelpunkten zukommen.[1]) Nimmt man endlich in der Nähe von $u$, aber auf entgegengesetzten Seiten dieser Kurve, zwei Systempunkte an, so unterscheiden sich ihre Bahnkurven dadurch von einander, dafs die eine zwei (reelle) Inflexionspunkte mehr besitzt als die andere.[2]) Durch die Kurven $p$, $q$, $u$ wird die Koppelebene in eine Anzahl von Feldern zerlegt, und dann ist klar, dafs alle Punkte

---

1) Über die Doppelpunkte der Koppelkurve, diese Zeitschr. Bd. 34, 1889, S. 303 und 372, sowie Bd. 36, 1891, S. 69. — Über die Gestaltung der Koppelkurven für besondere Fälle des Kurbelgetriebes, daselbst Bd. 36, 1891, S. 11.

2) Über die angenäherte Geradführung mit Hülfe eines ebenen Gelenkvierecks, diese Zeitschrift Bd. 43, 1898, S. 36. — Allievi, Cinematica della biella piana, Napoli 1895, p. 59.

desselben Feldes Koppelkurven beschreiben, die hinsichtlich ihrer singulären Punkte denselben Charakter aufweisen.

Die Kurven $p$ und $u$ sind für jeden vorgelegten Kurbelmechanismus leicht zu konstruieren, indem man die Bewegung umkehrt, also bei festgehaltener Koppelebene für beliebig viele Lagen des ursprünglich festen Gliedes die Pole und die Ballschen Punkte ermittelt.[1]) Man erhält sie ferner als die beiden Einhüllenden aller in der Koppelebene liegenden Kreise, die im Verlauf der Bewegung der Reihe nach zu Wendekreisen werden. Bezüglich der Kurve $p$ liegen für spezielle Fälle des Kurbelmechanismus auch bereits einige analytische Untersuchungen vor[2]); wir vervollständigen sie im ersten Abschnitt dieses Aufsatzes, indem wir vor allem den allgemeinen Fall ins Auge fassen. Im zweiten Abschnitt wenden wir uns zu der bisher überhaupt noch nicht behandelten Kurve $u$, beschränken uns aber in der Hauptsache auf zwei besonders einfache Fälle des Gelenkvierecks. Dabei wollen wir $u$ zur Abkürzung des Ausdrucks als die *Flachpunktkurve* der Koppelebene bezeichnen.

Von der Übergangskurve $q$ kennen wir bisher zwar eine Reihe geometrischer Eigenschaften, doch fehlt es noch an einem Verfahren, um diese Kurve, analog wie $p$ und $u$, ihrer Definition entsprechend punktweise zu konstruieren. Diese Lücke soll im dritten Abschnitt ausgefüllt werden, indem gezeigt wird, wie man für jede Koppellage die Systempunkte findet, die augenblicklich einen Selbstberührungspunkt ihrer Bahn durchschreiten.

## I. Die Polkurve $p$.

**2.** Wir verstehen unter $\mathsf{AB}BA$ ein beliebiges Gelenkviereck mit dem festen Glied $\mathsf{AB}$, unter $\mathfrak{P}$ den Pol der augenblicklich betrachteten Koppellage $AB$, also den Schnittpunkt der Geraden $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$, und setzen $\mathsf{A}A = a$, $\mathsf{B}B = b$, $AB = c$, $\mathsf{AB} = d$, $A\mathfrak{P} = r$, $B\mathfrak{P} = s$. Liegt, wie in Fig. 1, der Punkt $\mathfrak{P}$ auf den Verlängerungen von $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$ über $A$ und $B$ hinaus, so ist

$$2\cos\angle\,\mathsf{A}\mathfrak{P}\mathsf{B} = \frac{(a+r)^2+(b+s)^2-d^2}{(a+r)(b+s)} = \frac{r^2+s^2-c^2}{rs},$$

andernfalls ist das Vorzeichen einer der Strecken $r$ und $s$, oder von

1) Bezüglich der Konstruktion des Ballschen Punktes vergl. Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, diese Zeitschr. Bd. 42, 1897, S. 259.

2) Roberts, On the motion of a plane under certain conditions, Proceedings of the London Mathematical Society vol. III p. 312; On the pedals of conic sections, daselbst p. 94.

beiden zugleich, in das entgegengesetzte zu verwandeln. Für den Pol jeder überhaupt möglichen Koppellage gilt demnach immer eine der vier Gleichungen:

$$(1)\quad ab(r^2+s^2-c^2)-(a^2+b^2+c^2-d^2)rs-as(r^2-s^2+c^2)-br(-r^2+s^2+c^2)=0,$$

$$(2)\quad ab(r^2+s^2-c^2)+(a^2+b^2+c^2-d^2)rs-as(r^2-s^2+c^2)+br(-r^2+s^2+c^2)=0,$$

$$(3)\quad ab(r^2+s^2-c^2)+(a^2+b^2+c^2-d^2)rs+as(r^2-s^2+c^2)-br(-r^2+s^2+c^2)=0,$$

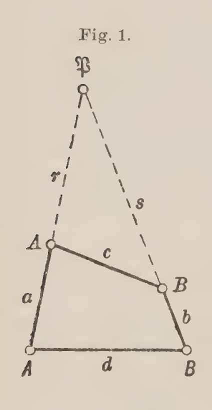
$$(4)\quad ab(r^2+s^2-c^2)-(a^2+b^2+c^2-d^2)rs+as(r^2-s^2+c^2)+br(-r^2+s^2+c^2)=0.$$

Multiplizieren wir (1) mit (4), (2) mit (3) und hierauf diese beiden Produkte mit einander, so erhalten wir als *Gleichung der Polkurve p*

$$(5)\quad [a^2b^2(r^2+s^2-c^2)^2+(a^2+b^2+c^2-d^2)^2r^2s^2-a^2s^2(r^2-s^2+c^2)^2-b^2r^2(-r^2+s^2+c^2)^2]^2$$
$$-4a^2b^2r^2s^2[(a^2+b^2+c^2-d^2)(r^2+s^2-c^2)+(r^2-s^2+c^2)(-r^2+s^2+c^2)]^2=0.$$

Bezeichnen wir ferner mit $x$ und $y$ die rechtwinkligen Koordinaten von $\mathfrak{P}$ für $A$ als Anfangspunkt, $AB$ als positive $x$-Achse, so wird

Fig. 1.




$$r^2=x^2+y^2,\quad s^2=(c-x)^2+y^2,$$
$$r^2+s^2-c^2=2(x^2+y^2-cx),$$
$$r^2-s^2+c^2=2cx,$$
$$-r^2+s^2+c^2=2c\,(c-x),$$

und wir erkennen sofort, daſs $p$ im allgemeinen *eine Kurve achter Ordnung* ist. Sie ist naturgemäſs *symmetrisch* in Bezug auf die Gerade $AB$.

Durch Vertauschung von $c$ und $d$ verwandelt sich (5) in die Gleichung der Polkurve für die umgekehrte Bewegung, d. h. der *Polbahn* $\pi$ in der Ebene des festen Gliedes $d$.

**3.** Um zunächst die Beziehungen der Polkurve zu den *imaginären Kreispunkten* zu ermitteln, bestimmen wir ihre Schnittpunkte mit dem Geradenpaar

$$(x-m)^2+y^2=0,$$

wo $m$ vorläufig jeden beliebigen Wert haben kann; wir setzen also in (5)

$$r^2=m\,(2x-m),\quad s^2=(m-c)\,(2x-m-c).$$

Hierdurch ergiebt sich eine Gleichung sechsten Grades in $x$, und zwar bekommt das Glied mit $x^6$ den Faktor

$$64c^4\,[(a^2-b^2)\,m-a^2c]^2.$$

Dieser verschwindet nur für

$$m = \frac{a^2 c}{a^2 - b^2},$$

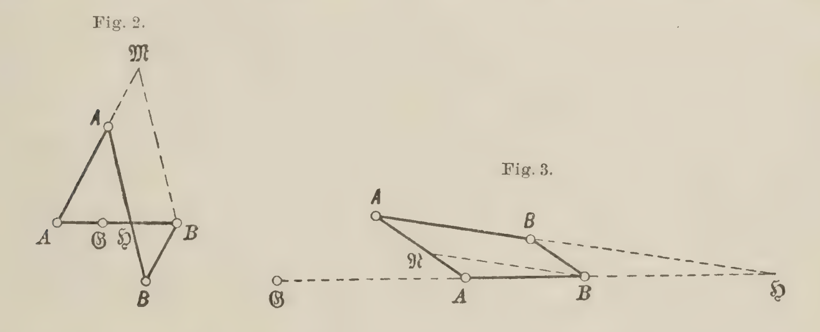
und dann geht der Faktor von $x^5$ über in

$$-\,128\, a^4 b^4 c^5 \frac{(c^2 - d^2)^2}{(a^2 - b^2)^3}.$$

Wir schliefsen daraus, *dafs die Polkurve die imaginären Kreispunkte im allgemeinen zu Spitzen hat.* Die zugehörigen Tangenten schneiden sich auf $AB$ im *Fokalzentrum* $F$ von $p$ mit der Abszisse $AF = \frac{a^2 c}{a^2 - b^2}$. Da hiernach $BF = \frac{b^2 c}{a^2 - b^2}$ ist, *so teilt das Fokalzentrum die Koppelstrecke* $AB$ *aufsen im Verhältnis* $a^2 : b^2$.

Für $c = d$ werden die imaginären Kreispunkte zu Selbstberührungspunkten der Kurve $p$; für $a = b$ behalten sie den Charakter von Spitzen, aber mit der unendlich fernen Geraden als Tangente.

4. Aufser den imaginären Kreispunkten besitzt die Polkurve noch *vier unendlich ferne Punkte.* Konstruieren wir für den in Fig. 1 dargestellten Kurbelmechanismus die Kurve $p$ in der Weise, dafs wir das Glied $AB$ festhalten und für verschiedene Lagen von $\mathsf{AB}$ die Pole ermitteln, so ergeben sich die unendlich fernen Punkte von $p$ aus den Lagen von $\mathsf{AB}$, bei denen $\mathsf{A}A \parallel \mathsf{B}B$ ist. Um sie zu finden, zeichnen




wir über $AB$ das Dreieck $AB\mathfrak{M}$ mit den Seiten $A\mathfrak{M} = a + b$, $B\mathfrak{M} = d$ (Fig. 2), sowie das Dreieck $AB\mathfrak{N}$ mit den Seiten $A\mathfrak{N} = a - b$, $B\mathfrak{N} = d$ (Fig. 3). Verstehen wir in beiden Figuren unter $\mathfrak{H}$ den Schnittpunkt von $AB$ und $\mathsf{AB}$ und machen auf $AB$ die Strecke $A\mathfrak{G}$ entgegengesetzt gleich $B\mathfrak{H}$, so gehen durch den Punkt $\mathfrak{G}$ jedesmal zwei Asymptoten von $p$, die eine bezw. parallel zu $A\mathfrak{M}$ oder $A\mathfrak{N}$, die andere symmetrisch dazu in Bezug auf $AB$. Dann ist

$$\frac{A\mathfrak{G}}{B\mathfrak{G}} = \frac{B\mathfrak{H}}{A\mathfrak{H}} = \mp \frac{b}{a},$$

d. h. *die Asymptoten teilen die Koppelstrecke $AB$ innen und aufsen im Verhältnis $b:a$.*

Die beiden durch Fig 2 bestimmten Asymptoten sind reell, solange das Dreieck $AB\mathfrak{M}$ möglich ist, d. h. für

$$\text{(I)} \qquad a + b < c + d.$$

Ebenso ergiebt sich aus Fig. 3 für die Existenz des zweiten Asymptotenpaares die notwendige und hinreichende Bedingung

$$\text{(II)} \qquad |a - b| > |c - d|.$$

Die Figuren 2 und 3 liefern gleichzeitig die Asymptoten der Polbahn $\pi$; die Kurven $p$ und $\pi$ besitzen demnach immer gleich viel (reelle) Asymptoten.

Die soeben gefundenen Realitätsbedingungen stehen mit der üblichen Einteilung der Kurbelmechanismen in unmittelbarem Zusammenhang. Man spricht bekanntlich von einem Doppelkurbel-, Schwingkurbel- oder Doppelschwingmechanismus, je nachdem von beiden Armen $a$ und $b$, oder nur von einem, oder von keinem Arm volle Umdrehungen in der Ebene des festen Gliedes ausgeführt werden können. Wir unterscheiden ferner Doppelschwingmechanismen erster und zweiter Art, je nachdem die zugehörigen Koppelkurven aus einem einzigen geschlossenen Zug oder aus zwei getrennten Teilen bestehen.[1]) Ist bei einem Gelenkviereck die Summe des gröfsten und kleinsten Gliedes kleiner als die Summe der beiden anderen Glieder, so erhalten wir einen Doppelkurbel-, einen Schwingkurbel-, oder einen Doppelschwingmechanismus zweiter Art, je nachdem wir das kleinste Glied, oder eines der beiden ihm benachbarten Glieder, oder das gegenüberliegende Glied feststellen. Ist dagegen die Summe des gröfsten und kleinsten Gliedes gröfser als die Summe der beiden andern, so entsteht auf alle Fälle ein Doppelschwingmechanismus erster Art. Der singuläre Fall, in welchem beide Summen einander gleich sind, möge vorläufig ausgeschlossen bleiben (vergl. Art. 7).

Setzen wir nun voraus, es liege ein Doppelkurbelmechanismus vor, so ist $d$ das kleinste Glied, also entweder die Koppel $c$, oder einer der beiden Arme, etwa $a$, das gröfste unter sämtlichen Gliedern. Im ersten Falle ist nach Voraussetzung $c + d < a + b$ und $c - d > |a - b|$; die Bedingungen (I) und (II) sind also nicht erfüllt, d. h. die Kurven $p$ und $\pi$ besitzen überhaupt keine reellen Asymptoten. Zu demselben Ergebnis gelangen wir im zweiten Fall; dann ist nämlich nach Voraus-

1) Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente, diese Zeitschr. 46. Bd. 1901, S. 331.

setzung $a + d < b + c$, also $a - b < c - d$ und $c + d < a + b$. Machen wir jetzt das Glied $AB$ fest und $\mathsf{AB}$ beweglich, so entsteht ein Doppelschwingmechanismus zweiter Art mit $\pi$ als Polkurve und $p$ als Polbahn, und wir erhalten somit den Satz: *Bei jedem Doppelkurbelmechanismus und bei jedem Doppelschwingmechanismus zweiter Art sind die Asymptoten von Polkurve und Polbahn sämtlich imaginär.* — In analoger Weise ergiebt sich: *Bei jedem Schwingkurbelmechanismus haben Polkurve und Polbahn vier reelle Asymptoten; dagegen sind im Falle des Doppelschwingmechanismus erster Art immer nur je zwei dieser Asymptoten reell.*

**5.** *Die Endpunkte $A$ und $B$ der Koppelstrecke sind Brennpunkte und zugleich vierfache Punkte der Polkurve.* Setzen wir nämlich in Gleichung (5) $r^2 = 0$, so folgt

$$(s^2 - b^2)^2 (s^2 - c^2)^4 = 0,$$

von den beiden Geraden $r^2 = 0$, welche die imaginären Kreispunkte mit $A$ verbinden, berührt also jede die Kurve $p$ in einem Punkte des

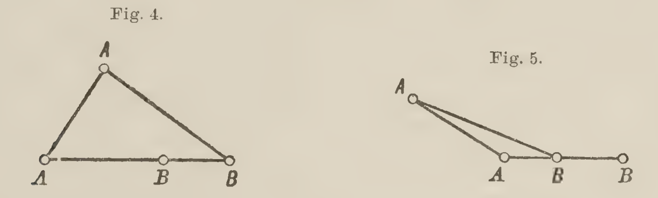


Fig. 4. Fig. 5.

Kreises $s^2 = b^2$ und hat in $A$ mit $p$ vier zusammenfallende Punkte gemein. Dafs $p$ in $A$ einen vierfachen Punkt besitzt, ist auch geometrisch unmittelbar ersichtlich; denn bringen wir das Glied $\mathsf{AB}$ in eine solche Lage, dafs der Punkt $\mathsf{B}$ in die Gerade $AB$ fällt, so ist der zugehörige Pol identisch mit $A$. Dann ist $A\mathsf{B}$ entweder $= c + b$, wie in Fig. 4, oder $= c - b$, wie in Fig. 5, und zu jeder von beiden Lagen des Punktes $\mathsf{B}$ gehören zwei in Bezug auf $AB$ symmetrische Lagen des Gliedes $A\mathsf{A}$ als Tangenten von $p$ im Punkte $A$.

Damit nun Fig. 4 überhaupt möglich und demnach das eine Tangentenpaar reell sei, mufs

$$\text{(III)} \qquad b + c < a + d$$

sein, und für Fig. 5 lautet die entsprechende Bedingung

$$\text{(IV)} \qquad |b - c| < |a - d|.$$

Ebenso ist im vierfachen Punkte $B$ das eine Tangentenpaar reell für

$$\text{(V)} \qquad a + c < b + d$$

und das andere für

$$\text{(VI)} \qquad |a - c| < |b - d|.$$

Beginnen wir wiederum mit dem Falle des *Doppelkurbelmechanismus*, so ist $d$ das kleinste Glied. Ist dann die Koppel $c$ das gröfste Glied, mithin $c + d < a + b$, so bestehen zwischen den Strecken $a$, $b$, $c$, $d$ jedenfalls die Ungleichungen

$$b + c > a + d, \quad c - b < a - d, \quad a + c > b + d \quad \text{und} \quad c - a < b - d.$$

Andererseits führt die Annahme, dafs einer der Arme, z. B. $a$ das gröfste Glied sei, zu den Ungleichungen

$$a + d < b + c, \quad a - d > |b - c|, \quad a + c < b + d \quad \text{und} \quad a - c < b - d;$$

den Bedingungen (III) bis (VI) wird also in beiden Fällen nicht genügt, d. h. *die Tangenten der Polkurve in $A$ und $B$ sind sämtlich imaginär.*

Werden dieselben Überlegungen auf einen *Doppelschwingmechanismus zweiter Art* angewendet, so zeigt sich, dafs dann die Polkurve *in jedem der Koppelendpunkte vier reelle Tangenten hat.* Diese Kurve wird aber durch Umkehrung der Bewegung zur Polbahn eines Doppelkurbelmechanismus, d. h. *bei jedem Doppelkurbelmechanismus sind die Tangenten der Polbahn in den Endpunkten des festen Gliedes sämtlich reell.*

Durch wiederholte Benutzung derselben Schlufsweise ergiebt sich ferner: *Bei jedem Schwingkurbelmechanismus haben Polkurve und Polbahn im Endpunkte des gröfseren Armes (der Schwinge) vier reelle, im Endpunkte des kleineren Armes (der Kurbel) vier imaginäre Tangenten. Bei jedem Doppelschwingmechanismus erster Art besitzen beide Kurven in jedem ihrer vierfachen Punkte zwei reelle und zwei konjugiert imaginäre Tangenten.*

**6.** *Weitere Doppelpunkte der Polkurve.* Aus Gleichung (5) folgt, dafs $p$ die Schnittpunkte der Kurven

$$a^2b^2(r^2 + s^2 - c^2)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 r^2 s^2 - a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 \\ - b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2 = 0$$

und

$$(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(r^2 + s^2 - c^2) + (r^2 - s^2 + c^2)(-r^2 + s^2 + c^2) = 0$$

oder

$$(6) \quad 4a^2b^2(x^2 + y^2 - cx)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 (x^2 + y^2)[(c - x)^2 + y^2] \\ - 4a^2c^2x^2[(c - x)^2 + y^2] - 4b^2c^2(c - x)^2(x^2 + y^2) = 0$$

und

$$(7) \qquad (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(x^2 + y^2 - cx) + 2c^2x(c - x) = 0$$

zu Doppelpunkten hat. Gleichung (6) stellt eine zirkulare Kurve vierter Ordnung dar mit Doppelpunkten in $A$ und $B$, (7) einen Kegel-

schnitt mit der Hauptachse $AB$; beide Kurven schneiden sich aufser in $A$ und $B$ noch in zwei Punktpaaren $C_1$, $D_1$ und $C_2$, $D_2$, deren jedes in Bezug auf $AB$ symmetrisch ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = n^2,$$

so ist nach (7)

$$n^2(x^2 + y^2 - cx) = - 2c^2x(c - x)$$
$$n^2(x^2 + y^2) \qquad = - cx[2c(c - x) - n^2]$$
$$n^2[(c - x)^2 + y^2] = - c(c - x)(2cx - n^2),$$

und dann geht Gleichung (6), unter Weglassung des Faktors $c^2x(c-x)$, nach einfacher Rechnung über in

$$[2c(n^2 - 2a^2)x + n^2(n^2 - 2c^2)] \cdot [2c(n^2 - 2b^2)(c - x) + n^2(n^2 - 2c^2)] = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für die Doppelpunkte $C_1$ und $D_1$ von $p$

$$x_1 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2c(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)}$$

und für die Doppelpunkte $C_2$ und $D_2$

$$c - x^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2c(- a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}.$$

Damit sind aber noch nicht sämtliche Doppelpunkte von $p$ ermittelt. Multiplizieren wir nämlich in Art. 2 zunächst Gleichung (1) mit (2) und (3) mit (4), so finden wir die Gleichung von $p$ in der Form

$$[a^2b^2(r^2 + s^2 - c^2)^2 - n^4r^2s^2 + a^2s^2(r^2 - s^2 + c^2)^2 - b^2r^2(- r^2 + s^2 + c^2)^2]^2$$
$$- 4b^2s^2[n^2r^2(- r^2 + s^2 + c^2) + a^2(r^2 + s^2 - c^2)(r^2 - s^2 + c^2)]^2 = 0,$$

und hiernach sind Doppelpunkte von $p$ auch die Schnittpunkte der Kurven

$$a^2b^2(r^2 + s^2 - c^2)^2 - n^4r^2s^2 + a^2s^2(r^2 - s^2 + c^2)^2 - b^2r^2(- r^2 + s^2 + c^2)^2 = 0$$

und

$$n^2r^2(- r^2 + s^2 + c^2) + a^2(r^2 + s^2 - c^2)(r^2 - s^2 + c^2) = 0.$$

Bedienen wir uns wieder rechtwinkliger Koordinaten, so erkennen wir, dafs die erste Gleichung eine zirkulare Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in $A$ und $B$, die zweite eine zirkulare Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in $A$ und einem einfachen Punkte in $B$ darstellt; wir erhalten demnach, von $A$, $B$ und den imaginären Kreispunkten abgesehen, wieder vier Schnittpunkte, die in Bezug auf $AB$ paarweise symmetrisch liegen. Die Elimination von $x^2 + y^2$ zwischen

beiden Kurvengleichungen liefert für die Abszissen dieser Schnittpunkte die Gleichung

$$[2c(n^2-2a^2)x+n^2(n^2-2c^2)]\cdot[2(n^2-a^2-b^2)x-c(n^2-2b^2)]=0.$$

Der erste Faktor giebt gleich Null gesetzt wieder den Wert $x=x_1$ und damit die bereits bekannten Doppelpunkte $C_1$ und $D_1$; dagegen entspricht dem zweiten Faktor ein neues Paar von Doppelpunkten $C_3$, $D_3$ mit

$$x_3=\frac{(ca^2-b^2+c^2-d^2)}{2(c^2-d^2)}.$$

Da jeder der vierfachen Punkte $A$ und $B$ für sechs Doppelpunkte zählt, so haben wir mit Einschlufs der imaginären Kreispunkte bis jetzt im Ganzen 20 Doppelpunkte der Polkurve ermittelt. Nun besitzt eine Kurve achter Ordnung nie mehr als 21 Doppelpunkte; diese Zahl kann aber bei der Kurve $p$ nicht erreicht werden, weil $p$ in Bezug auf $AB$ symmetrisch ist. Wir kennen demnach bereits sämtliche Doppelpunkte von $p$ und gelangen somit zu dem Satz: *Die Polkurve hat aufser den imaginären Kreispunkten und den vierfachen Punkten $A$ und $B$ im allgemeinen noch sechs (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte.*

Fig. 6 zeigt die Kurve $p$ nebst ihren Asymptoten für den in Fig. 1 bis 5 dargestellten Schwingkurbelmechanismus.

7. *Ausartungen der Polkurve in speziellen Fällen des Kurbelmechanismus.* Wir beginnen mit der Betrachtung des *durchschlagenden Kurbelmechanismus*, setzen also voraus, im Gelenkviereck $\mathsf{AB}BA$ sei die Summe zweier Glieder gleich der Summe der beiden anderen. Dabei haben wir zu unterscheiden, ob die gleichen Summen von je zwei gegenüberliegenden oder von je zwei benachbarten Gliedern gebildet werden.

I. Ist $a+b=c+d$, also $a^2+b^2+c^2-d^2=2(-ab+ac+bc)$, so gehen die Gleichungen (1) bis (4) über in

$$(r+s+c)[(br^2+as^2-abc)-(a+b)rs+b(a-c)r+a(b-c)s]=0$$
$$(-r+s+c)[(br^2+as^2-abc)+(a+b)rs-b(a-c)r+a(b-c)s]=0$$
u. s. w.

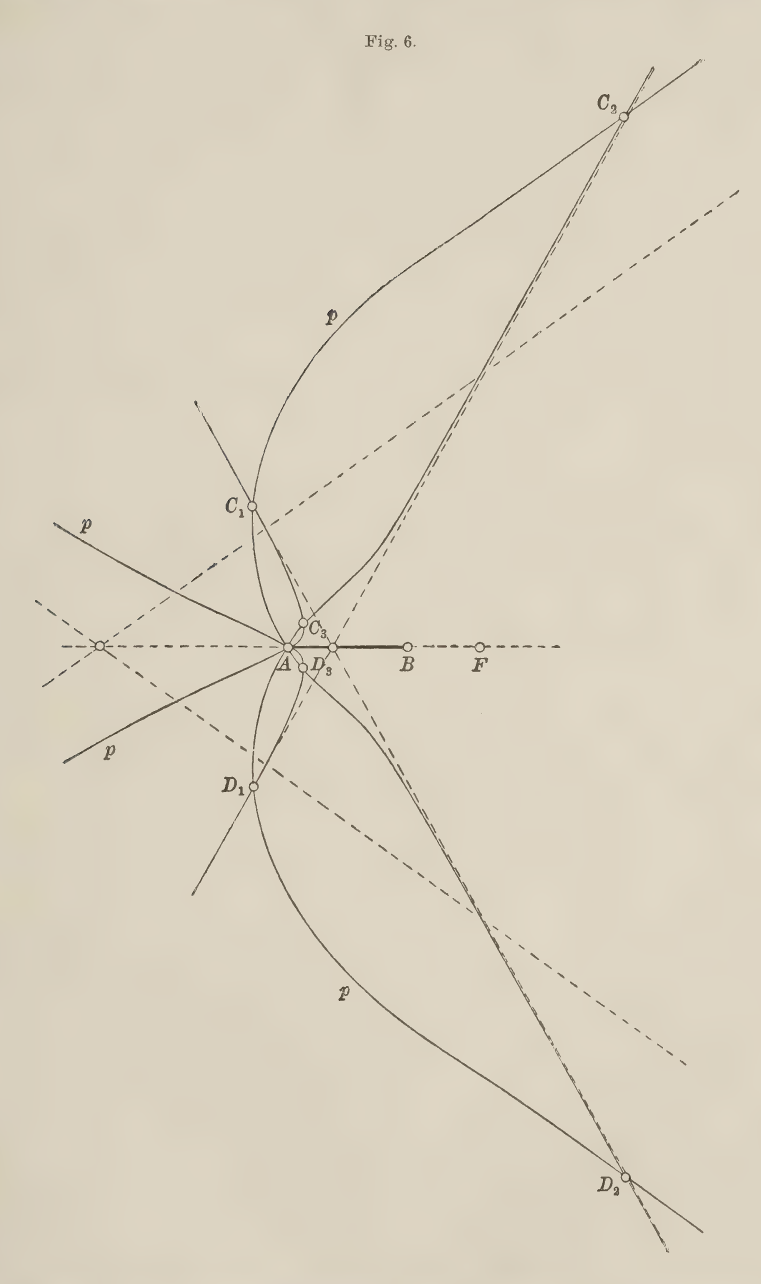
Bilden wir nun wieder die Gleichung der Polkurve durch Multiplikation dieser vier Gleichungen, so wird das Produkt

$$(r+s+c)(-r+s+c)(r-s+c)(-r-s+c)=(r^2-s^2)^2-2c^2(r^2+s^2)+c^4$$
$$=-4c^2y^2;$$

*die Polkurve zerfällt also in die doppelt zählende Gerade $AB$ und eine Kurve sechster Ordnung $p$.* Diese hat wiederum Spitzen in den ima-

ginären Kreispunkten und aufserdem zwei unendlich ferne Punkte, die durch Fig. 3 bestimmt sind. Die Punkte $A$ und $B$ sind Doppelpunkte

Fig. 6.




von $p$; die zugehörigen Tangenten liefert Fig. 4. Überdies schneidet $p$ die Gerade $AB$ noch in zwei Punkten, den beiden Polen der Durch-

schlagslage.[1]) Aufser $A$ und $B$ und den imaginären Kreispunkten besitzt die Polkurve noch die sechs mit $C_1$ bis $D_3$ bezeichneten Doppelpunkte.

II. Sei ferner die Summe zweier benachbarten Glieder gleich der Summe der beiden anderen, z. B. $a + d = b + c$. Dann wird der Ausdruck $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2(ab + ac - bc)$, und dieser Wert geht aus dem unter I gefundenen hervor durch Vertauschung von $b$ mit $-b$. Nun enthält die Gleichung (5) der Polkurve die Gliedlänge $d$ überhaupt nur in der Verbindung $a^2 + b^2 + c^2 - d^2$ und im übrigen nur gerade Potenzen von $b$; wir schliefsen hieraus, dafs in den beiden mit I und II bezeichneten Fällen die Gleichungen der Polkurve sich nur durch die entgegengesetzten Vorzeichen der Gliedlänge $b$ unterscheiden werden. Der Fall II bedarf demnach keiner besonderen Untersuchung.

8. Wenn im Falle I $a = d$ und $b = c$ ist, so erhalten wir einen *gleichschenkligen Kurbelmechanismus* (Fig. 7), und Gleichung (1) verwandelt sich in

$$(r + s + b)(-r + s + b)(as - br - ab) = 0,$$

mithin spaltet sich die Polkurve in die vierfach zählende Gerade $AB$ und eine Kurve *vierter* Ordnung $p$ mit der Gleichung

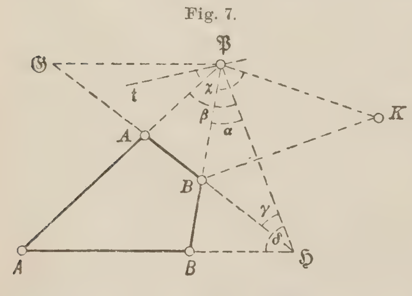
$$(as - br - ab)(-as - br - ab)(as + br - ab)(-as + br - ab) = 0$$

oder

$$[a^2s^2 - b^2(r + a)^2][a^2s^2 - b^2(r - a)^2] = 0. \tag{8}$$

Setzen wir $s^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\varphi$, wobei $\varphi$ den Winkel $BA\mathfrak{P}$ bedeutet, so ergiebt sich die Gleichung von $p$ in der Form

Fig. 7.




$$r = \frac{2a^2b}{a^2 - b^2}\cos\varphi \pm \frac{2ab^2}{a^2 - b^2}, \tag{9}$$

d. h. $p$ ist eine *Pascalsche Kurve.*[2]) In der That, machen wir in Fig. 8 auf $AB$ die Strecke $A\mathsf{A}_0 = \mathsf{A}^0 A = a$ und bezeichnen mit $\mathfrak{P}_0$ den vierten harmonischen Punkt zu $B$, $\mathsf{A}_0$, $A$, mit $\mathfrak{P}^0$ den vierten harmonischen Punkt zu $B$, $\mathsf{A}^0$, $A$, mit $\mathfrak{O}$ den Mittelpunkt von $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}^0$, so wird

$$A\mathfrak{P}_0 = \frac{2ab}{a+b}, \quad A\mathfrak{P}^0 = \frac{2ab}{a-b}, \quad \text{folglich} \quad A\mathfrak{O} = \frac{2a^2b}{a^2-b^2} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{O}\mathfrak{P}^0 = -\mathfrak{O}\mathfrak{P}_0 - \frac{2ab^2}{a^2-b^2};$$

---

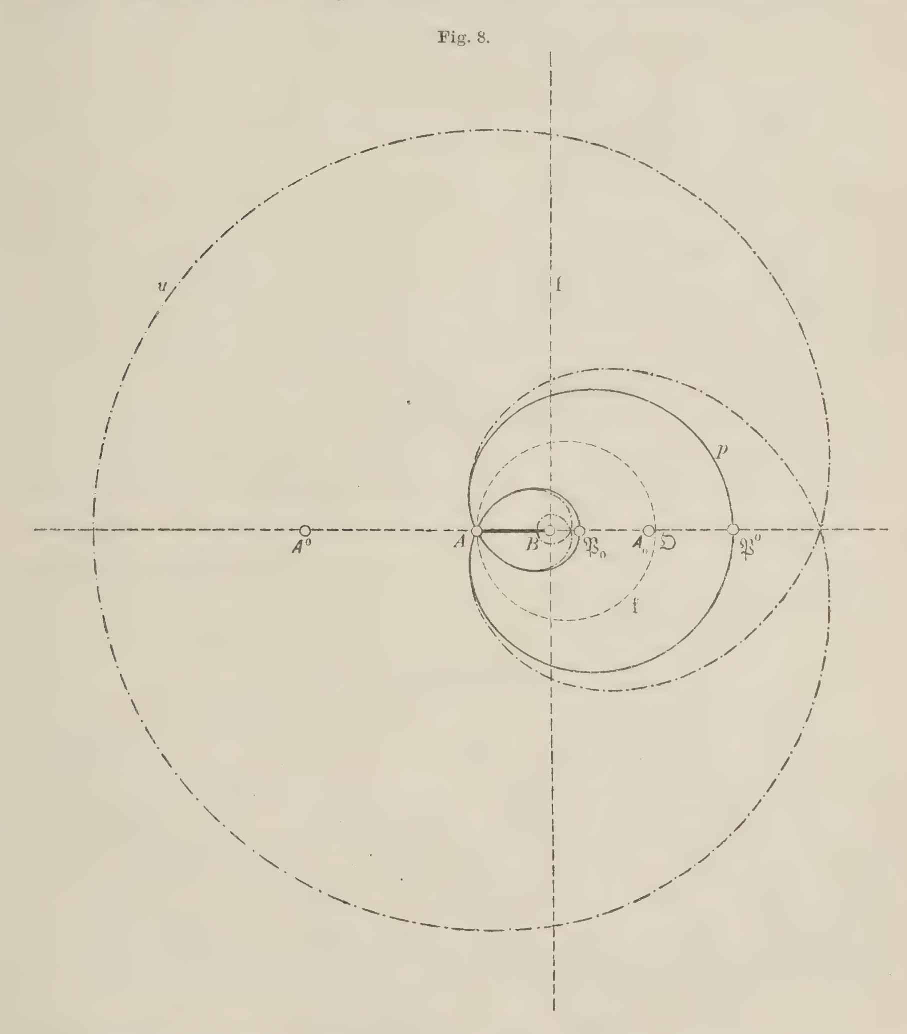
1) Vergl. Burmester Kinematik I, S. 113, sowie Fig. 334.

2) Roberts a. a. O. p. 94.

wir erhalten daher $p$, indem wir über $A\mathfrak{D}$ als Durchmesser den Kreis $\mathfrak{k}$ beschreiben und auf den durch $A$ gehenden Strahlen von ihren Schnittpunkten mit $\mathfrak{k}$ aus die Strecke $\mathfrak{D}\mathfrak{P}^0$ beiderseits abtragen.

Der Punkt $A$ ist ein Doppelpunkt von $p$. Wie sich aus Fig. 4 ergiebt, gehen seine Tangenten durch die Schnittpunkte des um $A$ mit

Fig. 8.




dem Radius $a$ beschriebenen Kreises und der Geraden $\mathfrak{l}$, die in $B$ auf $AB$ senkrecht steht. Die imaginären Kreispunkte sind wiederum Spitzen von $p$; die zugehörigen Tangenten schneiden sich im Mittelpunkt $F$ von $\mathfrak{k}$, denn dieser teilt $AB$ im Verhältnis $a^2 : b^2$. (Art. 3). Die Kurve $p$ ist hiernach von der vierten Klasse. Durch jeden der imaginären Kreispunkte geht folglich nur noch je eine Tangente, und

diese Tangenten treffen sich in $B$. Für $s^2 = 0$ folgt nämlich aus Gleichung (8)

$$(r^2 - a^2)^2 = 0,$$

d. h. die Geraden $s^2 = 0$ sind Tangenten von $p$. (Art. 5).

**9.** Ist $a = b$ und $c = d$, so geht Gleichung (1) über in

$$a(r - s + c)(r - s - c)(r + s + a) = 0;$$

die Polkurve zerfällt also in die vierfach zählende Gerade $AB$, die doppelt zählende unendlich ferne Gerade und die Kurve

$$(10) \qquad (r + s + a)(r - s + a)(-r + s + a)(-r - s + a) = 0,$$

d. h. einen Kegelschnitt $p$, der $A$ und $B$ zu Brennpunkten und die Gliedlänge $a$ zur Hauptachse hat. Das Gelenkviereck $\mathsf{AB}BA$ liefert gegenwärtig einen *Zwillingskurbelmechanismus*, der in jeder der beiden Durchschlagslagen in einen *Parallelkurbelmechanismus* übergehen kann.[1])

Zu weiteren Sonderfällen gelangen wir durch die Annahme, in dem betrachteten Gelenkviereck seien zwei benachbarte Glieder, z. B. $b$ und $d$, unendlich groſs. Diese Sonderfälle sind zuerst von Roberts behandelt worden[2]), und wir erhalten die betreffenden Resultate ohne weiteres aus den vorstehend entwickelten allgemeinen Formeln der Artikel 2 bis 6, indem wir dort $b = \infty$, $d = \infty$ und $d - b$ gleich einer endlichen Strecke setzen.

## II. Die Flachpunktkurve $u$.

**10.** Wir gehen wiederum von einem beliebigen Kurbelmechanismus aus mit den Gliedern $\mathsf{A}A = a$, $\mathsf{B}B = b$, $AB = c$, $\mathsf{AB} = d$. (Fig. 9). Für die Koppellage $AB$, die $\mathsf{AB}$ in $\mathfrak{H}$ schneidet, sei $\mathfrak{P}$ der Pol, $\mathfrak{t}$ die gemeinsame Tangente von Polbahn und Polkurve, $W$ der Wendepol und $K$ der Ballsche Punkt, also $\angle \mathfrak{t}\mathfrak{P}A = \angle B\mathfrak{P}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{P}W \perp \mathfrak{t}$ und $WK \perp \mathfrak{P}K$. Wir setzen $\mathfrak{P}\mathfrak{H} = h$, $\angle B\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \alpha$, $\angle A\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \beta$, $\angle \mathfrak{P}\mathfrak{H}A = \gamma$, $\angle \mathfrak{P}\mathfrak{H}\mathsf{A} = \delta$, $\mathfrak{t}\mathfrak{P}K = \chi$; dann dienen zur Bestimmung der Punkte $W$ und $K$ die an andrer Stelle abgeleiteten Gleichungen

$$(11) \qquad \mathfrak{P}W = h \frac{\sin\gamma \sin\delta}{\sin\alpha \sin\beta \sin(\delta - \gamma)}$$

$$(12) \qquad \tan\chi = -\frac{\tan\alpha \tan\beta}{\tan\delta}.$$

---

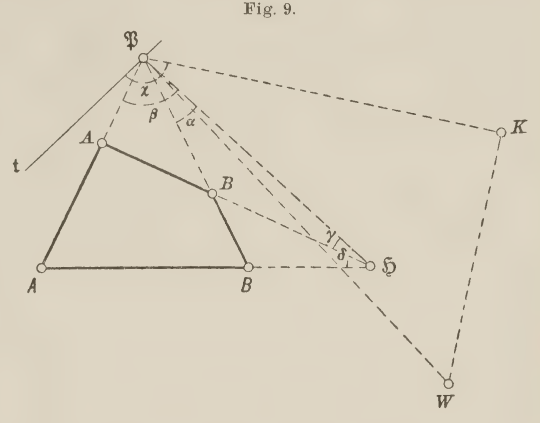
1) Burmester Kinematik I S. 302.

2) A. a. O. S. 312 und 314. Vergl. auch „Über die Gestaltung der Koppelkurven etc.“ a. a. O. S. 15.

Bezeichnen wir die Strecken $A\mathfrak{P}$ und $B\mathfrak{P}$ wie bisher bezw. mit $r$ und $s$ und ferner $AK$ mit $r'$, $BK$ mit $s'$, so folgt aus dem Dreieck $A\mathfrak{P}K$

$$r'^2 = r^2 + \mathfrak{P}K^2 - 2r \cdot \mathfrak{P}K \cos(\chi - \alpha).$$

Fig. 9.




Nun ist

$$(13) \quad r = h \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

und $\mathfrak{P}K = \mathfrak{P}W \cdot \sin \chi$; schreiben wir also zur Abkürzung für $\tan \alpha$, $\tan \beta$, $\tan \gamma$, $\tan \delta$ bezw. $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, so finden wir mit Rücksicht auf (11) und (12)

$$(14) \qquad r'^2 = h^2 \frac{\mu^2(1+\lambda^2)(\lambda+\nu)^2(\varkappa^2\mu^2+\nu^2)}{(\lambda+\mu)^2(\mu-\nu)^2(\varkappa^2\lambda^2+\nu^2)}$$

und analog

$$(15) \qquad s'^2 = h^2 \frac{\mu^2(1+\varkappa^2)(\varkappa+\nu)^2(\lambda^2\mu^2+\nu^2)}{(\varkappa+\mu)^2(\mu-\nu)^2(\varkappa^2\lambda^2+\nu^2)}.$$

Aus der Figur ergiebt sich weiter

$$a = h \frac{\sin\beta \sin(\delta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta+\delta)} \qquad b = h \frac{\sin\alpha \sin(\delta-\gamma)}{\sin(a+\gamma)\sin(\alpha+\delta)}$$

$$c = h \frac{\sin\gamma \sin(\beta-\alpha)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)} \qquad d = h \frac{\sin\delta \sin(\beta-\alpha)}{\sin(\alpha+\delta)\sin(\beta+\delta)},$$

es ist also

$$(16) \quad \begin{cases} a^2 = h^2 \dfrac{\lambda^2(1+\lambda^2)(\mu-\nu)^2}{(\lambda+\mu)^2(\lambda+\nu)^2} & b^2 = h^2 \dfrac{\varkappa^2(1+\varkappa^2)(\mu-\nu)^2}{(\varkappa+\mu)^2(\varkappa+\nu)^2} \\ c^2 = h^2 \dfrac{\mu^2(1+\mu^2)(\varkappa-\lambda)^2}{(\varkappa+\mu)^2(\lambda+\mu)^2} & d^2 = h^2 \dfrac{\nu^2(1+\nu^2)(\varkappa-\lambda)^2}{(\varkappa+\nu)^2(\lambda+\nu)^2}. \end{cases}$$

Die Elimination von $h$, $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ zwischen (14), (15) und den vier Gleichungen (16) würde zu einer Gleichung zwischen $a, b, c, d, r'$ und $s'$ führen, d. h. zur Gleichung der *Flachpunktkurve* $u$.

Aus Gleichung (13) folgt

$$r^2 = h^2 \frac{\mu^2(1+\lambda^2)}{(\lambda+\mu)^2},$$

mithin ist nach (14) und (16)

$$(17) \qquad r'^2 = \frac{r^4}{a^2} \cdot \frac{\lambda^2(\varkappa^2\mu^2+\nu^2)}{\mu^2(\varkappa^2\lambda^2+\nu^2)}$$

und analog

$$s'^2 = \frac{s^4}{b^2} \cdot \frac{\varkappa^2(\lambda^2\mu^2 + \nu^2)}{\mu^2(\varkappa^2\lambda^2 + \nu^2)}. \tag{18}$$

Die Gröfsen $\varkappa^2$, $\lambda^2$, $\mu^2$, $\nu^2$ können durch eine einfache trigonometrische Rechnung, auf die wir hier nicht eingehen wollen, durch $a, b, c, r, s$ ausgedrückt werden; die beiden letzten Gleichungen geben uns demnach eine Beziehung zwischen den Punkten $(r, s)$ der Polkurve und den entsprechenden Punkten $(r', s')$ der Flachpunktkurve. Besonders einfach gestaltet sich dieser Zusammenhang bei den speziellen Kurbelmechanismen, zu denen wir nunmehr übergehen.

**11.** *Der gleichschenklige Kurbelmechanismus.* Wir kehren zu dem in Fig. 7 dargestellten Gelenkviereck zurück, setzen also voraus, es sei $\mathsf{AB} = \mathsf{A}A = a$ und $AB = \mathsf{B}B = b$. Dann ist $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$, mithin nach Gleichung (12) $\chi = 180^0 - \alpha$, d. h. $\angle B\mathfrak{P}K = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Ziehen wir daher $\mathfrak{P}\mathfrak{G} \parallel \mathsf{AB}$ bis $AB$, so ist $\angle B\mathfrak{P}K = \angle \mathfrak{G}\mathfrak{P}B$. Gleichung (11) verwandelt sich gegenwärtig in

$$\mathfrak{P}W = \frac{h}{\sin(\beta - \alpha)},$$

folglich wird

$$\mathfrak{P}K = \mathfrak{P}W \sin\chi = \frac{h \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = \mathfrak{P}\mathfrak{G};$$

der Punkt $K$ liegt also symmetrisch zu $\mathfrak{G}$ in Bezug auf $B\mathfrak{P}$. Hieraus folgt weiter, dafs die Dreiecke $B\mathfrak{P}K$ und $BA\mathfrak{P}$ einander ähnlich sind; demnach ist

$$\frac{BK}{B\mathfrak{P}} = \frac{B\mathfrak{P}}{BA}.$$

Setzen wir nun wieder $B\mathfrak{P} = s$, $BK = s'$ und überdies $\angle \mathfrak{P}BA = \vartheta$, $\angle KBA = \vartheta'$, so finden wir, dafs entsprechende Punkte $\mathfrak{P}$ und $K$ der Kurven $p$ und $u$ durch die Gleichungen mit einander verknüpft sind

$$s' = \frac{s^2}{b}, \quad \vartheta' = 2\vartheta. \tag{19}$$

Betrachten wir endlich die Strecken $B\mathfrak{P}$ und $BK$ bezw. als die geometrischen Bilder der komplexen Gröfsen

$$z = x + iy = se^{i\vartheta}, \quad z' = x' + iy' = s'e^{i\vartheta'},$$

so können wir das soeben erhaltene Resultat auch in folgender Weise aussprechen: *Die Flachpunktkurve $u$ entsteht aus der Polkurve $p$ durch konforme Abbildung der Koppelebene auf sich selbst mittelst der Funktion*

$$z' = \frac{z^2}{b}.$$

Die Eigenschaften der Kurve $u$ ergeben sich hiernach aus den in Art. 8 ermittelten Eigenschaften der Kurve $p$. — Spalten wir die letzte Gleichung in

$$(20) \qquad x^2 - y^2 = bx'$$

und

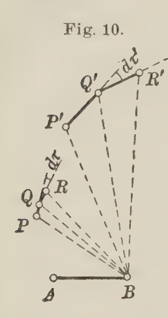
$$(21) \qquad 2xy = by'$$

und bezeichnen mit $\mathsf{E}$ die ursprüngliche, mit $\mathsf{E}'$ die transformierte Koppelebene, so erhalten wir zwischen $\mathsf{E}'$ und $\mathsf{E}$ die folgende ein-vierdeutige Beziehung: Einem reellen Punkte $C'(x', y')$ von $\mathsf{E}'$ entsprechen in $\mathsf{E}$ zwei reelle Punkte $C$, $C_1$ und zwei konjugiert imaginäre $C_2$, $C_3$, nämlich die vier Schnittpunkte der durch die Gleichungen (20) und (21) dargestellten Hyperbeln; sind $s'$, $\vartheta'$ die Polarkoordinaten von $C'$, so folgt für $C$ und $C_1$ $s = s_1 = \sqrt{bs'}$, $\vartheta = \frac{\vartheta'}{2}$, $\vartheta_1 = \pi + \frac{\vartheta'}{2}$ und für $C_2$, $C_3$ $s_2 = s_3 = i\sqrt{bs'}$, $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta'}{2}$, $\vartheta_3 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\vartheta'}{2}$. Ist $C'$ unendlich fern, so wird $C_1$ identisch mit $C$ $\left(s = \infty, \vartheta = \frac{\vartheta'}{2}\right)$; ebenso vereinigen sich $C_2$ und $C_3$ zu einem reellen unendlich fernen Punkte $\left(\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta'}{2}\right)$. Dem Punkte $A$ der Ebene $\mathsf{E}'$ ist in $\mathsf{E}$ ein Punktquadrupel zugeordnet, dessen einer Punkt mit $A$ zusammenfällt; dagegen sind $B$ und die imaginären Kreispunkte $I$ und $J$ drei selbstentsprechende Punkte von $\mathsf{E}'$ und $\mathsf{E}$ insofern, als für jeden dieser Punkte das ganze zugeordnete Quadrupel mit ihm identisch ist. — Einer in $\mathsf{E}'$ beliebig angenommenen Geraden $g'$ entspricht in $\mathsf{E}$ eine Hyperbel $g$; den acht Schnittpunkten von $g$ und $p$ sind also in $\mathsf{E}'$ ebenso viele Schnittpunkte von $g'$ und $u$ zugeordnet, d. h. *die Kurve $u$ ist von der achten Ordnung.* Geht aber $g'$ durch einen der drei Punkte $B$, $I$, $J$, so zerfällt $g$ in zwei Geraden, die sich in demselben Punkte schneiden. Es entsprechen z. B. der Geraden $C'I$ die Geraden $CI$ und $C_1I$, von denen die eine den Punkt $C_2$, die andere den Punkt $C_3$ enthält. Nun zählt der Punkt $I$ doppelt unter den Schnittpunkten von $p$ mit $CI$ und $C_1I$; folglich hat $u$ mit $C'I$ in $I$ vier zusammenfallende Punkte gemein, d. h. die imaginären Kreispunkte sind *vierfache* Punkte von $u$. Da ferner $p$ in $I$ eine Spitze mit der Tangente $IF$ besitzt, so fallen die vier Tangenten von $u$ in $I$ mit der Geraden nach dem Punkte $F'$ zusammen, der in $\mathsf{E}'$ dem Fokalzentrum $F$ von $p$ zugeordnet ist.

Die Gerade $BI$ entspricht sich selbst bei der Transformation von $\mathsf{E}$ in $\mathsf{E}'$; der Punkt $B$ ist folglich ein *Brennpunkt* von $u$ von der besonderen Beschaffenheit, dafs jede der Geraden, die ihn mit einem der beiden imaginären Kreispunkte verbindet, aufserdem noch vier zusammenfallende Punkte mit $u$ gemein hat.

Die Gerade $\mathfrak{l}$ der Fig. 8 schneidet $p$ in vier Punkten, die paarweise in Bezug auf $B$ symmetrisch liegen. Jedem dieser Paare entspricht ein *Doppelpunkt* von $u$ auf der Geraden $AB$. Ein dritter Doppelpunkt von $u$ ist der Punkt $A$, den $\mathsf{E}$ und $\mathsf{E}'$ entsprechend gemein haben. — Da die Abbildung, die $p$ in $u$ überführt, eine konforme ist, so folgt weiter, daſs die Tangenten in je zwei entsprechenden Punkten von $p$ und $u$ mit den von $B$ nach diesen Punkten gehenden Strahlen gleiche Winkel bilden. Die Kurven $p$ und $u$ berühren sich daher in ihrem gemeinsamen Doppelpunkte $A$.

Fig. 10.




Um noch die Krümmung in entsprechenden Kurvenpunkten zu untersuchen, bezeichnen wir zunächst ganz allgemein mit $k$ und $k'$ irgend zwei entsprechende Kurven von $\mathsf{E}$ und $\mathsf{E}'$, mit $P$, $Q$, $R$ drei unendlich benachbarte Punkte von $k$, mit $P'$, $Q'$, $R'$ die zugeordneten Punkte von $k'$ und setzen $BP = s$, $BP' = s'$, $\angle PBA = \vartheta$, $\angle P'BA = \vartheta'$, $\angle QBP = d\vartheta$, $\angle Q'BP' = d\vartheta'$, $PQ = d\sigma$, $P'Q' = d\sigma'$, $\angle QR$, $PQ = d\tau$, $\angle Q'R'$, $P'Q' = d\tau'$, $\angle PQB = \omega$, $\angle P'Q'B = \omega'$. (Fig. 10.) Nach dem Vorigen bildet das Kurvenelement $P'Q'$ mit $BP'$ denselben Winkel wie $PQ$ mit $BP$, und das Analoge gilt von den Elementen $Q'R'$ und $QR$; mithin ist $d\tau' - d\vartheta' = d\tau - d\vartheta$. Aus (19) folgt aber $d\vartheta' = 2d\vartheta$, also wird

$$d\tau' = d\tau + d\vartheta.$$

Ferner ergiebt sich aus den Dreiecken $BPQ$ und $BP'Q'$

$$d\sigma = \frac{s\,d\vartheta}{\sin\omega}$$

und

$$d\sigma' = \frac{s'\,d\vartheta'}{\sin\omega'}.$$

Nun ist $\omega' + d\vartheta' = \omega + d\vartheta$, also $\omega' = \omega - d\vartheta$; hieraus folgt

$$d\sigma' = 2\frac{s'}{s}d\sigma.$$

Verstehen wir jetzt unter $\varrho$ und $\varrho'$ bezw. die Krümmungsradien von $k$ und $k'$ in $P$ und $P'$, so erhalten wir

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\tau}$$

und

$$(22)\qquad \begin{aligned}\varrho' = \frac{d\sigma'}{d\tau'} = 2\frac{s'}{s}\cdot\frac{d\sigma}{d\tau + d\vartheta} = 2\frac{s'}{s}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\varrho}+\frac{\sin\omega}{s}} = 2s'\cdot\frac{\varrho}{s+\varrho\sin\omega}\\ = 2\frac{s^2}{b}\cdot\frac{\varrho}{s+\varrho\sin\omega}.\end{aligned}$$

Dabei bedeutet $\omega$ den Winkel, den die Tangente von $k$ in $P$ mit $BP$ einschliefst. — Wir wenden die gefundene Formel an auf den sich selbst entsprechenden Punkt $A$ der Kurven $p$ und $u$. Für $r = o$ und $\cos\varphi = \frac{b}{a}$ folgt aus Gleichung (9)

$$\varrho = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{b}{\sin\varphi};$$

die beiden Krümmungsmittelpunkte des Punktes $A$ von $p$ liegen daher auf der Geraden $\mathfrak{l}$. Demnach wird $\varrho \sin\omega = b$, und da auch $s = b$ ist, so geht Gleichung (22) über in $\varrho' = \varrho$, d. h. *die Kurven p und u oskulieren einander in ihrem gemeinsamen Doppelpunkte A.* Dieser zählt also achtfach unter den 32 Schnittpunkten von $p$ und $u$, und dasselbe gilt von jedem der imaginären Kreispunkte. Die übrigen acht Schnittpunkte sind in Fig. 8 imaginär.

**12.** *Der Zwillingskurbelmechanismus.* In Fig. 11 ist $\mathsf{A}\mathsf{B}BA$ ein Antiparallelogramm, also $\mathsf{A}A = \mathsf{B}B = a$, $AB = \mathsf{AB} = c$. Unter Beibehaltung der in Fig. 9 angewendeten Bezeichnungen wird t identisch mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ und $\beta = -\alpha$, $\gamma = -\delta$; die Gleichungen (11) und (12) gehen daher über in

$$\mathfrak{P}W = \frac{h \tan\delta}{2\sin^2\alpha}$$

und

$$\tan\chi = \frac{\tan^2\alpha}{\tan\delta}.$$

Verstehen wir also unter $\mathfrak{S}$ den Schnittpunkt von $WK$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$, so folgt

$$\mathfrak{P}\mathfrak{S} = \mathfrak{P}W\tan\chi = \frac{h}{2\cos^2\alpha},$$

und hieraus ergiebt sich für die Konstruktion des Ballschen Punktes $K$ die Regel: Man ziehe durch $\mathfrak{H}$ zu $B\mathsf{B}$ eine Parallele, die $A\mathsf{B}$ in $\mathfrak{L}$, $A\mathsf{A}$ in $\mathfrak{R}$ schneidet, errichte in $\mathfrak{R}$ zu $A\mathsf{A}$ ein Lot und bestimme seinen Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$; dann ist $K$ der Fufspunkt des Lotes von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$. Bedeutet nämlich $\mathfrak{T}$ den Schnittpunkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ und $A\mathsf{B}$, so ist

$$\tan\angle\mathfrak{L}\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{L}}{\mathfrak{P}\mathfrak{T}} = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{T}\tan\alpha}{\mathfrak{P}\mathfrak{T}} = \frac{A\mathfrak{T}\cot\delta\tan\alpha}{A\mathfrak{T}\cot\alpha} = \frac{\tan^2\alpha}{\tan\delta},$$

also $\angle\mathfrak{L}\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \chi$. — Die Gerade $\mathfrak{P}K$ geht auch durch den Schnittpunkt von $B\mathsf{A}$ mit der Parallelen durch $\mathfrak{H}$ zu $A\mathsf{A}$.

Aus den Kreisvierecken $A\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{L}K\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ folgt

$$\mathfrak{P}A \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{R} = \mathfrak{P}\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{S} = \mathfrak{P}\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{P}K;$$

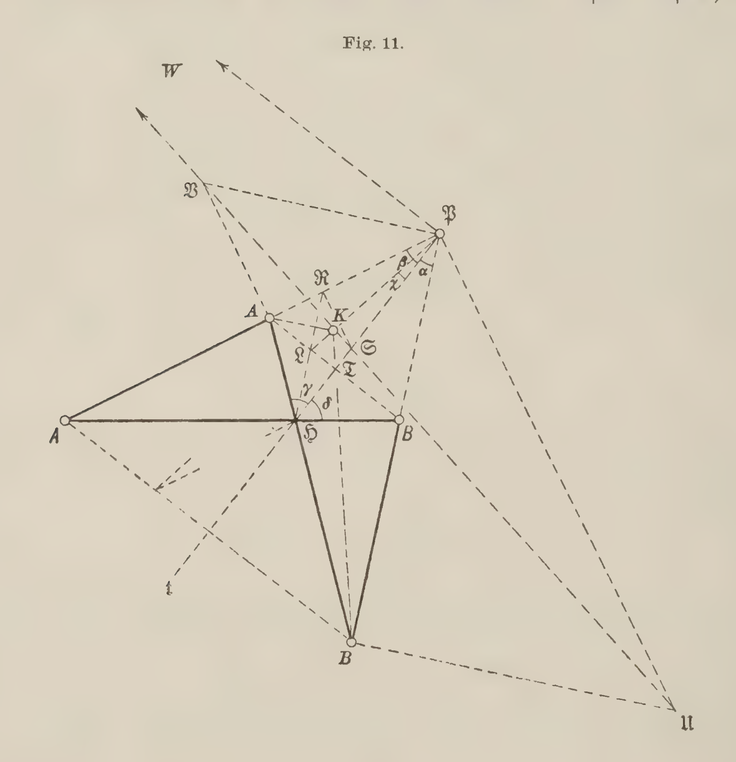
mithin ist auch $A\mathfrak{R}K\mathfrak{L}$ ein Kreisviereck, also $\angle KA\mathfrak{P} = \angle K\mathfrak{L}\mathfrak{R} = \angle K\mathfrak{P}B$. Ebenso ist $\angle \mathfrak{P}BK = \angle A\mathfrak{P}K$; die Dreiecke $A\mathfrak{P}K$ und $\mathfrak{P}BK$ sind demnach einander ähnlich, und es ist

$$\frac{A\mathfrak{P}}{B\mathfrak{P}} = \frac{AK}{\mathfrak{P}K} = \frac{\sin \angle A\mathfrak{P}K}{\sin \angle KA\mathfrak{P}} = \frac{\sin \angle A\mathfrak{P}K}{\sin \angle K\mathfrak{P}B}.$$

Man erhält daher den Punkt $K$ auf andere Weise auch dadurch, dafs man den Winkel $A\mathfrak{P}B$ durch die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ im Verhältnis $\frac{A\mathfrak{P}}{B\mathfrak{P}}$ teilt und den Winkel $K\mathfrak{P}B$ in $A$ an $A\mathfrak{P}$ anträgt.

Es ist ferner $\angle AK\mathfrak{L} = \angle \mathfrak{L}KB = \angle A\mathfrak{P}B$. Hieraus folgt eine dritte Konstruktion von $K$: Man ziehe $A\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{U} \perp \mathfrak{P}A$, sowie

Fig. 11.




$B\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{B} \perp \mathfrak{P}B$ und fälle von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ ein Lot; dieses trifft $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ in $K$. Da nämlich die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{B}$, $A$, $K$ ein Kreisviereck bilden, so ist $\angle AK\mathfrak{L} = \angle A\mathfrak{B}\mathfrak{P} = \angle \mathrm{A}\mathfrak{P}B$ u. s. w.

Wenn in der Koppelebene die Polkurve $p$ bereits gezeichnet vorliegt, so liefern die beiden zuletzt abgeleiteten Konstruktionen zu jedem Punkte $\mathfrak{P}$ von $p$ den entsprechenden Punkt $K$ der *Flachpunktkurve* $u$ ohne Benutzung der zugehörigen Lage des Gliedes $\mathsf{AB}$. Die hiernach

zwischen den Kurven $p$ und $u$ bestehende Beziehung führt uns auch sofort zur Gleichung von $u$. Es ist nämlich

$$\frac{AK}{A\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{P}K}{B\mathfrak{P}}$$

und

$$\frac{\mathfrak{P}K}{A\mathfrak{P}} = \frac{BK}{B\mathfrak{P}},$$

folglich

$$\frac{AK}{A\mathfrak{P}^2} = \frac{BK}{B\mathfrak{P}^2},$$

oder mit Anwendung der früher gebrauchten Bezeichnungen

(23) $$s^2 r' = r^2 s'.$$ [1]

Aus den Dreiecken $AKB$ und $A\mathfrak{P}B$ folgt ferner

$$\cos \angle AKB = \frac{r'^2 + s'^2 - c^2}{2r's'}$$

und

$$\cos \angle A\mathfrak{P}B = \frac{r^2 + s^2 - c^2}{2rs}.$$

Nun ist aber $\angle AKB = 2 \cdot \angle A\mathfrak{P}B$, also

$$\frac{r'^2 + s'^2 - c^2}{2r's'} = \frac{(r^2 + s^2 - c^2)^2}{2r^2s^2} - 1$$

oder nach (23)

(24) $$r's'(2r^2 + 2s^2 - c^2) - r^2s^2 = 0.$$

Dabei genügen $r$ und $s$ der Gleichung (10) der Polkurve $p$, die wir auch schreiben können

$$(r^2 - s^2)^2 - 2a^2(r^2 + s^2) + a^4 = 0.$$

Bringen wir mit Hilfe von (23) die beiden letzten Gleichungen auf die Form

$$\left(\frac{r^2}{r'}\right)^2 - 2(r' + s')\frac{r^2}{r'} + c^2 = 0$$

und

$$(r' - s')\left(\frac{r^2}{r'}\right)^2 - 2a^2(r' + s')\frac{r^2}{r'} + a^4 = 0,$$

so ergiebt sich durch Elimination von $\frac{r^2}{r'}$

$$4a^2(a^2 - c^2)(r' + s')^2[(r' - s')^2 - a^2] + [c^2(r' - s')^2 - a^4]^2 = 0;$$

mithin lautet die vollständige Gleichung der Flachpunktkurve

(25) $$\{4a^2(a^2 - c^2)(r' + s')^2[(r' - s')^2 - a^2] + [c^2(r' - s')^2 - a^4]^2\} \cdot \{4a^2(a^2 - c^2)(r' - s')^2[(r' + s')^2 - a^2] + [c^2(r' + s')^2 - a^4]^2\} = 0,$$

---

1) Folgt auch aus den Gleichungen (17) und (18).

oder, wenn zur Abkürzung $r'^2 + s'^2 = V$, $r'^2 - s'^2 = W$ gesetzt wird,

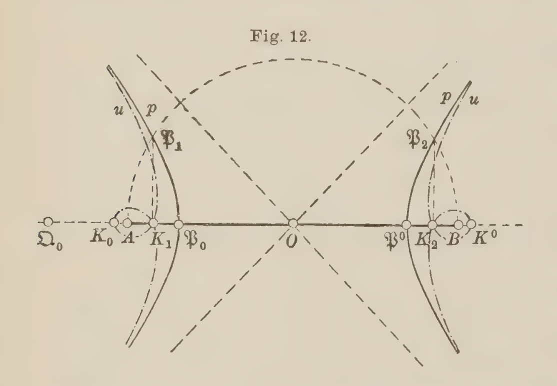
$$(26) \qquad 16a^4(a^2-c^2)^2\,W^2(W^2-2a^2V-a^4)$$

$$+\,8a^2(a^2-c^2)[c^4W^2(2V^2-W^2)-a^2c^4V(4V^2-3W^2)-2a^4c^2VW^2$$
$$+\,2a^6c^2(2V^2-W^2)+a^8W^2-a^{10}V]+(c^4W^2-2a^4c^2V+a^8)^2=0.$$

Bezeichnen wir mit $O$ den Mittelpunkt von $AB$, mit $x'$ und $y'$ die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes $K$ für $O$ als Anfangspunkt und $OA$ als positive $x$-Achse, so wird $r'^2 = \left(\frac{c}{2} - x'\right)^2 + y'^2$, $s'^2 = \left(\frac{c}{2} + x'\right)^2 + y'^2$, also $V = 2(x'^2 + y'^2) + \frac{c^2}{2}$, $W = -2cx'$. Durch Einführung dieser Werte verwandelt sich (26) in eine Gleichung sechsten Grades, welche nur gerade Potenzen von $x'$ und $y'$ enthält, und zwar ist das Glied sechsten Grades, von einem konstanten Faktor abgesehen, gleich $(x'^2 + y'^2)^2[(c^2 - a^2)x'^2 - a^2y'^2]$. Die Flachpunktkurve ist also eine in Bezug auf die Koordinatenachsen symmetrische *bizirkulare Kurve sechster Ordnung.* Ihre Asymptoten

$$(c^2 - a^2)x'^2 - a^2y'^2 = 0$$

sind identisch mit denen eines Kegelschnitts, der $A$ und $B$ zu Brennpunkten und $a$ zur Hauptachse hat, d. h. der Polkurve $p$. In Fig. 12, welche für das in Fig. 11 gezeichnete Gelenkviereck die Kurven $p$ und $u$ darstellt, ist $c > a$, also $p$ eine Hyperbel.




Verstehen wir unter $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Schnittpunkte von $p$ mit dem Halbkreis über dem Durchmesser $AB$, unter $K_1$ und $K_2$ die entsprechenden Punkte von $u$, so folgt aus der dritten Konstruktion des Ballschen Punktes sofort, daſs $K_1$ und $K_2$ mit den Fuſspunkten der von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ auf $AB$ gefällten Lote zusammenfallen. Nun entsprechen $K_1$ und $K_2$ aber auch denjenigen Punkten von $p$, die zu $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in Bezug auf $AB$ symmetrisch liegen; sie sind also *Doppelpunkte* von $u$. Die Gerade $AB$ schneidet $u$ überdies in den Punkten $K_0$ und $K^0$, die den auf ihr liegenden Scheiteln $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}^0$ von $p$ entsprechen. Nach (23) ist

$$\frac{AK_0}{BK_0} = \left(\frac{A\mathfrak{P}_0}{B\mathfrak{P}_0}\right)^2;$$

bedeutet demnach $\mathfrak{Q}_0$ den vierten harmonischen Punkt zu $A$, $B$, $\mathfrak{P}_0$, also den Krümmungsmittelpunkt von $p$ für den Scheitel $\mathfrak{P}_0$, so ist $K_0$ der Mittelpunkt von $\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}_0$.

Setzen wir in (25) $r' = 0$, so ergiebt sich

$$[(2a^2 - c^2)s'^2 - a^4]^4 = 0.$$

Von den beiden Geraden, die den Punkt $A$ mit den imaginären Kreispunkten verbinden, hat folglich jede mit $u$ vier zusammenfallende Punkte gemein; $A$ und $B$ sind also singuläre *Brennpunkte* von $u$. Aus (26) erkennen wir ferner, dafs die Kurve $u$ zwei Fokalzentra hat, die in gleichen Abständen von $O$ auf der $x$- oder $y$-Achse liegen, je nachdem $c \gtrless a$ ist. — Die Kurven $p$ und $u$ berühren sich nur in den unendlich fernen Punkten von $p$ und schneiden sich überdies in acht (imaginären) Punkten; setzen wir nämlich in (25) $r' - s' = a$, also $r' + s' = 2r' - a$, so folgt

$$c^4(2r' - a)^4 + 2a^4(2a^2 - 3c^2)(2r' - a)^2 + a^6(4c^2 - 3a^2) = 0.$$

Wir wollen endlich noch zeigen, dafs die zwischen $p$ und $u$ bestehende Beziehung abermals mit einer *konformen Abbildung* der Koppelebene zusammenhängt. Sind $x$ und $y$ die Koordinaten von $\mathfrak{P}$ für das zuletzt benutzte rechtwinklige Koordinatensystem, so wird

$$2r^2 + 2s^2 - c^2 = 4(x^2 + y^2),$$

und demnach geht Gleichung (24) über in

$$4r's'(x^2 + y^2) = r^2s^2.$$

Dann ergiebt sich aber aus (23)

$$4(x^2 + y^2)r'^2 = r^4$$

und

$$4(x^2 + y^2)s'^2 = s^4$$

oder

$$4(x^2 + y^2)\left[\left(x' - \frac{c}{2}\right)^2 + y'^2\right] = \left[\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2\right]^2$$

und

$$4(x^2 + y^2)\left[\left(x' + \frac{c}{2}\right)^2 + y'^2\right] = \left[\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2\right]^2.$$

Hieraus folgt

$$2x'(x^2 + y^2) = x\left(x^2 + y^2 + \frac{c^2}{4}\right)$$

und

$$2y'(x^2+y^2) = y\left(x^2+y^2-\frac{c^2}{4}\right),^{1)}$$

also

$$2(x^2+y^2)(x'+iy') = (x+iy)(x^2+y^2)+\frac{c^2}{4}(x-iy)$$

oder

$$2(x+iy)(x'+iy') = (x+iy)^2+\frac{c^2}{4}.$$

*Die Kurve $u$ geht demnach aus der Polkurve $p$ hervor, wenn wir die Koppelebene mittels der komplexen Funktion*

$$z' = \frac{1}{2z}\left(z^2+\frac{c^2}{4}\right)$$

*in sich transformieren.*

## III. Die Übergangskurve $q$.

**13.** In Fig. 13 ist $\mathsf{AB}BA$ wieder ein beliebiger Kurbelmechanismus; für die gezeichnete Koppellage $AB$ sollen diejenigen Punkte der Koppelebene bestimmt werden, die augenblicklich einen Selbstberührungspunkt ihrer Bahn durchschreiten.

Angenommen, der Punkt $Q$ genüge der gestellten Aufgabe, so existiert eine zweite Koppellage $A'B'$, für die er sich wieder an der mit $Q$ bezeichneten Stelle befindet; es ist also $\triangle ABQ \cong \triangle A'B'Q$. Die Geradenpaare $\mathsf{A}A$, $\mathsf{B}B$ und $\mathsf{A}A'$, $\mathsf{B}B'$ schneiden sich bezw. in den Polen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ der betrachteten Koppellagen; mithin sind $\mathfrak{P}Q$ und $\mathfrak{P}'Q$ die Normalen der Bahnkurve des Punktes $Q$, und da diese Kurve in $Q$ einen Selbstberührungspunkt haben soll, so liegen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ und $Q$ auf einer Geraden. Die sechs Geraden von $\mathsf{A}$ und $\mathsf{B}$ nach $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $Q$ sind entsprechende Strahlen zweier perspektiven Strahlenbüschel, und da $\mathsf{A}Q$ und $\mathsf{B}Q$ die Winkel $\mathfrak{P}'\mathsf{A}\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'\mathsf{B}\mathfrak{P}$ halbieren, so ist der vierte harmonische Strahl zu $\mathsf{A}\mathfrak{P}$, $\mathsf{A}\mathfrak{P}'$ und $\mathsf{A}Q$ senkrecht zu $\mathsf{A}Q$; ihm entspricht im anderen Büschel das Lot in $\mathsf{B}$ zu $\mathsf{B}Q$, und die beiden Lote schneiden sich auf $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ im vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{Q}$ zu $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ und $Q$. Die Punkte $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $Q$, $\mathfrak{Q}$ liegen also auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt sich auf $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ befindet. Markieren wir nun

---

1) Die vorhergehenden Gleichungen liefern zunächst

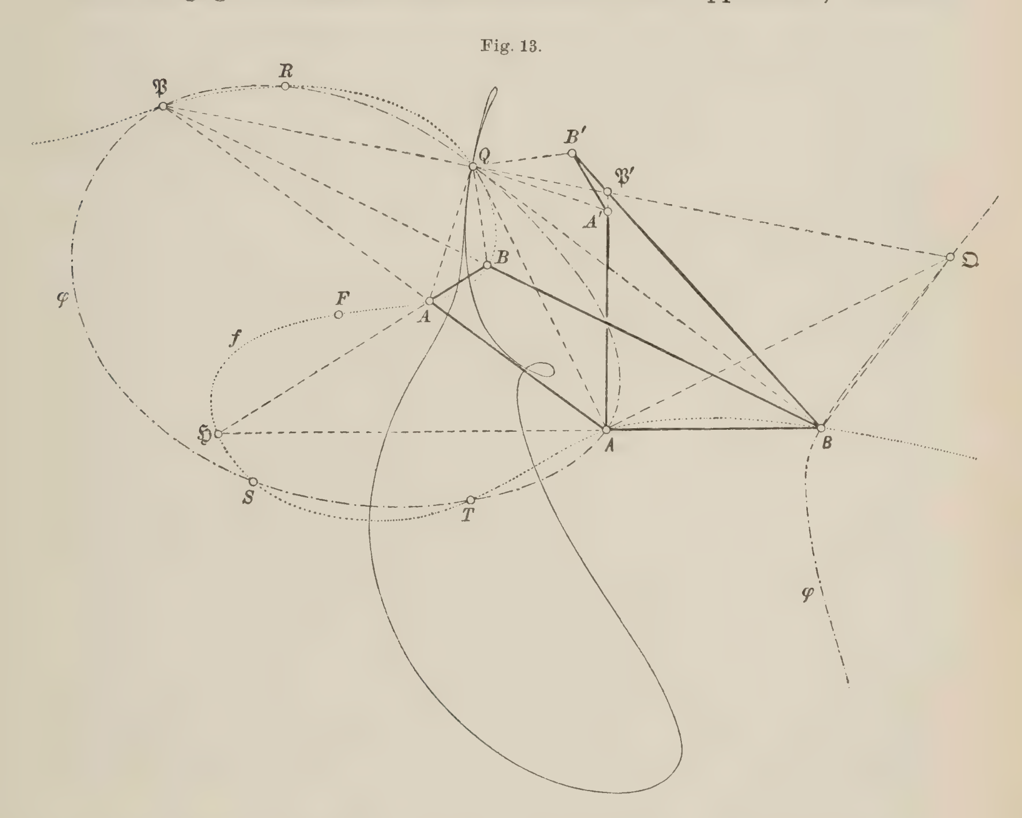
$$2y'(x^2+y^2) = \pm\, y\left(x^2+y^2-\frac{c^2}{4}\right).$$

Hier mufs aber das positive Vorzeichen gewählt werden, weil in Fig. 12 jedem Punkte $\mathfrak{P}$, der aufserhalb des Halbkreises $AB$ in der oberen Halbebene liegt, ein Punkt $K$ derselben Halbebene entspricht.

auf jedem der durch A und B gelegten Kreise die beiden Endpunkte des nach 𝔓 gehenden Durchmessers, so erhalten wir bekanntlich eine spezielle Kurve dritter Ordnung $\varphi$, die als *Fokalkurve* bezeichnet wird. Diese Kurve, die 𝔓 zum Fokalzentrum und A und B zu Grundpunkten hat, ist demnach der erste geometrische Ort des gesuchten Punktes $Q$.

Aus der Gleichheit der Winkel $AQA'$ und $BQB'$ folgt ferner, dafs $\angle AQ\mathsf{A} = \angle BQ\mathsf{B}$ und folglich $\angle AQB = \angle \mathsf{A}Q\mathsf{B}$ ist, und diese Beziehung gilt bekanntlich für alle Punkte der Koppelebene, die sich

Fig. 13.




augenblicklich überhaupt in einem Doppelpunkte ihrer Bahn befinden. Der Punkt $Q$ liegt daher auf einer zweiten Fokalkurve $f$, dem Ort der Brennpunkte aller Kegelschnitte, welche die Seiten des Vierecks $\mathsf{AB}BA$ berühren. Die Kurve $f$ geht durch A, B, $B$, $A$, 𝔓 und durch den Schnittpunkt ℌ von AB und $AB$. Ihr Fokalzentrum ist der Schnittpunkt $F$ der den Dreiecken 𝔓AB, 𝔓$AB$, ℌA$A$ und ℌB$B$ umgeschriebenen Kreise, und ihre Mittellinie geht durch die Mittelpunkte der Strecken A$B$, B$A$ und 𝔓ℌ. Da die Punktpaare (A, $B$), (B, $A$), (𝔓, ℌ) aus jedem Punkte von $f$, also auch aus 𝔓, durch eine symme-

trische Involution projiziert werden, so bildet die Tangente von $f$ in $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P}$B denselben Winkel, wie $\mathfrak{P}$A mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$; sie fällt demnach zusammen mit der Tangente der Polkurve $p$.

Die Kurven $\varphi$ und $f$ haben aufser $\mathfrak{P}$, A, B und den imaginären Kreispunkten noch vier Punkte mit einander gemein; *für jede Koppellage giebt es also im allgemeinen vier Systempunkte, die sich augenblicklich in einem Selbstberührungspunkte ihrer Bahn befinden.* In Fig. 13 schneiden sich $\varphi$ und $f$ in vier reellen Punkten $Q$, $R$, $S$, $T$. Die Bahnkurve des Punktes $Q$ ist in der Figur angegeben.

**14.** Betrachten wir die Koppel $AB$ als fest und zeichnen die Strecke AB in einer Reihe neuer Lagen $A_1B_1$, $A_2B_2 \cdots$, so erhalten wir durch Wiederholung der eben ausgeführten Konstruktion die Fokalkurven $\varphi_1$ und $f_1$, $\varphi_2$ und $f_2 \cdots$ bezw. mit den Schnittpunkten $Q_1$, $R_1$, $S_1$, $T_1$; $Q_2$, $R_2$, $S_2$, $T_2 \cdots$, und dann ergiebt sich als Ort dieser sämtlichen Punktquadrupel die *Übergangskurve* $q$.

Da die Bahnkurve des Punktes $Q$ in ihrem Selbstberührungspunkte zwei unendlich benachbarte Doppelpunkte besitzt, so geht durch $Q$ auch die zu $f$ unendlich benachbarte Kurve der Schar $f$, $f_1$, $f_2 \cdots$ Die Kurven $f$, $f_1$, $f_2 \cdots$ umhüllen daher einerseits die Übergangskurve $q$, andererseits die Polkurve $p$.

Nach früheren Darlegungen[1]) ist $q$ eine Kurve zehnter Ordnung mit Doppelpunkten in $A$ und $B$ und vierfachen Punkten in den imaginären Kreispunkten. Aufser den vier eben genannten singulären Punkten haben die Kurven $p$ und $q$ noch 36 Punkte, darunter 12 Berührungspunkte, mit einander gemein.[2]) — Von den 30 Schnittpunkten der Kurven $q$ und $f$ entfallen je vier auf die imaginären Kreispunkte und je zwei auf $A$, $B$, $Q$, $R$, $S$, $T$. Die übrig bleibenden zehn Schnittpunkte sind solche Punkte der Koppelebene, die sich augenblicklich in einem gewöhnlichen Knotenpunkte ihrer Bahn befinden, und deren Bahnkurven in ihrem weiteren Verlauf noch einen Selbstberührungspunkt aufweisen.

1) Über die Doppelpunkte der Koppelkurve a. a. O. S. 303 u. 372.
2) Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks a. a. O. S. 271.

# Über Zentralbewegung.

Von J. v. Vieth in Dresden.

Unter den Bewegungen eines Massenpunktes, die so erfolgen, als würde derselbe von einem festen Punkte, dem sogenannten Zentrum, angezogen oder abgestofsen, kommen besonders zwei Arten in der Natur vor, erstens die Bewegung eines Planeten um die Sonne, die wir nach dem daraus abgeleiteten Anziehungsgesetz die Newtonsche Bewegung nennen können, zweitens die elastische Schwingung eines Moleküls um die Gleichgewichtslage, wobei das Molekül eine Ellipse beschreibt, deren Mittelpunkt die Gleichgewichtslage ist, während die Anziehung dem Radiusvektor proportional ist. Letztere Bewegung nennt man die harmonische.

Diese zwei Bewegungsarten zeichnen sich aber nicht nur durch ihr bevorzugtes Vorkommen in der Natur vor allen möglichen Arten der Zentralbewegung aus, sondern auch durch zahlreiche rein theoretische Eigenheiten. Vor allem hat J. Bertrand (Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, Comptes rendus tome 77 pag. 849) nachgewiesen, dafs diese beiden Anziehungsgesetze unter allen möglichen nur vom Radiusvektor abhängenden die einzigen sind, die stets eine in sich zurücklaufende Bahnkurve ergeben, wenn man eine beliebige Anfangslage und eine innerhalb gewisser Grenzen beliebige Anfangsgeschwindigkeit des bewegten Punktes annimmt.

Ein kleiner Teil der grofsen Fülle von sonstigen Eigenschaften dieser beiden Bewegungsarten soll im folgenden dargestellt werden als besondere Fälle der Eigenschaften einer allgemeineren Bewegungsart, indem wir von der Form der Bahnkurve ausgehen und eine Bahnkurve untersuchen, die die Newtonsche und harmonische Bahnkurve als besondere Fälle enthält.

Sodann werden noch einige allgemeine Gesetze der Zentralbewegung und überhaupt der Bewegung eines Punktes abgeleitet und auf diese Fälle angewendet werden.

## I. Form der Bahnkurve.

Das Zentrum $S$ sei der Koordinatenanfangspunkt, $r$ der Radiusvektor des Kurvenpunktes $P$, $\varphi$ die Anomalie in Bezug auf eine beliebige Achse.

Wir betrachten die Kurve

$$r^n = \frac{p^n}{1 + \varepsilon \cos n\varphi},$$

wo $n$ eine beliebige Zahl, $p$ eine beliebige Strecke und $\varepsilon$ eine beliebige Zahl bedeutet.

Für $n = 1$ wird diese Gleichung:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

was die Kegelschnittsgleichung mit dem Brennpunkt $S$ darstellt, also die Newtonsche Bahnkurve. $p$ ist in diesem Falle der sogenannte Parameter, $\varepsilon$ die numerische Exzentrizität, $\varphi = 0$ entspricht dem Perihel.

$\varepsilon < 1$ giebt eine Ellipse, $\varepsilon = 1$ eine Parabel, $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

Für $n = 2$ wird die Gleichung:

$$r^2 = \frac{p^2}{1 + \varepsilon \cos 2\varphi}.$$

Dies ist ein Kegelschnitt mit dem Mittelpunkt $S$, also für $\varepsilon < 1$, wo es eine Ellipse wird, die Kurve der harmonischen Bewegung. Die kleine Halbachse $\frac{p}{\sqrt{1+\varepsilon}}$ liegt in der Koordinatenachse, die grofse Halbachse ist $= \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon}}$, die lineare Exzentrizität $= p\sqrt{\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}}$.

Für $\varepsilon = 1$ stellt die Gleichung zwei zur Achse senkrechte Geraden dar, für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

Um für gröfsere ganzzahlige Werte von $n$ eine Vorstellung von der Form der Bahnkurve zu erhalten, beachte man, dafs ein Minimalwert von $r$ (Perihel) eintritt, so oft $\cos n\varphi = 1$ ist, also für die $n$ Richtungen $\varphi = 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \cdots$

Wenn $\varepsilon < 1$ ist, bleibt $r$ stets endlich und sein Maximalwert (Aphel) tritt ein, so oft $\cos n\varphi = -1$ ist, also für $\varphi = \frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \cdots$

Wenn $\varepsilon < 1$ ist, stellt also die Gleichung eine geschlossene den Punkt $S$ umgebende Linie dar, die aus $n$ kongruenten nur um je $\frac{2\pi}{n}$ gedrehten Teilen besteht. Jeder dieser Teile besteht aus einer Bewegung vom Perihel zum Aphel und einer symmetrisch dazu gebildeten Rückbewegung. Für negative und gebrochene Werte von $n$ gilt das Entsprechende mit sinngemäfser Umdeutung, für $\varepsilon = 1$ werden die Maxima von $r$ unendlich grofs und für $\varepsilon > 1$ werden die Figuren noch etwas komplizierter.

## II. Die dieser Bahnkurve entsprechende Zentralkraft.

Betrachtet man nun irgend eine Kurve obiger Art mit den beliebigen Konstanten $n$, $p$ und $\varepsilon$, so kann sie auf unendlich vielfältige Weise als Bahn eines von Kräften bewegten Massenpunktes angesehen werden. Wenn aber die beschleunigende Kraft stets in Richtung des Radiusvektor $r$ (oder entgegengesetzt) wirken soll, so ist die von $r$ in einem Zeitteilchen bestrichene doppelte Fläche $df$ konstant. Unter Annahme eines beliebigen Wertes von $df$ sind dann die Geschwindigkeiten und damit auch die Beschleunigungen für alle Punkte der Kurve bestimmt und können als Funktionen einer der Koordinaten $r$ und $\varphi$ des Kurvenpunktes dargestellt werden.

Um die Formeln anschaulicher zu machen, fassen wir das Zeitdifferential als Zeiteinheit auf, so dafs wir die entsprechenden Differentiale $dr$, $d\varphi$, $df$ direkt als Geschwindigkeiten bezeichnen können.

Zunächst ist durch die Gleichung $r^2 . d\varphi = df$ der jeweilige Wert der Winkelgeschwindigkeit bestimmt:

$$d\varphi = \frac{df}{r^2}.$$

Die wirkliche Geschwindigkeit setzt sich an jeder Stelle aus zwei auf einander senkrechten Komponenten zusammen, deren eine, die rotierende, senkrecht auf $r$ steht und den Wert $r d\varphi = \frac{df}{r}$ hat, während die andere, die radiale, die Zunahme $dr$ von $r$ ist.

Um diese letztere auch als Funktion von $df$ und den Koordinaten des Kurvenpunktes auszudrücken, hat man nur die Kurvengleichung beiderseits zu differenzieren und dann $d\varphi$ durch $\frac{df}{r^2}$ zu ersetzen.

Durch kurze Rechnung ergiebt sich:

$$dr = \frac{\varepsilon . r^{n-1} \sin n\varphi \, df}{p^n}.$$

Die halbe Summe der Quadrate dieser beiden Geschwindigkeitskomponenten ist, wenn man die Masse des bewegten Punktes $= 1$ setzt, die lebendige Kraft desselben:

$$L = \frac{df^2}{2r^2} + \frac{\varepsilon^2 r^{2n-2} \sin^2 n\varphi \, df^2}{2p^{2n}}.$$

Aus der Bahnkurve folgt

$$\sin^2 n\varphi = 1 - \cos^2 n\varphi = 1 - \left(\frac{p^n - r^n}{r^n \varepsilon}\right)^2.$$

Setzt man dies ein, so ergiebt sich:

$$L = \frac{df^2 r^{n-2}}{p^n} - \frac{(1-\varepsilon^2) df^2 r^{2n-2}}{2p^{2n}}.$$

Nachdem so die lebendige Kraft als Funktion der einzigen Variabeln $r$ dargestellt ist, erhält man die abstofsende Beschleunigung $g$ alsDifferentialquotient von $L$ in Bezug auf $r$:

$$g = \frac{(n-2) df^2 r^{n-3}}{p^n} - \frac{(n-1)(1-\varepsilon^2) df^2 r^{2n-3}}{p^{2n}}.$$

Soll also unsere Bahnkurve durch eine vom Zentrum $S$ ausgehende beschleunigende Kraft erzeugt werden, so mufs die letztere diesen zweigliedrigen Wert haben, der aufser von den Konstanten der Kurvengleichung und $df$ nur von $r$ abhängt.

Im Falle $n = 1$ verschwindet das zweite Glied und man erhält das Newtonsche Anziehungsgesetz:

$$g = -\frac{df^2}{pr^2},$$

da ein negativer Wert von $g$ Anziehung bedeutet.

Im Falle $n = 2$ verschwindet das erste Glied und man erhält das harmonische Anziehungsgesetz:

$$g = -\frac{(1-\varepsilon^2) df^2 r}{p^4},$$

das allerdings nur für $\varepsilon < 1$ eine Anziehung ergiebt. Für $\varepsilon = 1$ wird $g = 0$, wie wir denn schon gesehen haben, dafs in diesem Falle die Bewegung geradlinig wird; für $\varepsilon > 1$, wo die Kurve eine Hyperbel ist, wird $g$ positiv, bedeutet also eine Abstofsung. Für gröfsere Werte von $n$ besteht unter der Annahme $\varepsilon < 1$ die Beschleunigung aus einem abstofsenden und aus einem anziehenden Teile, welch letzterer bei wachsendem $r$ schneller zunimmt als der erstere.

$g$ wird $= 0$ für $r = p \cdot \sqrt[n]{\frac{n-2}{(n-1)(1-\varepsilon^2)}}$, was also den Wendepunkten der Kurve entsprechen mufs.

Wenn $\varepsilon = 1$ ist, wobei die Kurve aus $n$ sich ins Unendliche erstreckenden Zweigen besteht, bleibt nur der abstofsende Teil übrig:

$$g = \frac{(n-2) df^2 r^{n-3}}{p^n},$$

abgesehen von den schon vorher betrachteten Fällen $n = 1$ und $n = 2$.

Während aber jede Kurve unserer Form durch eine zentrale Beschleunigung von der Form:

$$g = c_1 r^{n-3} - c_2 r^{2n-3}$$

erzeugt werden kann, wo $c_1$ und $c_2$ jedes für sich alle möglichen Werte haben kann, die von den Konstanten der Bahnkurve und von $df$ abhängen, wird umgekehrt eine solche beschleunigende Kraft im allgemeinen keine Bahnkurve dieser Form hervorbringen, wenn der Anfangszustand des bewegten Punktes beliebig gewählt wird. Dies folgt schon aus dem anfangs angeführten Beweise von Bertrand; es läfst sich aber für diese Klasse von Zentralkräften leichter direkt nachweisen.

Der Anfangszustand des bewegten Punktes ist völlig charakterisiert durch seinen Abstand $r_0$ von $S$, seine radiale Geschwindigkeitskomponente $dr_0$ und die Flächengeschwindigkeit $df$, während wir die Anomalie $\varphi_0$ der Anfangslage unter die zu bestimmenden Konstanten der Bahnkurve rechnen müssen, da ja die Lage der Achse dieser Kurve zunächst beliebig ist.

Für die zwei in der Kurvengleichung vorkommenden Konstanten $p$ und $\varepsilon$ und für die Anomalie $\varphi_0$ der Anfangslage ergeben sich nun folgende vier Gleichungen:

$$r_0^n = \frac{p^n}{1 + \varepsilon \cos n \varphi_0},$$

$$dr_0 = \frac{\varepsilon r_0^{n-1} \sin n \varphi_0 \, df}{p^n},$$

$$c_1 = \frac{(n-2) df^2}{p^n},$$

$$c_2 = \frac{(n-1)(1-\varepsilon^2) df^2}{p^{2n}}.$$

Diese vier Gleichungen lassen sich im allgemeinen nicht durch drei Werte von $p$, $\varepsilon$ und $\varphi_0$ befriedigen, und zwar ergiebt eine nähere Untersuchung, dafs dies nur möglich ist, wenn zwischen den Konstanten $c_1$ und $c_2$ des Anziehungsgesetzes eine Beziehung stattfindet, die vom Anfangszustand des bewegten Punktes abhängt.

In den Fällen $n = 1$ und $n = 2$ fällt je eine der zwei letzten Gleichungen weg oder wird vielmehr zur Gleichung $0 = 0$, dann lassen sich stets drei passende Werte von $p$, $\varepsilon$ und $\varphi_0$ bestimmen und die Anziehungsgesetze $g = \frac{c_1}{r^2}$ resp. $g = -c_2 r$ geben also, wie bekannt, bei jeder Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit des bewegten Punktes eine Kurve der betreffenden Art.

### III. Die Schmiegungsbewegungen dieser Bahnkurve.

O. Staude (Ein Beitrag zur Diskussion der Bewegungsgleichungen eines Punktes, Mathem. Annalen, Band 41) bezeichnet mit Schmiegungsbewegung diejenige Bewegung, die entstehen würde, wenn von einem bestimmten Momente an die Beschleunigung eines bewegten Punktes nach Länge und Richtung konstant bliebe. Jede Schmiegungsbewegung ist also eine sogenannte Wurfparabel.

Betrachten wir nun irgend einen Moment der hier behandelten Zentralbewegung, so hat die Beschleunigung

$$g = \frac{(n-2)\,df^2 r^{n-3}}{p^n} - \frac{(n-1)(1-\varepsilon^2)\,df^2 r^{2n-3}}{p^{2n}}$$

die Richtung des momentanen Radiusvektor $r$, bleibt also bei der Schmiegungsbewegung parallel zu $r$ und verändert nur den radialen Teil der Geschwindigkeit des Punktes, während der rotierende Teil $\frac{df}{r}$ konstant bleibt und die Geschwindigkeit im Scheitelpunkte der Parabel darstellt. Nun ist der Parameter $p'$ einer Wurfparabel gleich dem Quadrat der Scheitelgeschwindigkeit, dividiert durch die Beschleunigung, also:

$$p' = \frac{df^2}{r^2 g} = \frac{p^{2n}}{(n-2)p^n r^{n-1} - (n-1)(1-\varepsilon^2) r^{2n-1}}.$$

Bei der Newtonschen Bewegung ist $n = 1$ und also

$$p' = -p,$$

wobei das Minuszeichen nur daher rührt, daſs unser $g$ die von $S$ abstoſsende Beschleunigung bedeutet und hier eigentlich durch $-g$ ersetzt werden müſste.

Dies giebt den von Staude bewiesenen Satz:

„Für die Newtonsche Bewegung ist der Parameter der Schmiegungsbewegung zu allen Zeitpunkten derselbe, nämlich gleich dem Parameter des wirklichen Bahnkegelschnitts.“

Bei der harmonischen Bewegung ist $n = 2$ und somit der Parameter der Schmiegungsparabel:

$$p' = -\frac{p^4}{(1-\varepsilon^2) r^3}.$$

Da nun nach Früherem die Halbachsen dieser harmonischen Bahnellipse $a = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon}}$ und $b = \frac{p}{\sqrt{1+\varepsilon}}$ sind, so ist:

$$p' = -\frac{a^2 b^2}{r^3}.$$

## IV. Die Geschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit an irgend einer Stelle unserer Bahnkurve besteht aus der rotierenden Komponente $= \frac{df}{r}$ und der radialen $= \frac{\varepsilon r^{n-1} \sin n\varphi\, df}{p^n}$. Um eine bestimmte Vorstellung zu erhalten, nehmen wir an, die Koordinatenachse sei nach rechts gerichtet und die Bewegung sei entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung. Die resultierende Geschwindigkeit bezeichnen wir mit $d\mathfrak{r}$ nach dem Vorgange von Föppl, der Streckengröfsen, bei denen es aufser der Länge auch auf die Richtung ankommt, mit deutschen Buchstaben bezeichnet.

Um $d\mathfrak{r}$ noch auf andere Weise in Komponenten zerlegen zu können, versuchen wir es zunächst durch einen einheitlichen analytischen Ausdruck darzustellen und zwar als komplexe Zahl, indem wir in Richtung der Koordinatenachse verlaufende Strecken durch reelle Zahlen ausdrücken, während eine um den Winkel $\varphi$ im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers gedrehte Strecke den Faktor $e^{i\varphi}$ erhält. Wir müssen also die radiale Geschwindigkeitskomponente mit $e^{i\varphi}$ multiplizieren und die rotierende noch aufserdem mit $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, dann erhalten wir durch Addition beider Ausdrücke die durch eine komplexe Zahl nach Länge und Richtung vollkommen charakterisierte Geschwindigkeit:

$$d\mathfrak{r} = ie^{i\varphi} \cdot \frac{df}{r} + e^{i\varphi} \cdot \frac{\varepsilon r^{n-1} \sin n\varphi\, df}{p^n}$$

$$= ie^{i\varphi} \cdot \frac{df \,.\, r^{n-1}}{p^n} \left[\frac{p^n}{r^n} - i\varepsilon \sin n\varphi\right].$$

Da nun $\frac{p^n}{r^n}$ nach der Kurvengleichung $= 1 + \varepsilon \cos n\varphi$ ist, so wird:

$$d\mathfrak{r} = ie^{i\varphi} \cdot \frac{df \,.\, r^{n-1}}{p^n} \cdot (1 + \varepsilon \,.\, e^{-n\varphi i}).$$

Zerlegt man dies in zwei Glieder entsprechend den zwei Gliedern in der Klammer, so erhält man zwei neue Komponenten der Geschwindigkeit. Die erste ist proportional $r^{n-1}$ und senkrecht auf $r$, also wieder von rotierender Richtung, die zweite ist an Länge $\varepsilon$mal so grofs als die erste und um das $n$fache des Winkels $\varphi$ im Sinne des Uhrzeigers gegen die erste gedreht.

Bei der Newtonschen Bewegung, wo $n = 1$ ist, wird obiger Ausdruck:

$$d\mathfrak{r} = ie^{i\varphi} \cdot \frac{df}{p} + i\varepsilon \cdot \frac{df}{p}.$$

Die Geschwindigkeit kann also in zwei Komponenten zerlegt werden, die beide konstante Länge haben, während die erste stets senkrecht auf $r$, die zweite stets senkrecht auf der Achse steht.

Bei der harmonischen Bewegung ist $n = 2$ und man erhält

$$d\mathfrak{r} = ie^{i\varphi} \cdot \frac{dfr}{p^2} + ie^{-i\varphi} \cdot \varepsilon \cdot \frac{dfr}{p^2}.$$

Beide Komponenten sind also proportional $r$ und liegen symmetrisch in Bezug auf eine auf der Achse errichtete Senkrechte. Im Falle $\varepsilon = 1$ sind sie aufserdem gleich lang und ergeben als Resultante eine Senkrechte auf der Achse von konstanter Länge, was unseren früheren Resultaten entspricht, wonach in diesem Falle die Bahnkurve aus zwei Senkrechten auf der Achse besteht, während die Beschleunigung $g$ konstant $= 0$ war.

Diese Resultate für die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ lassen sich auch durch einfache geometrische Betrachtungen finden; hier sind sie abgeleitet worden als Spezialfälle einer allgemeineren Bewegungsart.

Für die Summe der Geschwindigkeiten in zwei entgegengesetzten Punkten der Bahnkurve läfst sich ein für alle Zentralbewegungen giltiger Satz ableiten, wobei wir den Begriff der Geschwindigkeit noch inhaltlich erweitern können, indem wir jetzt aufser der Länge und Richtung auch noch die Gerade, in der die Bewegung stattfindet, als zum Begriff der Geschwindigkeit gehörig ansehen. Einen so gefafsten Begriff wollen wir nach Grafsmann einen Linienteil oder Stab nennen und dadurch symbolisch darstellen, dafs wir neben die durch einen deutschen Buchstaben bezeichnete Strecke einen beliebigen durch einen grofsen lateinischen Buchstaben bezeichneten Punkt der betreffenden Geraden schreiben.

Beiläufig kann man nach Grafsmanns allgemeiner Definition der multiplikativen Verknüpfung zweier Gröfsen (Ausdehnungslehre von 1844, 2. Auflage 1878, § 9 und 10) diese Verbindung von Punkt und Strecke als Produkt ansehen.

Betrachten wir also nun eine ganz beliebige geschlossene Bahnkurve, die durch vom Punkte $S$ ausgehende Zentralkräfte irgend welcher Art entsteht, wenn diese nur stets in Richtung des Radiusvektor wirken, so legen wir irgend eine Gerade durch $S$ und erhalten so zwei entgegengesetzte Punkte $P_1$ und $P_2$ der Bahnkurve mit den Geschwindigkeiten $d\mathfrak{r}_1$ und $d\mathfrak{r}_2$. Die entsprechenden Linienteile heifsen also $P_1 d\mathfrak{r}_1$ und $P_2 d\mathfrak{r}_2$.

Ferner bilden wir die Summe der Linienteile, indem wir statt der Punkte $P_1$ und $P_2$ den Schnittpunkt $Q$ der betreffenden Geraden

wählen und von dort aus die zwei Strecken nach Länge und Richtung an einanderfügen; die Summe ist also $Q(d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2)$.

Analog wird die Differenz $Q(d\mathfrak{r}_1 - d\mathfrak{r}_2)$ gebildet, indem wir die zweite Strecke in entgegengesetzter Richtung nehmen und addieren.

Durch Ausführung der einfachen Konstruktion wird sofort klar, dafs die vier Linienteile:

$$Qd\mathfrak{r}_2,\ Q(d\mathfrak{r}_1 - d\mathfrak{r}_2),\ Qd\mathfrak{r}_1,\ Q(d\mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{r}_2)$$

ein harmonisches Strahlenbüschel bilden, das die durch $S$ gelegte Gerade in vier harmonischen Punkten schneidet.

Der erste Linienteil geht durch $P_2$, der dritte durch $P_1$, der zweite ist derjenige Linienteil, der zu dem ersten addiert werden mufs, um den dritten zu erhalten.

Nun entsteht aber aus der Geschwindigkeit in $P_2$ diejenige in $P_1$ durch Addition einer unendlichen Zahl von Beschleunigungen, die alle durch den Punkt $S$ gerichtet sind; die Summe derselben, als Linienteile aufgefafst, giebt also ebenfalls einen durch $S$ gerichteten Linienteil, daher geht der zweite Strahl des Strahlenbüschels durch $S$ und somit endlich der vierte durch denjenigen Punkt $T$ der durch $S$ gelegten Geraden, der durch $P_1$ und $P_2$ von $S$ harmonisch getrennt liegt, d. h. durch den betreffenden Punkt der Polarkurve des Punktes $S$ in Bezug auf die Bahnkurve.

Dreht man nun diese die vier harmonischen Punkte $P_2 S P_1 T$ enthaltende Gerade um $S$ um einen unendlich kleinen Winkel, so wird die neue Gerade von den vier harmonischen Strahlen wieder in vier harmonischen Punkten $P_2' S P_1' T'$ geschnitten. $P_2'$ und $P_1'$ sind wieder Punkte der Bahnkurve, $T'$ also ein $T$ unendlich benachbarter Punkt obiger Polarkurve, folglich ist der vierte Strahl eine Tangente dieser Polarkurve. Daraus ergiebt sich der allgemeine Satz:

„*Bei jeder geschlossenen Zentralbewegung, wo nur durch das Zentrum gerichtete Beschleunigungen wirken, ist die Summe der als Linienteile aufgefafsten Geschwindigkeiten in zwei entgegengesetzten Bahnpunkten stets eine Tangente an die Polarkurve des Zentrums S in Bezug auf die Bahnkurve.*“

Für den Radiusvektor $R$ der Polarkurve hat man die Gleichung:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}.$$

Bei der von uns behandelten Bahnkurve $r^n = \frac{p^n}{1 + \varepsilon \cos n\varphi}$ ist also die Gleichung der Polarkurve:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} \cdot \sqrt[n]{1 + \varepsilon \cos n\varphi} - \frac{1}{p} \cdot \sqrt[n]{1 + \varepsilon \cos n(\varphi + \pi)}.$$

Für einen geradzahligen Wert von $n$, also z. B. bei der harmonischen Bewegung, sind $r_1$ und $r_2$ stets gleich, also stets $R = \infty$, d. h. die Polarkurve wird zur unendlich fernen Geraden. In der That folgt auch direkt aus dem Flächensatz und dem Satze der lebendigen Kraft, dafs dann die Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Punkten gleich und entgegengesetzt gerichtet sind; ihre Summe ist also dasselbe, was man bei Beschleunigungen ein Kräftepaar nennt, das bekanntlich durch ein unendlich kurzes Stück der unendlich fernen Geraden charakterisiert werden kann.

Für einen ungeraden Wert von $n$ wird die Gleichung der Polarkurve, da dann $\cos n(\varphi + \pi) = -\cos n\varphi$ ist:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{p} \cdot \sqrt[n]{1 + \varepsilon \cos n\varphi} - \frac{1}{p} \cdot \sqrt[n]{1 - \varepsilon \cos n\varphi}.$$

Diese erstreckt sich nur ins Unendliche, so oft $r_1 = r_2$ oder $\cos n\varphi = 0$ wird, d. h. für die Werte:

$$\varphi = \frac{\pi}{2n}, \quad \frac{3\pi}{2n}, \quad \frac{5\pi}{2n} \cdots$$

Im Falle der Newtonschen Bewegung $n = 1$ wird die Gleichung der Polarkurve:

$$\frac{2}{R} = \frac{2\varepsilon \cos \varphi}{p}; \quad R = \frac{p}{\varepsilon \cos \varphi}.$$

Dies ist aber, wie voraus zu sehen war, die Gleichung der dem Brennpunkt $S$ entsprechenden Direktrix des Kegelschnitts. Die Geschwindigkeiten in zwei entgegengesetzten Punkten einer Newtonschen Bewegung, als Linienteile aufgefafst, haben also als Summe stets ein Stück der Direktrix.

## V. Erzeugung derselben Bahnkurve durch andere beschleunigende Kräfte.

Eine Ellipse wird durch eine von dem einen Brennpunkt ausgehende Zentralkraft nach Newton erzeugt; dieselbe Ellipse entsteht aber auch durch eine von dem anderen Brennpunkt ausgehende Zentralkraft derselben Art, nur dafs dann die Geschwindigkeiten an den einzelnen Stellen andere sind.

Im folgenden soll ein allgemeiner für alle Bewegungen eines freien Punktes in einer Ebene giltiger Satz abgeleitet werden, der obigen selbstverständlichen Satz als Spezialfall enthält. Wir betrachten also irgend eine ebene Kurve $K$; um diese als Bahnkurve eines bewegten Punktes zu charakterisieren, mufs jedem Punkte der Kurve eine bestimmte Geschwindigkeit zugeordnet werden; dadurch ist

dann auch die Beschleunigung für jede Stelle der Kurve nach Gröſse und Richtung bestimmt. Nun verschieben wir alle diese Geschwindigkeiten $d\mathfrak{r}$ parallel, so daſs sie einen irgendwo in der Ebene angenommenen Anfangspunkt $A$ erhalten, dann bilden die Endpunkte derselben eine unendlich kleine Kurve $H$. Diese Kurve heiſst bekanntlich nach Hamilton der Hodograph.

Eine Tangente an $H$ giebt die Richtung der betreffenden Beschleunigung an. Um die Gröſse der Beschleunigung festzustellen, braucht man noch den Krümmungsradius $\varrho$ der Bahnkurve an der entsprechenden Stelle.

Während nämlich in einem Zeitteilchen, das wir ja der Anschaulichkeit wegen stets als Zeiteinheit ansehen, der bewegte Punkt auf der Kurve $K$ den Weg $d\mathfrak{r}$ zurücklegt, dreht sich die Richtung der Bewegung um den Winkel $d\alpha = \frac{d\mathfrak{r}}{\varrho}$, also bildet der der neuen Lage des bewegten Punktes entsprechende Radiusvektor $d\mathfrak{r}$ des Hodographen mit dem alten denselben Winkel. Die im Sinne der Streckenrechnung gebildete Differenz beider $d\mathfrak{r}$ ist aber die Beschleunigung $d^2\mathfrak{r}$, also ist letztere nach Länge und Richtung das zwischen den Schenkeln des Winkels $d\alpha = \frac{d\mathfrak{r}}{\varrho}$ liegende Stück der Kurve $H$.

Wählt man eine neue Art der Bewegung auf derselben Kurve $K$ in der Art, daſs man alle bisher angenommenen Geschwindigkeiten mit demselben beliebigen Zahlenfaktor $n$ multipliziert, so werden alle Radienvektoren der Kurve $H$ $n$mal so groſs, ebenso wird auch jeder Winkel $d\alpha$ $n$mal so groſs, also wird jede Beschleunigung $n^2$mal so groſs.

Eine in dieser Weise aus der zuerst angenommenen abgeleitete neue Bewegungsart wollen wir als mit der ersten gleichartig bezeichnen, wie denn auch in unseren früheren Formeln alle Geschwindigkeiten den beliebigen Faktor $df$, alle Beschleunigungen den Faktor $df^2$ enthielten.

Nun können wir aber auf unserer Kurve $K$ für alle Punkte auch ganz beliebige andere Geschwindigkeiten $d\mathfrak{r}'$ annehmen und erhalten demgemäſs auch eine ganz andere hodographische Kurve $H'$ um denselben Punkt $A$. Da aber die neuen Geschwindigkeiten mit den alten überall dieselbe Richtung haben müssen, so liegen die einem Kurvenpunkt entsprechenden Radienvektoren $d\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{r}'$ der Kurven $H$ und $H'$ stets aufeinander.

Besonders einfache Beziehungen zwischen zwei Bewegungsarten auf derselben Kurve ergeben sich nun, wenn man die Geschwindigkeiten $d\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{r}'$ so wählt, daſs sie überall dasselbe Produkt $\varDelta^2$ haben.

Zwei solche Bewegungen sollen reziprok heifsen; ist die eine derselben gegeben, so ist die andere auch bestimmt bis auf einen beliebigen vom Werte von $\Delta$ abhängigen konstanten Geschwindigkeitsfaktor.

Die hodographischen Kurven $H$ und $H'$ sind dann inverse Kurven in Bezug auf einen um $A$ mit dem Radius $\Delta$ geschlagenen Kreis. Infolge einer bekannten Eigenschaft der inversen Kurven bilden nun entsprechende Kurvenelemente derselben entgegengesetzt gleiche Winkel mit dem Lote auf dem betreffenden Radiusvektor. Bedenkt man nun, dafs die Kurvenelemente der Hodographen die Richtungen der Beschleunigungen angeben, während das Lot auf dem Radiusvektor der Kurvennormale der wirklichen Bahnkurve parallel ist, so ergiebt sich zunächst der Satz, dafs bei zwei reziproken Bewegungen auf einer Kurve die Beschleunigungen an jeder Stelle in Bezug auf die Kurvennormale symmetrisch gerichtet sind.

Um auch für die Gröfsen $g$ und $g'$ der Beschleunigungen zweier reziproker Bewegungen eine Beziehung zu finden, betrachten wir wiederum die zwei übereinanderliegenden Hodographen.

Die Beschleunigung der einen Bewegung ist nach Obigem das zwischen den Schenkeln des Winkels $d\alpha = \frac{d\mathfrak{r}}{\varrho}$ liegende Kurvenstück der Kurve $H$. Wenn nun dasselbe mit dem Lote auf dem Radiusvektor $d\mathfrak{r}$ den Winkel $\psi$ bildet, so ist die Projektion der Beschleunigung $g$ auf dieses Lot $= g\cos\psi$, und diese Projektion bildet die Basis eines im Vergleich zur Länge unendlich schmalen gleichschenkligen Dreiecks, dessen Winkel an der Spitze $A = \frac{d\mathfrak{r}}{\varrho}$ und dessen Schenkel $= d\mathfrak{r}$ ist, somit ist:

$$g\cos\psi = \frac{d\mathfrak{r}^2}{\varrho}; \qquad g = \frac{d\mathfrak{r}^2}{\varrho\cos\psi}.$$

Bei der anderen Bewegung ist $\varrho$ dasselbe und $\psi$ auch ebenso grofs, nur an der anderen Seite jenes Lotes liegend, also erhält man:

$$g' = \frac{d\mathfrak{r}'^2}{\varrho\cos\psi}.$$

Man hat also die Proportion:

$$g : g' = d\mathfrak{r}^2 : d\mathfrak{r}'^2 = L : L'.$$

Wir haben somit den für alle Bewegungen eines freien Punktes gültigen Satz gefunden:

*„Bei zwei reziproken Bewegungen eines Punktes auf einer und derselben Kurve, d. h. bei solchen Bewegungen, deren Geschwindigkeiten an jeder Stelle das konstante Produkt $\Delta^2$ haben, verhalten sich die Beschleunigungen beider Bewegungen an jeder Stelle wie die Quadrate der be-*

*treffenden Geschwindigkeiten und weichen von der Kurvennormale nach beiden Seiten um denselben Winkel ab.*"

Nun erst nehmen wir an, dafs die eine Bewegung auf der Kurve $K$ eine Zentralbewegung ist, d. h. dafs alle Beschleunigungen $g$ durch einen festen Punkt $S$ gehen. Es liegt nun die Frage nahe, unter welchen Bedingungen auch die reziproke Bewegung eine Zentralbewegung ist mit irgend einem Zentrum $S'$. Es ist nach obigem Satz klar, dafs dies dann und nur dann der Fall sein wird, wenn die von $S$ und $S'$ nach einem Kurvenpunkt gezogenen Radienvektoren stets zwei gleiche Winkel mit der Kurvennormalen einschliefsen. Diese geometrische Eigenschaft haben aber nur die Kegelschnitte und deren Brennpunkte $S$ und $S'$, also ist nur bei der Newtonschen Bewegung die reziproke Bewegung wieder eine Zentralbewegung und zwar mit dem anderen Brennpunkt als Zentrum.

Es ist von vornherein klar, dafs diese Bewegung wieder dem Newtonschen Gravitationsgesetz entsprechen mufs, wenn es sich um eine Ellipse handelt.

Wenn die Newtonsche Bewegung eine Parabel mit dem Brennpunkt $S$ ergiebt, so ist die Beschleunigung der reziproken Bewegung parallel zur Achse gerichtet; ihr Wert ergiebt sich aus der Proportion

$$g' : g = d\mathfrak{r}'^2 : d\mathfrak{r}^2.$$

Nun ist nach den früheren Formeln in diesem Falle

$$g = -\frac{df^2}{pr^2}, \quad d\mathfrak{r}^2 = \tfrac{1}{2} L = \frac{df^2}{2pr}, \quad d\mathfrak{r}'^2 = \frac{\Delta^4}{d\mathfrak{r}^2},$$

also giebt dies, in obiger Gleichung eingesetzt:

$$g' = -\frac{df^2}{pr^2} \cdot \frac{\Delta^4 \cdot 4p^2r^2}{df^4} = \text{einem konstanten Wert.}$$

Also ist, was auch vorauszusehen war, die reziproke Bewegung die sogenannte Wurfbewegung in derselben Parabel.

Wenn endlich die Newtonsche Bewegung einen den Punkt $S$ umgebenden Hyperbelast ergiebt, so mufs die Beschleunigung $g'$ der reziproken Bewegung ebenfalls zu $g$ und damit zum Radiusvektor $r$ in Bezug auf die Kurvennormale symmetrisch gerichtet sein, also durch den anderen Brennpunkt gehen, aber von diesem weg gerichtet sein, also eine abstofsende Kraft darstellen. Um die Gröfse derselben zu bestimmen, wählen wir die willkürliche Konstante $\Delta$ so, dafs für beide Bewegungen sich dieselbe, wenn auch entgegengesetzt drehende, Flächengeschwindigkeit $df$ ergiebt. Da die Richtung der Bewegung mit den nach $S$ und $S'$ gerichteten Radienvektoren $r$ und $r'$ gleiche

Winkel bildet, so mufs wegen der Gleichheit der Flächen die Proportion gelten:

$$d\mathfrak{r} : d\mathfrak{r}' = r' : r$$

also

$$d\mathfrak{r}^2 : d\mathfrak{r}'^2 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2}.$$

Nun verhalten sich $g$ und $g'$ auch wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Da aber $g$ dem Quadrate von $r$ umgekehrt proportional ist, so mufs $g'$ dem Quadrate von $r'$ umgekehrt proportional sein. Demnach wird der den Punkt $S$ umgebende Hyperbelast auch erzeugt durch eine vom anderen Brennpunkt ausgehende Beschleunigung, die dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional, dabei aber abstofsend wirkt.

Bei der harmonischen Bewegung geht die Beschleunigung $g'$ der dazu gehörigen reziproken Bewegung durch keinen festen Punkt, kann aber natürlich stets in 2 Komponenten zerlegt werden, die durch die auf einem Lot zur Koordinatenachse liegenden Brennpunkte $F_1$ und $F_2$ der Ellipse gehen, wenn wir uns hierbei auf den Fall der Ellipse beschränken.

Wir bezeichnen die von $F_1$ und $F_2$ nach dem bewegten Punkte $P$ gezogenen Radienvektoren mit $r_1$ und $r_2$ und wollen zunächst die Beschleunigung $g$ und lebendige Kraft $L$ der harmonischen Bewegung durch $r_1$ und $r_2$ ausdrücken.

Nach den Formeln des Abschnitts II ist für die harmonische Bewegung

$$g = -\frac{(1-\varepsilon^2)\, df^2 r}{p^4} = -k \cdot 2r \cdot$$

Die Konstante $k = \frac{(1-\varepsilon^2)\, df^2}{2p^4}$ läfst sich durch $df$ und die Halbachsen $a$ und $b$ der Ellipse ausdrücken; letztere sind nämlich nach Abschnitt I $= \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon}}$ und $\frac{p}{\sqrt{1+\varepsilon}}$, mithin $a^2 b^2 = \frac{p^4}{1-\varepsilon^2}$ und also $k = \frac{df^2}{2a^2b^2}$.

Da nun $2r$ die Diagonale des aus den Seiten $r_1$ und $r_2$ gebildeten Parallelogramms ist, so zerfällt $g$ in die zwei nach $F_1$ und $F_2$ gerichteten Komponenten

$$g_1 = -kr_1, \quad g_2 = -kr_2.$$

Demnach ist die lebendige Kraft:

$$L = C - \frac{k}{2} r_1^2 - \frac{k}{2} r_2^2.$$

Für die Konstante $C$ ergiebt sich durch Betrachtung des einen Perihelpunktes der Wert $2ka^2 = \frac{k}{2}(r_1 + r_2)^2$, also wird:

$$L = kr_1 r_2,$$

welcher Wert aber nur unter der Voraussetzung $r_1 + r_2 = 2a$, also nur für die Punkte der gerade hier betrachteten Bahnkurve richtig ist. Übrigens hätte sich dieser Ausdruck für $L$ auch aus dem im Abschnitt II gefundenen durch rein geometrische Betrachtungen ableiten lassen.

Nun lassen sich auch die Werte für die lebendige Kraft $L'$ und die Beschleunigung $g'$ der reziproken Bewegung leicht aufstellen.

Da das Produkt der Geschwindigkeiten beider Bewegungen an jeder Stelle einen konstanten Wert $\varDelta^2$ hat, so ist:

$$L \cdot L' = \frac{\varDelta^4}{4}.$$

Da sich ferner die Beschleunigungen wie die lebendigen Kräfte verhalten, so ist:

$$g' = \frac{g \cdot L'}{L} = -\frac{k \cdot 2r \cdot L'}{kr_1 r_2} = -2r \cdot \frac{L'}{r_1 r_2}.$$

Nun liegt $g'$ zu $g$ symmetrisch in Bezug auf die Kurvennormale, $r_1$ und $r_2$ liegen aber auch dazu symmetrisch, folglich bildet $g'$ mit seinen zwei nach den Brennpunkten $F_1$ und $F_2$ gerichteten Komponenten $g_1'$ und $g_2'$ ein Parallelogramm, welches dem oben erwähnten Parallelogramm mit der Diagonale $2r$ und den Seiten $r_1$ und $r_2$ ähnlich ist und nur verkehrt darüber liegt. Man erhält aus dem Ausdrucke für $g'$ die nach $F_1$ gerichtete Komponente $g_1'$, indem man den Faktor $2r$ durch $r_2$ ersetzt:

$$g_1' = -r_2 \cdot \frac{L'}{r_1 r_2} = -\frac{L'}{r_1}.$$

Entsprechend ist die nach $F_2$ gerichtete Komponente:

$$g_2' = -\frac{L'}{r_2}.$$

Setzt man hierin $L' = \frac{\varDelta^4}{4L} = \frac{\varDelta^4}{4kr_1 r_2}$, so erhält man für die nach den Brennpunkten gerichteten Komponenten, in die die Beschleunigung der zur harmonischen reziproken Bewegung zerfällt, die von den Radienvektoren abhängigen Ausdrücke:

$$g_1' = -\frac{\varDelta^4}{4kr_1^2 r_2}, \quad g_2' = -\frac{\varDelta^4}{4kr_1 r_2^2}.$$

Während aber aus der vorgelegten durch die Bahnkurve und die Geschwindigkeiten völlig bestimmten Bewegungsart sich dieses eigentümliche Anziehungsgesetz nach zwei festen Zentren ergiebt, wird nicht umgekehrt dieses Anziehungsgesetz bei jedem beliebigen Anfangszustand des bewegten Punktes eine Bewegung dieser Art erzeugen, vielmehr ist es von vornherein klar, dafs dies unmöglich ist, wenn schon die gegebene Anfangsgeschwindigkeit nicht in die Tangente an die Ellipse fällt, die durch die festen Zentren als Brennpunkte und die Anfangslage des bewegten Punktes als Kurvenpunkt bestimmt ist.

Es liegt nun hier der Gedanke nahe, diese Bewegung auf der Ellipse, wobei die lebendige Kraft $L' = \frac{\varDelta^4}{4kr_1r_2}$ ist, einmal nicht als freie Bewegung aufzufassen, sondern als Zwangsbewegung, indem der Punkt durch irgend einen reibungslosen Mechanismus gezwungen werde, sich nur auf dieser Ellipse zu bewegen, deren Gleichung $r_1 + r_2 = 2a$ ist. Da wir die Masse des Punktes $= 1$ setzen, so deckte sich der Begriff der Kraft mit dem der Beschleunigung, so lange es sich um eine freie Bewegung handelte. Bei dieser freien Bewegung sind also die auf den Punkt wirkenden von $F_1$ und $F_2$ ausgehenden Anziehungskräfte $= g_1'$ und $g_2'$, wenn die verlangte Bewegung herauskommen soll.

Bei der Zwangsbewegung kann noch eine beliebig sich ändernde, aber stets in die Kurvennormale fallende Kraft hinzukommen, denn da diese sowohl wie der reibungslose Mechanismus weder Arbeit leistet noch verzehrt, so erhält man überall dieselbe lebendige Kraft, also genau dieselbe Bewegung wie vorher. Da ferner die Kurvennormale den Winkel zwischen $r_1$ und $r_2$ halbiert, so zerfällt diese neu hinzukommende Kraft in zwei beliebige aber stets gleiche Komponenten, die zu $g_1'$ und $g_2'$ zu addieren oder von ihnen zu subtrahieren sind, ohne dafs dadurch die Bewegung des Punktes eine Änderung erleidet.

Unter Annahme der Bedingungsgleichung $r_1 + r_2 = 2a$ kann also diese Bewegung auf unendlich verschiedene Arten durch zwei von $F_1$ und $F_2$ ausgehende Anziehungskräfte erzeugt werden.

Wir wählen nun die zu $g_1'$ und $g_2'$ zu addierenden Kraftkomponenten $= \frac{\varDelta^4}{8akr_1r_2}$, also abstofsend, und erhalten somit für die neue von $F_1$ ausgehende Kraft den Wert

$$g_1'' = -\frac{\varDelta^4}{4kr_1^2r_2} + \frac{\varDelta^4}{8kar_1r_2}$$

$$= -\frac{\varDelta^4}{4k}\left(\frac{1}{r_1^2r_1} - \frac{1}{2ar_1r_2}\right) = -\frac{\varDelta^4}{8ka}\cdot\frac{1}{r_1^2} = -\frac{C}{r_1^2}.$$

Analog wird die von $F_2$ ausgehende Kraft:

$$g_2' = -\frac{\Delta^4}{8ka} \cdot \frac{1}{r_2^2} = -\frac{C}{r_2^2}.$$

Diese Kräfte stellen nun aber das Newtonsche Gravitationsgesetz dar.

Nehmen wir umgekehrt an, dafs diese beiden Kräfte auf einen zunächst freien Punkt wirken, so wird dessen lebendige Kraft für irgend einen Punkt der Ebene:

$$= C\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + C_1.$$

Nimmt man nun für den Punkt die Bedingungsgleichung:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

hinzu, so verwandelt sich dieser Ausdruck in den Ausdruck

$$C \cdot \frac{2a}{r_1 \cdot r_2} + C_1 = \frac{\Delta^4}{4kr_1 r_2} + C_1.$$

Dies wird aber für den ganzen Verlauf der Bewegung identisch mit dem früheren Wert von $L'$, wenn $C_1 = 0$, d. h. wenn an irgend einer Stelle beide Werte identisch sind.

Daraus ergiebt sich folgende Beziehung zwischen der Newtonschen und der harmonischen Bewegung:

„*Wenn ein Punkt auf einer Ellipse sich zu bewegen gezwungen ist und dabei von den zwei Brennpunkten aus von Kräften angezogen wird, die dem Newtonschen Anziehungsgesetz* $\frac{C}{r_1^2}$ *und* $\frac{C}{r_2^2}$ *entsprechen, und wenn aufserdem an irgend einer Stelle die lebendige Kraft des Punktes* $L' = C\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ *ist, so ist die entstehende Bewegung reziprok zu der freien harmonischen Bewegung auf derselben Ellipse, d. h. die Geschwindigkeiten beider Bewegungen haben an jeder Stelle dasselbe Produkt.*“

# Zur mechanischen Auflösung von Gleichungen.

## Eine elektrische Gleichungs-Maschine.

Von Leopold Kann an der k. k. Bergakademie in Leoben.

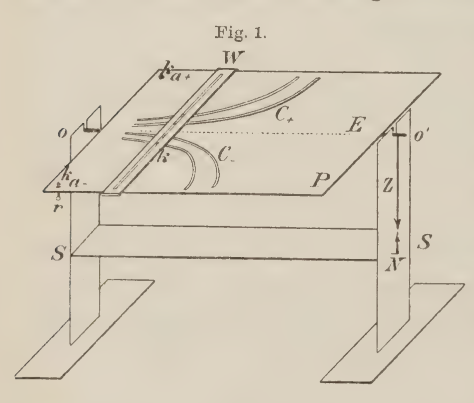
Als ich mich zuerst mit dem Problem der mechanischen Gleichungsauflösung beschäftigte und damals als Lösung eine Gleichungswage Herrn Professor Mehmke vorlegte, teilte mir derselbe freundlichst mit, daſs ein ähnlicher Gedanke bereits von L. Lalanne in den Comptes rendus der Pariser Akademie, t. 11 (1841) p. 859 und p. 959 veröffentlicht worden sei.

Nunmehr glaube ich, einen gänzlich verschiedenen und vollkommeneren Apparat vorführen zu können: einen elektrischen Gleichungslöser.

Nur möchte ich trotzdem gerne als Einleitung die Gleichungswage voranschicken; teils weil der Weg nicht ganz uninteressant sein dürfte, auf dem ich zur (vorläufig) endgültigen Lösung gelangt bin, teils weil dieselbe die Erklärung der letzteren wesentlich erleichtern und vereinfachen wird.

Die Gleichungswage (Figur 1). Aufgabe derselben ist es, die reellen Wurzeln einer beliebigen Gleichung beliebigen Grades mechanisch auffinden zu lassen: Sie besteht im wesentlichen aus einem Ständer $S$ und einer Kurvenplatte $P$, die — gut ausbalanciert — in die Ausschnitte des ersteren mit ihren Achsenfortsätzen $o$, $o'$ so eingelegt wird, daſs die an $o'$ angebrachte Zunge $Z$ auf die Nullmarke $N$ einspielt.

Fig. 1.




In die Kurvenplatte (aus Blech oder Karton) sind Kurven $C$ geschnitten, z. B. für $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ u. s. w. (Natürlich können auch beliebige andere genommen werden, wie: $y = x^{3/2}$, $y = e^x$, etc.).

Der Maſsstab für die Ordinaten dieser Kurven wird aus naheliegenden Gründen für die höheren Potenzen reduziert, so wird z. B. für $y = x^2$ nur der zehnte, für $y = x^5$ nur der hundertste Teil des $y$ genommen; dies gilt für $x$-Werte von 1 aufwärts. Von 0 bis 1 gilt das Umgekehrte; auch wird es vorteilhaft sein, für diesen Bereich die

Kurven auf einer anderen Platte im vergröfserten Mafsstab zu schneiden, weil sie sich sonst zu stark drängen, und gesondert zu behandeln.

Von allen solchen Kurven wird eine $C_+$ und ihr Spiegelbild (bezüglich der Mittellinie $oo'$) $C_-$ geschnitten. Durch die Kurvenschlitze wird ein Stift mit einem Köpfchen $k$ und einem Ringe $r$ gesteckt.

Alle diese Köpfchen kommen in den geradlinigen Spalt des Wurzelsuchers $W$ zu liegen, der nur — senkrecht zur Mittellinie — parallel zu sich selbst verschiebbar ist.

Zur Wage gehört nun auch noch ein Gewichtsatz, der folgendermafsen eingerichtet ist:

Wählen wir als Einheit z. B. $1g$ für $y = x$, dessen Mafsstab der natürliche sei, so befinden sich in der ersten Reihe des Gewichtsatzes eine Anzahl von Gewichten (mit Häkchen versehen) von $1g$, $2g$, $3g$ u. s. w., bezeichnet mit: $x$, $2x$, $3x$, u. s. w.; entsprechend dem — wie oben erwähnt — reduzierten Mafsstab für $y = x^2$ in der zweiten Reihe Gewichte von $10g$, $20g$, $30g$ u. s. w. bezeichnet mit: $x^2$, $2x^2$, $3x^2$ u. s. w. (Verfährt man für den Bereich von 0 bis 1, wie oben angegeben, so müssen natürlich auch die Gewichte in umgekehrter Reihenfolge genommen werden.)

Aufserdem ist noch eine Reihe von Gewichten in entsprechender Reduktion für die Konstanten vorhanden und bezeichnet mit 1, 2, 3 etc.

Soll nun z. B. die Gleichung: $0 = 3x^5 - 4x^3 + 6x - 9$ aufgelöst werden, so entnimmt man dem Gewichtsatz aus der fünften Reihe das Gewicht $3x^5$ und hängt es mit seinem Häkchen in den Ring $r$ des Kurvenschlitzes $y = x^5$, der mit $+$ bezeichnet ist; das Gewicht $4x^3$ kommt in den Ring des $-$ -Kurvenschlitzes $y = x^3$; $6x$ wieder in den Ring des $+$ -Kurvenschlitzes $y = x$; und schliefslich 9 in den Ring des stationären Stiftes $-a$.

Jetzt wird der Wurzelsucher $W$ mit all den durch ihn gehenden Köpfchen und den daran hängenden Gewichten so lange parallel zu sich selbst verschoben, bis die Zunge $Z$ auf Null einspielt, also Gleichgewicht eingetreten ist.

Nunmehr kann auf der Millimeterteilung $E$ der Wert $x$ einer Wurzel ($w_1$) abgelesen werden; dann wird $W$ weiterverschoben, bis wieder Gleichgewicht eintritt, $w_2$ abgelesen; u. s. w.

Auf diese Weise können nur die positiven Wurzeln erhalten werden. Um auch die negativen zu finden, braucht man blos die Gewichte der Glieder mit ungeraden Potenzexponenten (in unserem Falle: $3x^5$, $4x^3$, $6x$) aus ihren Ringen zu nehmen und in die Ringe des entsprechenden Kurvenschlitzes auf der anderen Seite der Mittellinie zu

hängen; die Gewichte der Glieder mit geraden Potenzexponenten verbleiben auf ihrem Platze, und man verfährt wie früher.

Natürlich können auch statt der einen Kurvenplatte deren mehrere — übereinander angeordnet — genommen werden, um das Durchschneiden der Kurven zu verhüten; dann müssen die Wurzelsucher der einzelnen Platten in einer Vertikalebene starr miteinander verbunden sein, um gemeinsam verschoben werden zu können. Ja es kann für jede Kurve eine eigene Platte in Anwendung kommen. Auch können an Stelle der Kurvenschlitze nach der Kurvenform gebogene Drähte treten, die an geeigneten Drahtrahmen befestigt werden und mit Gleitringen versehen sind, welche oben Köpfchen tragen.

Wenn diese Gleichungswage auch allgemein vielleicht nicht Anwendung finden könnte, so wird es — bei ihrer Einfachheit — für spezielle Fälle stets ein Leichtes sein, die entsprechenden Kurvenschablonen in geeignetem Mafsstab sich herzustellen und die Wage praktisch zu verwerten.

### **Der elektrische Gleichungsauflöser** (Figur 2 und 3).

Die erste Ausführung (Figur 2) besteht aus einem Rahmengestell (aus 4 Nutenleisten $n$, 4 Stützen $s$ und 4 Querleisten $Q$) zur Aufnahme der Schablonen-Rahmen ($R_1$, $R_2$ u. s. w.) und einem Schieber $W$, dem Wurzelsucher, dessen Führungsansatz $f$ über einer Teilung $T$ steht.

Der Wurzelschieber $W$ ist auf den Leisten $Q$ nur parallel zu sich selbst verschiebbar. Seine obere und untere Leiste sind in den Abständen der Nuten $n$ mit Löchern versehen, in denen mittels der Klemmschrauben $k$, $k'$ Drähte $D$ senkrecht eingespannt werden können, so dafs sie stets — auch beim Verschieben — an den entsprechenden Schablonen anliegen.

Die Kurvenschablonen sind entweder aus starkem Draht gebogen, der gegen die Seite, an welcher der Draht des Wurzelsuchers anliegt, zu einer Schneide zugefeilt ist, wie bei $R_1$, $R_2$, $R_3$, oder aus Blech geschnitten, wie bei $R_4$, und werden — in geeigneten Rahmen befestigt — in die Nuten des Rahmengestells eingeschoben.

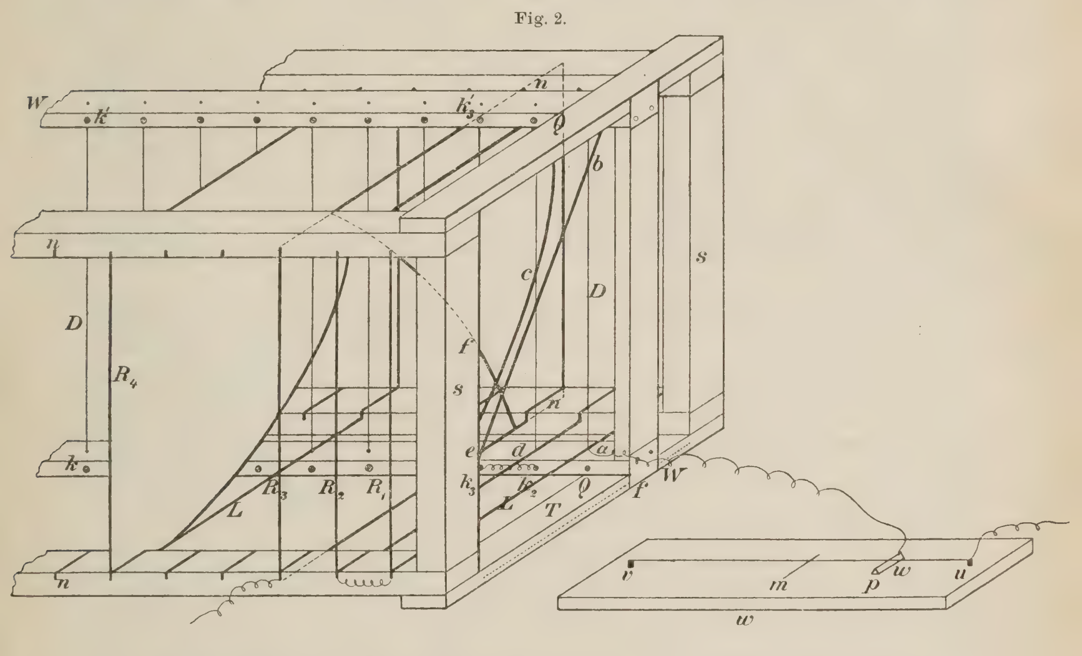
Soll nun z. B. die Gleichung: $2x + 3x^5 - 6x^8 - 11 = 0$ aufgelöst werden, so schiebt man in die Nuten $n$ Rahmen mit den Kurvenschablonen ein für: $y = x$, $y = x^5$ und $y = x^8$. Dabei gilt bezüglich der Reduktion der Ordinaten dieser Kurven das bei der Gleichungswage Gesagte, ebenso betreffs des Bereiches $x = 0$ bis 1.

Da nun die Gleichungsauflösung bei dieser Maschine auf eine (elektrische) Widerstandsbestimmung hinausläuft, so müssen die senk-

rechten Drähte $D$ erstens einmal einen der Reduktion der Kurvenschablonen, an denen sie anliegen, entsprechenden Widerstand haben, und zweitens müssen diese Widerstände noch nach Maſsgabe der betreffenden Koeffizienten der zu lösenden Gleichung erhöht werden.

So muſs in unserem Falle, wenn wir (für $y = x$) z. B. $\frac{1}{1000}$ Ohm als Einheit annehmen, der Widerstand des senkrechten Drahtes, der an der ersten Schablone $y = x$ — deren Maſsstab der natürliche sei — anliegt, $\frac{2}{1000}$ Ohm betragen; der des Drahtes an der Schablone $y = x^5$

Fig. 2.




— deren Ordinaten auf $\frac{1}{50}$ reduziert seien — $3 \times 50 \times \frac{1}{1000}$ Ohm; und der des Drahtes an $y = x^8$ — deren Ordinaten auf $\frac{1}{100}$ reduziert seien — $6 \times 100 \times \frac{1}{1000}$ Ohm.

Zu beachten ist, daſs die Schablonen für die negativen Glieder, wie $R_3$, umgekehrt eingeschoben werden müssen.

Ferner ist noch ein Brückenwiderstand $w$ vorhanden, um die Konstanten berücksichtigen zu können.

Hier muſs, für die Konstante — 11, die Kontaktpyramide $p$ aus der Mittellage $m$ um 11 Teilstriche nach rechts ($w$) verschoben werden.[1])

Von den Drähten des Wurzelschiebers sind der zweite und dritte, vierte und fünfte, u. s. w. leitend mit einander verbunden; von den

1) Für eine positive Konstante hätte eine Verschiebung nach links, also ein Dazuschalten von Widerstand zu erfolgen.

Rahmen, die bis auf die untere Leiste $L$, die isoliert ist, leiten, der erste und zweite, dritte und vierte, etc.; so daſs ein bei $u$ eintretender Strom (in der Figur) folgenden Weg nimmt:

Von $u$ bis $w$ im Brückendraht, dann nach $a$, dann durch das Stück $ab$ des ersten Drahtes $D$ zur ersten Kurvenschablone, durch diese und ihren Rahmen, deren Widerstand zu vernachlässigen ist, zur zweiten Kurvenschablone nach $c$, von da im zweiten Draht des Wurzelschiebers nach $d$, hierauf nach $e$, aufwärts bis $f$, durch die dritte Schablone, u. s. w.

Um nun die Wurzeln zu suchen, wird der Schieber $W$ auf den Nullpunkt der Teilung, die Kontaktpyramide $p$ auf den Mittelstrich $m$ geschoben und der nunmehr herrschende Widerstand, bestehend aus dem Widerstand der Zuleitungs- und Verbindungsdrähte, dem des halben Brückendrahtes ($u\ m$) und der ganzen Längen der Drähte, die an Schablonen für negative Glieder der Gleichung anliegen, in einer Brückenanordnung ausbalanciert, so daſs das Brücken-Galvanometer auf Null steht.

Jetzt wird die Pyramide $p$ für die Konstante auf $w$ eingestellt und der Wurzelsucher so lange verschoben, wobei für die positiven Glieder der Gleichung von den senkrechten Drähten $D$ immer mehr Widerstand eingeschaltet, für die negativen ausgeschaltet wird, bis das Galvanometer wieder Null zeigt. In dieser Lage kann an der Teilung $T$ direkt eine Wurzel der vorgelegten Gleichung abgelesen werden; dann wird weiter verschoben u. s. w.

So erhält man die positiven Wurzeln; um auch die negativen zu finden, legt man einfach die Kurvenschablonen der Glieder mit ungeraden Potenzexponenten um.

Ist es nun auch ein Leichtes, die Widerstände der Drähte des Wurzelsuchers $W$, den Reduktionen der betreffenden Schablonen entsprechend, ein für alle mal festzulegen, so wird doch die Berücksichtigung der Koeffizienten in der Regel Umstände machen.

Man könnte sich zwar auf mancherlei Weise helfen, so durch Verzweigungen etc.; aber am einfachsten beseitigt diesen Übelstand die

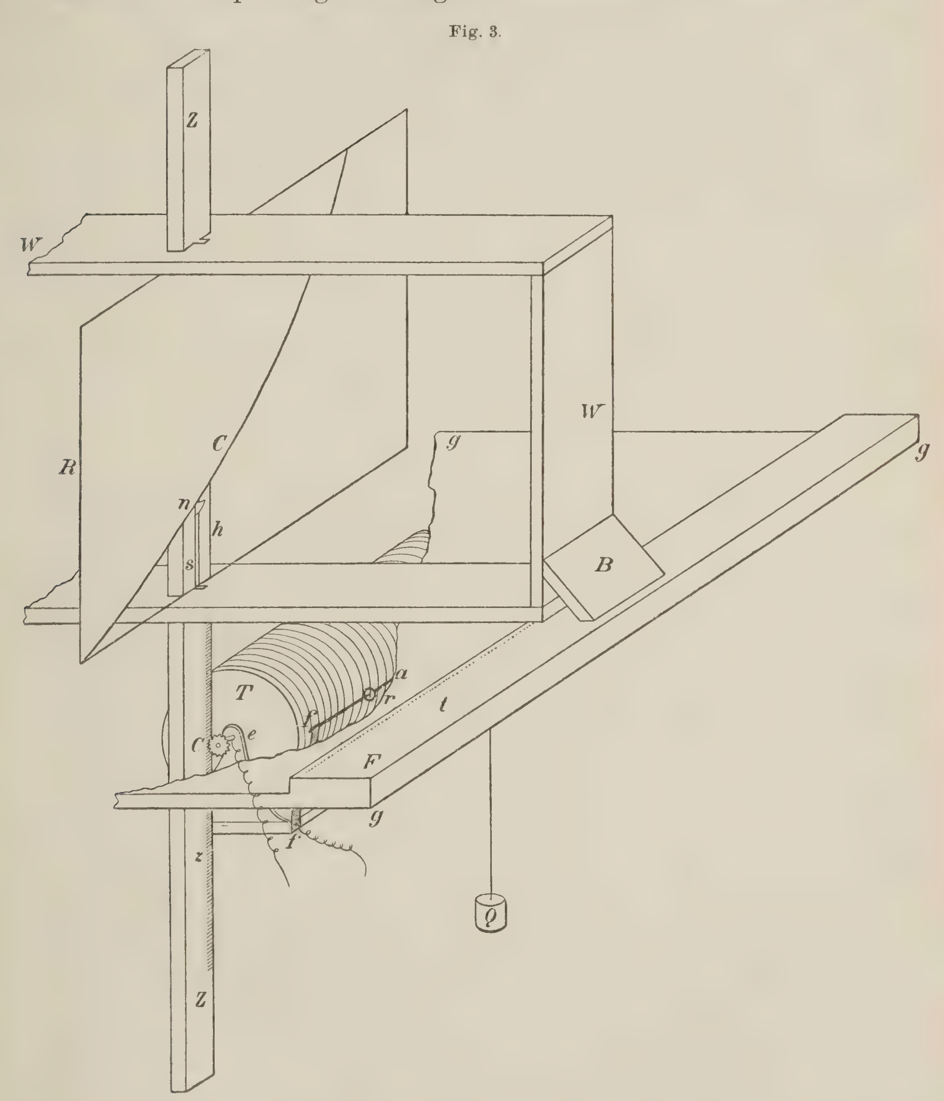
**Zweite Ausführung des elektrischen Gleichungsauflösers** (Figur 3).

Bei derselben ist der Wurzelsucher $W$ auf einem Grundbrett $G$ befestigt und das Rahmengestell mit den Rahmen $R$ längs der Führungsleisten $F$ verschiebbar, die eine Teilung $t$ tragen.

Nur trägt der Wurzelsucher statt der Drähte Hülsen $h$ mit Schlitzen $s$ versehen, durch welche die Nasen $n$ der in den Hülsen verschiebbaren Stangen $Z$ ragen.

Die Stangen sind unten gezahnt ($z$) und greifen in Zahnräder $C$ ein, die — auswechselbar — auf den Achsen von Trommelrheostaten sitzen. Das Gewicht $Q$ sucht die Trommel im Sinne des Uhrzeigers zu drehen und prefst gleichzeitig die Nase $n$ an die Kurve $C$ an.

Fig. 3.




Jeder dieser Trommelrheostaten ist mit einem Drahte bewickelt, dessen Widerstand der Reduktion der Kurvenschablone entspricht, zu der er gehört. Der Koeffizient des betreffenden Gliedes der Gleichung wird nun sehr einfach dadurch in Rechnung gebracht, dafs man auf die Achse ein entsprechendes Zahnrad aufsetzt. Es wird also von der

Trommel bei der Bewegung des Rahmengestelles immer der gehörige Widerstand eingeschaltet, nämlich eine Drahtlänge, welche gleich ist der jeweiligen Ordinate der Kurve multipliziert mit der dem Koeffizienten gleichen Übertragungszahl (des Zahnrades).[1])

So müfste z. B. für das $6x^8$ eine Trommel gewählt werden, die mit einem Drahte bewickelt ist, dessen spezifischer Widerstand 100mal so grofs ist als der für das Glied $2x$, und ein Zahnrad trägt, das dreimal so viel Zähne hat als das für $2x$.

Im übrigen erklärt sich die Funktionsweise von selbst nach der des vorangehenden Apparates.

---

# Lösung des Kreiselproblems mit Hilfe der Vektoren-Rechnung.

Von A. Föppl in München.

Die Bewegung des symmetrischen Kreisels mit fest gehaltener Spitze bei beliebig gegebenen Anfangsbedingungen unter dem Einflusse seines Gewichtes, mit der ich mich hier beschäftigen will, ist freilich schon sehr oft behandelt worden. Nur in der Absicht, die Vorzüge der Vektoren-Rechnung bei der Behandlung solcher Probleme an einem nicht allzueinfachen Beispiele darzuthun, komme ich auf diese schon lange gelöste Frage von neuem zurück. Aus diesem Grunde werde ich mich auch darauf beschränken, die allgemeine Lösung des Problems abzuleiten; auf die weitere Diskussion der Formeln, die mit der Vektoren-Rechnung nichts mehr zu thun hat, sondern nur ein Übungsbeispiel zur Lehre von den elliptischen Integralen und elliptischen Funktionen bildet, werde ich dagegen verzichten.

Hinsichtlich der Bezeichnungen und der Vorzeichenfestsetzungen werde ich mich an die in meinem Lehrbuche „Vorlesungen über technische Mechanik“ gebrauchten anschliefsen. Im übrigen wird aber jeder Leser, auch ohne dieses Buch zu Rate ziehen zu müssen, den nachfolgenden Ausführungen leicht folgen können, wenn er nur einige Kenntnis im Rechnen mit inneren und äufseren Produkten gerichteter Gröfsen besitzt.

Von den Hilfsmitteln der Mechanik benütze ich im folgenden fast ausschliefslich den Flächensatz, der zur Lösung des Problems schon

---

1) Der Strom tritt bei $e$ ein, geht durch die Drahtwindungen bis zum Kontakträdchen $r$, dann durch den Arm $a$ und tritt durch die Feder $f$ aus.

vollständig ausreicht. Nur bei den einleitenden Betrachtungen, die ich des besseren Verständnisses wegen vorausschicke, beziehe ich mich auch auf den Satz von der lebendigen Kraft.

## § 1. Vorbereitende Betrachtungen.

Der Kreisel sei in irgend einer seiner Stellungen gegeben und besitze eine Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um irgend eine durch seine Spitze gehende Achse. Die Richtung dieser Achse ist durch den Vektor $\mathfrak{u}$ schon mit bestimmt. Ferner sei ein Vektor $\mathfrak{r}$ nach irgend einem Massenteilchen $m$ des Kreisels gezogen. Für die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von $m$ hat man dann

$$\mathfrak{v} = - V\mathfrak{u}\mathfrak{r}$$

wenn $V$ das Zeichen für das äufsere Produkt ist. Für die lebendige Kraft $L$ des Kreisels erhält man daher

$$L = \frac{1}{2}\sum m\mathfrak{v}^2 = \frac{1}{2}\sum m(V\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2.$$

Ferner denke man sich in der gewählten Lage des Kreisels alle möglichen Achsen durch die Spitze gezogen und auf jeder jene Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ aufgetragen, mit der der Kreisel um die zugehörige Achse rotieren müfste, damit die lebendige Kraft einen beliebig gegebenen konstanten Wert $L_0$ annähme. Die Endpunkte aller dieser Vektoren $\mathfrak{u}$ liegen auf einer Fläche, deren Gleichung

$$\frac{1}{2}\sum m(V\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2 = L_0$$

lautet. Da die Gleichung für $\mathfrak{u}$ vom zweiten Grade ist und die Fläche sich nicht ins Unendliche erstreckt, mufs diese ein Ellipsoid sein. Da die Gleichung auch noch erfüllt bleibt, wenn man $\mathfrak{u}$ mit $-\mathfrak{u}$ vertauscht, fällt der Mittelpunkt des Ellipsoids mit der Kreiselspitze zusammen und der vorausgesetzten Symmetrie wegen ist es ein Umdrehungsellipsoid, dessen Umdrehungsachse in die Kreiselachse fällt. Jeder Radiusvektor des Ellipsoids ist dem Trägheitshalbmesser für diesen Vektor als Achse umgekehrt proportional und das Ellipsoid heifst daher das Trägheitsellipsoid.

Wir bilden ferner das statische Moment $\mathfrak{B}$ der Bewegungsgröfse für den Bewegungszustand $\mathfrak{u}$. Das Massenteilchen $m$ liefert dazu den Beitrag

$$Vm\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{r} \quad \text{oder} \quad mV\mathfrak{r}V\mathfrak{u}\mathfrak{r}.$$

Im Ganzen erhält man daher

$$(1) \qquad \mathfrak{B} = \sum m V\mathfrak{r} V\mathfrak{u}\mathfrak{r} = \mathfrak{u} \,.\, \sum m\mathfrak{r}^2 - \sum m\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{u}\mathfrak{r},$$

wenn man von einem Satze über das Rechnen mit geometrischen Produkten Gebrauch macht. Für den etwas weitläufigen Ausdruck „statisches Moment der Bewegungsgröfse“ sei für $\mathfrak{B}$ weiterhin die Bezeichnung „Drall“ gebraucht.

Wie man sieht, ist der Drall $\mathfrak{B}$ eine lineare Funktion von $\mathfrak{u}$. Zerlegt man etwa $\mathfrak{u}$ in zwei Komponenten $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}' + \mathfrak{u}''$ und berechnet zu jeder von ihnen den Drall nach Gl. (1), so ist auch das ganze $\mathfrak{B}$ gleich der geometrischen Summe aus $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$. Denkt man sich daher beliebige Strecken $\mathfrak{u}$ und die ihnen zugehörigen Werte von $\mathfrak{B}$ aufgetragen, so wird dadurch eine kollineare Abbildung des Raumes bewirkt. Bezieht man diese Abbildung auf jene Werte von $\mathfrak{u}$, die vorher im Trägheitsellipsoid als Radienvektoren vorkamen, so liegen die Endpunkte der zugehörigen Drallwerte $\mathfrak{B}$ auf einem zweiten Ellipsoide, das als das „Drall-Ellipsoid“ bezeichnet werden mag. Der Symmetrie halber ist es ebenfalls ein Umdrehungsellipsoid, dessen Achse mit der Kreiselachse zusammenfällt.

Für das innere Produkt aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ erhält man

$$\mathfrak{u}\mathfrak{B} = \mathfrak{u}^2 \sum m\mathfrak{r}^2 - \sum m(\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2 = \mathfrak{u}^2 \sum m(\mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{u}_1\mathfrak{r})^2) = u^2\theta = 2L_0$$

wenn man mit $u$ den Absolutwert von $\mathfrak{u}$, einen in der Richtung von $\mathfrak{u}$ gezogenen Einheitsvektor mit $\mathfrak{u}_1$ und das zu $\mathfrak{u}_1$ gehörige Trägheitsmoment mit $\theta$ bezeichnet. Aus der Gleichung

$$(2) \qquad \mathfrak{u}\mathfrak{B} = 2L_0$$

folgen leicht alle Beziehungen zwischen Trägheits- und Drallellipsoid. Bezeichnet man nämlich mit $\delta\mathfrak{u}$ irgend eine unendlich kleine Strecke, die von dem Endpunkte von $\mathfrak{u}$ auf dem Trägheitsellipsoide gezogen ist und mit $\delta\mathfrak{B}$ die zugehörige Strecke auf dem Drallellipsoide, so ist nach Gl. (2)

$$\mathfrak{u}\delta\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\delta\mathfrak{u} = 0.$$

Andererseits sind aber nach Gl. (1) beide Glieder auf der linken Seite einander gleich und daher ist

$$(3) \qquad \mathfrak{u}\delta\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\delta\mathfrak{u} = 0.$$

Legt man also im Endpunkte von $\mathfrak{u}$ eine Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid, die alle möglichen Richtungen von $\delta\mathfrak{u}$ enthält, so steht der zu $\mathfrak{u}$ gehörige Drall $\mathfrak{B}$ senkrecht zu dieser Ebene. Um-

gekehrt steht auch jedes $\mathfrak{u}$ senkrecht zur Tangentialebene an das Drallellipsoid im Endpunkte des zugehörigen $\mathfrak{B}$. Für die Hauptrichtungen, nämlich für die Kreiselachse und alle zu ihr senkrecht stehenden Achsen, sind daher $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ gleich gerichtet.

Ferner folgt noch aus Gl. (2), dafs die Hauptachsen der Meridianschnitte vom Trägheits- und Drallellipsoid im umgekehrten Verhältnisse zu einander stehen. Bei passender Wahl der Mafsstäbe, die man zum Auftragen von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ benutzt, werden beide Ellipsen einander kongruent. Die eine ist aber gegen die andere um einen rechten Winkel gedreht; daher ist von beiden Ellipsoiden immer das eine ein abgeplattetes, das andere ein verlängertes Rotationsellipsoid (wenn sie nicht beide Kugeln sind). Mit dem Trägheitsellipsoide ist hiernach auch das Drallellipsoid ohne weiteres bekannt.

Diese Betrachtungen gestatten auch, Gl. (1), die allgemein gilt, für den besonderen Fall des symmetrischen Kreisels durch eine einfachere zu ersetzen. Man denke sich $\mathfrak{u}$ in zwei Komponenten zerlegt, von denen eine in die Richtung der Kreiselachse, die andere in die Äquatorebene fällt, entsprechend der Gleichung

$$\mathfrak{u} = u_1 \mathfrak{s}_1 + u_2 \mathfrak{a}_1$$

wonach also $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{a}_1$ zwei in den bezeichneten Richtungen gehende Einheitsvektoren sind. Die zugehörigen Drallkomponenten lassen sich leicht bilden und man erhält

$$\mathfrak{B} = u_1 \theta_1 \mathfrak{s}_1 + u_2 \theta_2 \mathfrak{a}_1,$$

wenn mit $\theta_1$ das Trägheitsmoment für die Kreiselachse, mit $\theta_2$ das Trägheitsmoment für eine in der Äquatorebene enthaltene Achse bezeichnet wird. Eine einfache Umformung ergiebt

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \theta_2(u_1 \mathfrak{s}_1 + u_2 \mathfrak{a}_1) + u_1 \mathfrak{s}_1(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \mathfrak{u}\theta_2 + \mathfrak{s}_1 u_1(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \tag{4}$$

Hiermit ist der Drall in zwei Komponenten zerlegt, von denen eine in die Richtung der Drehachse, die andere in die Richtung der Kreiselachse fällt.

## § 2. Aufstellung der Hauptgleichung des Problems.

Hierzu wird der Flächensatz benützt. Nach ihm ist die Änderungsgeschwindigkeit des Dralls gleich dem statischen Momente des Gewichtes $\mathfrak{G}$, bezogen auf die Kreiselspitze als Momentenpunkt, oder in Zeichen

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \bigvee \mathfrak{G} s \mathfrak{s}_1. \tag{5}$$

Unter $s$ ist hiernach der Schwerpunktsabstand und unter $s\mathfrak{s}_1$ der Radiusvektor des Schwerpunkts oder der Hebelarm des Gewichtes $\mathfrak{G}$ zu verstehen. Dabei besteht noch zwischen $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{u}$ die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = -V\mathfrak{u}\mathfrak{s}_1 . \tag{6}$$

Die Differentialgleichung des Problems, die ich hier als die Hauptgleichung bezeichnen will, wird erhalten, indem man aus den Gleichungen (4), (5) und (6) die Variabeln $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ eliminiert, so daſs eine Gleichung für $\mathfrak{s}_1$ übrig bleibt. — Zu diesem Zwecke beachte man, daſs

$$\frac{d(\mathfrak{B}\mathfrak{s}_1)}{dt} = \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + \mathfrak{s}_1\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0$$

ist, wie man durch Einsetzen der Werte aus den drei Gleichungen findet. Daher ist die Projektion $B_1$ von $\mathfrak{B}$ auf die Kreiselachse

$$B_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{s}_1$$

eine Konstante, die durch die Anfangsbedingungen gegeben ist. Multipliziert man Gl. (4) auf innere Art mit $\mathfrak{s}_1$, so folgt

$$B_1 = u_1\theta_1 ,$$

und hiernach ist auch $u_1$ eine Konstante.

Aus Gl. (6) folgt ferner, wenn man sie mit $\mathfrak{s}_1$ auf äuſsere Art multipliziert

$$V\mathfrak{s}_1\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = -V\mathfrak{s}_1 V\mathfrak{u}\mathfrak{s}_1 = -\mathfrak{u} + \mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{u}\mathfrak{s}_1 = -\mathfrak{u} + u_1\mathfrak{s}_1 ,$$

und für $\mathfrak{u}$ hat man daher

$$\mathfrak{u} = u_1\mathfrak{s}_1 - V\mathfrak{s}_1\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}$$

Auch $\mathfrak{B}$ läſst sich nun mit Hilfe von Gl. (4) vollständig in $\mathfrak{s}_1$ ausdrücken; man findet

$$\mathfrak{B} = \theta_2\left(u_1\mathfrak{s}_1 - V\mathfrak{s}_1\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}\right) + \mathfrak{s}_1 u_1(\theta_1 - \theta_2) = \mathfrak{s}_1 u_1\theta_1 - \theta_2 V\mathfrak{s}_1\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} .$$

Man braucht jetzt nur noch diesen Ausdruck in Gl. (5) einzusetzen, um zur Hauptgleichung zu gelangen. Sie lautet

$$\theta_2 V\mathfrak{s}_1\frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} - u_1\theta_1\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + sV\mathfrak{G}\mathfrak{s}_1 = 0. \tag{7}$$

Auſser der gesuchten Variabeln $\mathfrak{s}_1$ enthält sie nur noch gegebene konstante Gröſsen und mit ihrer Integration ist das Problem des symmetrischen Kreisels vollständig gelöst, denn sobald man $\mathfrak{s}_1$ als

Funktion der Zeit kennt, sind nach den zuvor aufgestellten Beziehungen auch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{B}$ zu jeder Zeit bekannt. Im Zusammenhange mit der Bedingung, dafs $\mathfrak{s}_1$ einen Einheitsvektor bedeutete, genügt auch Gl. (7) vollständig, um $\mathfrak{s}_1$ als Funktion der Zeit darzustellen. Da man dies aus Gl. (7) weniger gut erkennen kann, werde ich sie zunächst noch auf eine zu diesem Zwecke geeignetere Form bringen. Für die weitere Behandlung knüpft man aber später am besten an Gl. (7) unmittelbar an.

## § 3. Andere Form der Hauptgleichung.

Zunächst folgt aus der Gleichung

$$\mathfrak{s}_1^2 = 1$$

durch zweimaliges Differentiieren nach der Zeit

$$\mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = 0; \quad \mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} = -\left(\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}\right)^2.$$

Nachdem dies festgestellt ist, multipliziere man Gl. (7) auf äufsere Art mit $\mathfrak{s}_1$ und entwickele die dabei auftretenden Produkte; man erhält

$$\theta_2\left(\mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} - \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2}\right) - u_1\theta_1 \bigvee \mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + s(\mathfrak{G} - \mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{G}\mathfrak{s}_1) = 0$$

oder unter Berücksichtigung der vorhergehenden Beziehung

$$\frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} = -\mathfrak{s}_1\left(\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}\right)^2 - u_1\frac{\theta_1}{\theta_2} \bigvee \mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + \frac{s}{\theta_2}(\mathfrak{G} - \mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{G}\mathfrak{s}_1). \tag{8}$$

Hiernach lassen sich auch alle höheren Differentialquotienten im ersten und in $\mathfrak{s}_1$ selbst ausdrücken und man könnte, wenn man die Mühe nicht scheuen wollte, $\mathfrak{s}_1$ nach dem Taylorschen Satze ohne weiteres in Form einer Reihe als Funktion der Zeit darstellen, da die Anfangswerte von $\mathfrak{s}_1$ und seinem ersten Differentialquotienten durch die Anfangsbedingungen jedenfalls gegeben sind.

## § 4. Erste Integrale der Hauptgleichung.

Ein erstes Integral, das die Hauptgleichung vollständig zu ersetzen vermöchte, läfst sich nicht ohne weiteres angeben; ein solches müfste notwendig wieder eine Vektorgleichung sein, d. h. eine Gleichung, in der jedes Glied die Bedeutung einer gerichteten Gröfse hat. Nur wenn $s$ oder $\mathfrak{G}$ gleich Null sind, also für den kräftefreien Kreisel, ergiebt sich ein solches Integral sofort, indem jedes der beiden ersten Glieder auf der linken Seite ein vollständiges Differential nach der Zeit bildet.

Dagegen kann man leicht zwei skalare Integrale der Hauptgleichung angeben, die sich für die Lösung des Problems recht nützlich erweisen werden. — Zur Ableitung des einen von ihnen multipliziere man die Hauptgleichung auf äufsere Art mit $\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}$, entwickle die Produkte und streiche jene Glieder, die nach den vorhergehenden Betrachtungen gleich Null sind. Dann bleibt

$$\theta_2 \mathfrak{s}_1 \cdot \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} - s\mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{G} \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = 0.$$

Jedes der Glieder ist mit dem Richtungsfaktor $\mathfrak{s}_1$ behaftet, der daher gestrichen werden kann. Man behält daher

$$\tfrac{1}{2}\theta_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}\right)^2 - s\mathfrak{G}\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = 0$$

und hieraus durch Integration

$$\tfrac{1}{2}\theta_2 \left(\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}\right)^2 - s\mathfrak{G}\mathfrak{s}_1 = K. \tag{9}$$

Dieses Integral hätte sich auch unmittelbar nach dem Satze von der lebendigen Kraft anschreiben lassen; der Wert der Integrationskonstanten ergiebt sich aus den Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$.

Das andere erste Integral erhält man aus der Hauptgleichung, indem man jene Komponente von ihr nimmt, die in die lotrechte Richtung fällt, d. h. es ist jenes Integral, das aus dem Flächensatze folgt, wenn man ihn auf eine durch die Kreiselspitze gezogene lotrechte Achse anwendet. Der bequemeren Ausdrucksweise wegen wollen wir uns an der Kreiselspitze ein im festen Raume ruhendes Koordinatensystem der $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ angebracht denken, von dem $\mathfrak{i}$ in der Lotrichtung senkrecht nach abwärts geht, während $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ in der horizontalen Ebene beliebig orientiert sein mögen, so jedoch, dafs die Aufeinanderfolge $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ein Rechtssystem im Raume bildet. Da $\mathfrak{i}$ hiernach mit $\mathfrak{G}$ gleich gerichtet ist, können wir dafür in der Folge

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{i}G$$

schreiben, wenn $G$ den Absolutbetrag des Kreiselgewichtes bedeutet.

Um die $\mathfrak{i}$-Komponente der Hauptgleichung zu erhalten, multizieren wir sie mit $\mathfrak{i}$ auf innere Art. Das Glied mit $\mathfrak{G}$ fällt dann weg und man behält

$$\theta_2 \mathfrak{i} \bigvee \mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} - u_1\theta_1 \cdot \mathfrak{i}\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = 0,$$

woraus durch Integration

$$(10) \qquad \theta_2 \mathfrak{i} \bigvee \mathfrak{s}_1 \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} - u_1 \theta_1 \mathfrak{i} \mathfrak{s}_1 = C$$

gefunden wird. Dabei ist $C$ eine neue Integrationskonstante, deren Wert mit den Anfangsbedingungen ebenfalls ohne weiteres gegeben ist.

## § 5. Partikuläre Integrale der Hauptgleichung.

Die Hauptgleichung umfaſst alle möglichen Bewegungsarten eines symmetrischen Körpers mit festgehaltener Spitze unter dem Einflusse des Gewichtes, also auch die ebene Pendelschwingung, die Schwingung des Körpers als sogenanntes Zentrifugalpendel und vor allem die reguläre Präzessionsbewegung. Allen diesen einfachen Bewegungsarten müssen auch einfach gestaltete partikuläre Integrale der Hauptgleichung entsprechen, die sich leicht aufsuchen lassen. Aus diesen partikulären Integralen läſst sich dann auch das allgemeine Integral der Hauptgleichung nach bekannten Methoden, nämlich durch die Variation der Konstanten ableiten. Am besten knüpft man dabei an die reguläre Präzessionsbewegung an.

Selbst wenn das Kreiselproblem bisher noch nicht gelöst worden wäre, würde man doch schon aus der Erfahrung wissen, daſs die Kreiselachse gewöhnlich ungefähr einen geraden Kreiskegel um die lotrechte Achse beschreibt. Es würde daher von vornherein sehr nahe liegen, zu versuchen, ob eine solche kreiskegelförmige Bewegung in der Hauptgleichung mit enthalten ist. Versuchsweise setzen wir daher

$$(11) \qquad \mathfrak{s}_1 = a_1 \mathfrak{i} + a_2 \cos \varphi \,.\, \mathfrak{j} + a_2 \sin \varphi \,.\, \mathfrak{k},$$

denn dies ist die Gleichung eines horizontalen Kreises, dessen Mittelpunkt auf der $\mathfrak{i}$-Achse liegt. Man muſs nur, damit $\mathfrak{s}_1$ einen Einheitsvektor bedeute,

$$a_1^2 + a_2^2 = 1$$

setzen, so daſs Gl. (11) nur eine willkürliche Konstante $a_1$ enthält, die indessen nicht gröſser als Eins sein darf. Der Winkel $\varphi$ ist ein Richtungswinkel, den die durch $\mathfrak{s}_1$ gelegte Lotebene mit ihrer Anfangslage bildet und eine vorläufig unbekannte Funktion von $t$.

Setzt man diesen Wert von $\mathfrak{s}_1$ in die Hauptgleichung ein, so findet man, daſs sie in der That befriedigt wird, falls man $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ setzt und dem konstanten $\frac{d\varphi}{dt}$ einen passenden Wert erteilt. Obschon

diese Rechnung sehr einfach ist, wird es doch vielleicht gut sein, wenn ich sie ausführlich anschreibe. Man hat nach Gl. (11)

$$\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt^2} = (-a_2 \sin\varphi\,.\,\mathfrak{j} + a_2 \cos\varphi\,.\,\mathfrak{k})\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} = (-a_2 \sin\varphi\,.\,\mathfrak{j} + a_2 \cos\varphi\,.\,\mathfrak{k})\frac{d^2\varphi}{dt^2} - (a_2 \cos\varphi\,.\,\mathfrak{j} + a_2 \sin\varphi\,.\,\mathfrak{k})\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

und daraus erhält man unter Beachtung der Multiplikationsregeln für die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$

$$\mathrm{V}\,\mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} = (a_2^2\,.\,\mathfrak{i} - a_1 a_2 \cos\varphi\,.\,\mathfrak{j} - a_1 a_2 \sin\varphi\,.\,\mathfrak{k})\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$
$$- (a_1 a_2 \cos\varphi\,.\,\mathfrak{k} - a_1 a_2 \sin\varphi\,.\,\mathfrak{j})\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Ebenso erhält man für das andere in der Hauptgleichung vorkommende Vektorprodukt

$$\mathrm{V}\,\mathfrak{G}\mathfrak{s}_1 = G\,\mathrm{V}\,\mathfrak{i}\mathfrak{s}_1 = G(a_2 \cos\varphi\,.\,\mathfrak{k} - a_2 \sin\varphi\,.\,\mathfrak{j}).$$

Setzt man alle diese Werte in die Hauptgleichung ein, so geht sie über in

$$\theta_2(a_2^2\,.\,\mathfrak{i} - a_1 a_2 \cos\varphi\,.\,\mathfrak{j} - a_1 a_2 \sin\varphi\,.\,\mathfrak{k})\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \theta_2 a_1 a_2(\sin\varphi\,.\,\mathfrak{j} - \cos\varphi\,.\,\mathfrak{k})\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$
$$+ u_1 \theta_1 a_2(\sin\varphi\,.\,\mathfrak{j} - \cos\varphi\,.\,\mathfrak{k})\frac{d\varphi}{dt} - sGa_2(\sin\varphi\,.\,\mathfrak{j} - \cos\varphi\,.\,\mathfrak{k}) = 0.$$

Die drei letzten Glieder der linken Seite enthalten alle denselben Klammerfaktor und sind daher alle unter sich gleich gerichtet. Das erste Glied ist dagegen anders gerichtet, und damit die geometrische Summe Null sei, mufs daher das erste Glied verschwinden, d. h. $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ mufs gleich Null sein. Die Präzessionsbewegung geht daher mit einer konstanten Geschwindigkeit vor sich, die wir

$$\frac{d\varphi}{dt} = w$$

nennen wollen. Die vorige Gleichung geht dann über in

$$\theta_2 a_1 w^2 + u_1 \theta_1 w - sG = 0,$$

woraus man durch Auflösung nach $w$

$$w = -\frac{\theta_1 u_1}{2\theta_2 a_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\theta_1 u_1}{2\theta_2 a_1}\right)^2 + \frac{sG}{\theta_2 a_1}} \tag{12}$$

erhält. Zu jedem Werte von $a_1$ und $u_1$ giebt es daher zwei verschiedene Geschwindigkeiten von regulären Präzessionsbewegungen, die

als „langsame" und als „schnelle" Präzession bezeichnet werden. Falls $u_1$ klein sein sollte, mufs indessen $a_1$ entweder positiv oder, falls negativ, nur von kleinem Wert sein, damit die Wurzel nicht imaginär wird. Setzt man $u_1$ gleich Null und macht $a_1$ positiv (also so, dafs die Kreiselachse schräg nach abwärts gerichtet ist), so geht die reguläre Präzession in die Schwingung des Kreisels als Zentrifugalpendel über. — Auf die weitere Besprechung der regulären Präzession kann hier verzichtet werden.

## § 6. Das allgemeine Integral der Hauptgleichung.

Die allgemeine Lösung des Kreiselproblems wird aus der vorhergehenden partikulären Lösung dadurch gefunden, dafs man an Stelle der Konstanten $a_1$ in Gl. (11) eine vorläufig unbekannte Funktion $x$ der Zeit setzt, die dann so bestimmt wird, dafs die Hauptgleichung befriedigt ist. An Stelle von (11) schreibe ich daher

$$\mathfrak{s}_1 = x\mathfrak{i} + y\cos\varphi\,.\,\mathfrak{j} + y\sin\varphi\,.\,\mathfrak{k}, \tag{13}$$

wobei $x$ mit $y$ durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{und daher} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

zusammenhängt. Hiernach findet man für $\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt}$:

$$\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} = \mathfrak{i}\frac{dx}{dt} + \mathfrak{j}\left(\frac{dy}{dt}\cos\varphi - y\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{dy}{dt}\sin\varphi + y\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Hierauf wird auch der zweite Differentialquotient gebildet und die im vorigen Paragraphen ausführlich angeschriebene Rechnung in derselben Reihenfolge wiederholt. Wegen des Hinzutretens der Differentialquotienten von $x$ und $y$ wird freilich die Rechnung erheblich weitläufiger; man überzeugt sich indessen auch hier ohne Schwierigkeit, dafs die Hauptgleichung von der Lösung (13) identisch befriedigt wird, falls die unbekannten Funktionen $x$ und $\varphi$ den folgenden beiden Bedingungsgleichungen genügen:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{u_1\theta_1 x + C}{\theta_2(1-x^2)} \tag{14}$$

$$\theta_2\left\{\frac{d^2x}{dt^2}(1-x^2) + x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\} + \frac{u_1\theta_1 x + C}{\theta_2}(xC + u_1\theta_1) - sG(1-x^2)^2 = 0. \tag{15}$$

Hierin bedeutet $C$ zunächst irgend eine unbestimmte Konstante. Hat man die allgemeine Lösung der Gl. (15) gefunden, so findet man aus (14) durch eine Quadratur auch $\varphi$ als Funktion der Zeit und hiermit ist auch die allgemeine Lösung (13) der Hauptgleichung näher bestimmt.

Dafs diese Lösung allgemein ist, erkennt man nämlich daraus, dafs sie die nötige Zahl willkürlicher Integrationskonstanten enthält, um sie jedem beliebig gegebenen Anfangszustande anpassen zu können.

Freilich ist hiermit die Integration der nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir als die Hauptgleichung bezeichneten, nur auf die Integration einer anderen gleichfalls nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für $x$ zurückgeführt. Der Fortschritt, der damit erzielt ist, mufs aber doch schon als sehr erheblich bezeichnet werden, indem die Hauptgleichung eine Vektorgleichung war, während wir es in Gl. (15) nur noch mit einer gewöhnlichen skalaren Gleichung zu thun haben.

Es war zwar nötig, den Nachweis unmittelbar zu führen, dafs der Ausdruck (13) unter den näher ermittelten Bedingungen die Hauptgleichung befriedigt, weil die ersten Integrale der Hauptgleichung, die wir in § 4 aufstellten, diese nicht vollständig zu ersetzen vermochten. Nachdem dieser Nachweis erbracht ist, knüpft man aber die weitere Behandlung am besten an die Gleichungen (9) und (10) in § 4 an. Diesen Gleichungen mufs der in Gl. (13) aufgestellte Wert von $\mathfrak{s}_1$ ebenfalls genügen.

Führt man den Wert von $\mathfrak{s}_1$ in Gl. (10) ein, so gelangt man freilich zu keinem neuen Resultate; man kommt damit nur auf die schon in Gl. (14) aufgestellte Beziehung zurück. Hierbei ergiebt sich übrigens, dafs die in Gl. (14) und in Gl. (10) mit $C$ bezeichneten Konstanten identisch mit einander sind.

Anders ist es aber mit der Gleichung der lebendigen Kraft, Gl. (9). Wenn man in diese den Wert von $\mathfrak{s}_1$ aus Gl. (13) einsetzt, erhält man, unter Berücksichtigung, dafs $\mathfrak{G}\mathfrak{s}_1$ hier gleich $Gx$ zu setzen ist,

$$\tfrac{1}{2}\theta_2\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\cos\varphi-y\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\sin\varphi+y\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}-sGx=K.$$

Nach Ausquadrieren und unter Beachtung des zwischen $x$ und $y$ bestehenden Zusammenhanges geht dies über in

$$\tfrac{1}{2}\theta_2\left\{\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+(1-x^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}-sGx=K$$

oder nach Einsetzen des aus dem anderen Integrale erhaltenen und auch schon in Gl. (14) angeschriebenen Ausdrucks für $\frac{d\varphi}{dt}$:

$$\tfrac{1}{2}\theta_2\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{u_1\theta_1 x+C}{\theta_2}\right)^2\right\}-sGx(1-x^2)=K(1-x^2).$$

Durch Auflösen nach $\frac{dx}{dt}$ erhält man daraus

$$(16)\quad \frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{\theta_2} \sqrt{2K(1-x^2)\theta_2 + 2sG\theta_2 x(1-x^2) - (u_1\theta_1 x + C)^2}.$$

Nachträglich überzeugt man sich leicht davon, dafs man hiermit in der That auch ein erstes Integral der Bedingungsgleichung (15) für $x$ gewonnen hat; die zugehörige Integrationskonstante ist $K$. Das vollständige Integral der Gleichung für $x$ ist daher

$$(17)\quad t = c + \theta_2 \int \frac{dx}{\pm\sqrt{2K\theta_2(1-x^2) + 2sG\theta_2(x-x^3) - (u_1\theta_1 x + C)^2}},$$

wenn $c$ eine neue Integrationskonstante bedeutet. Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist für $x$ vom dritten Grade, das Integral ist daher ein elliptisches und umgekehrt ist $x$ eine elliptische Funktion der Zeit, die sich mit Hilfe eines Amplitudensinus in einfacher Weise darstellen läfst.

Dafs man bei der strengen Lösung des Problems ohne elliptische Funktionen nicht auskommen kann, war übrigens von vornherein vorauszusehen, da ja schon die ebene Pendelbewegung, die als besonders einfacher Fall in der allgemeinen Lösung mit enthalten ist, auf elliptische Funktionen führt. In der That ist übrigens, von der rein analytischen Seite her betrachtet, die Kreiselbewegung nicht wesentlich verwickelter, als die Pendelschwingung. Man kann nämlich Gl. (17), die den zeitlichen Verlauf der Kreiselbewegung im wesentlichen beschreibt, durch eine lineare Substitution immer so umformen, dafs sie sich auf eine Pendelbewegung bezieht, d. h. man kann ein einfaches Pendel angeben, das dieselbe Periodizität hat, wie die Kreiselbewegung. Es ist aber nicht nötig, hier näher darauf einzugehen.

Für die weitere Verwendung der aufgestellten Formeln empfiehlt es sich, die Integrationskonstanten $C$ und $K$ durch solche Werte zu ersetzen, die sich unmittelbar auf die Anfangsbedingungen beziehen. Dabei steht es uns noch frei, ohne die Allgemeingiltigkeit der Lösung zu beeinträchtigen, die Zeit $t$ von einem Augenblicke an zu zählen, in dem $\frac{dx}{dt}$ gleich Null ist, denn eine solche Wahl ist stets möglich, da $x$ bereits als eine periodische Funktion der Zeit erkannt ist. Der zu dieser Zeit zutreffende und als gegeben anzusehende Wert von $x$ sei mit $x_0$, der zugehörige Wert von $\frac{d\varphi}{dt}$ mit $w_0$ bezeichnet. Dann ist, wie aus den vorausgehenden Formeln folgt,

$$C = (1 - x_0^2)\theta_2 w_0 - u_1\theta_1 x_0,$$

$$K = \tfrac{1}{2}\theta_2 w_0^2(1 - x_0^2) - sGx_0$$

zu setzen und an Stelle von Gl. (16) erhält man

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{\theta_2} \sqrt{(x-x_0)\left\{2sG\theta_2(1-x^2) - u_1^2\theta_1^2(x-x_0) - \theta_2^2 w_0^2(1-x_0^2)(x+x_0) - 2u_1 w_0 \theta_1 \theta_2 (1-x_0^2)\right\}}. \tag{18}$$

Zum Vergleiche mag noch angegeben werden, wie die Gleichung lautet, wenn man sie auf ein einfaches Pendel von der Fadenlänge $l$ bezieht. In diesem Falle ist $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = ml^2$; $s = l$ und $G = mg$ zu setzen, so daſs man erhält

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{(x-x_0)\left\{\frac{2g}{l}(1-x^2) - w_0^2(1-x_0^2)(x+x_0)\right\}}.$$

Setzt man überdies noch $w_0 = 0$, so kommt man auf den Fall der ebenen Schwingungen eines einfachen Pendels, wofür die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}(x-x_0)(1-x^2)}$$

lautet. In diesem Falle wird $C = 0$ und nach Gl. (14) auch $\frac{d\varphi}{dt} = 0$.

Für die Reduktion des elliptischen Integrals auf die Normalform hat man zunächst den quadratischen Faktor unter dem Wurzelzeichen in Gl. (18) in seine linearen Faktoren zu zerlegen. Setzt man diesen quadratischen Faktor gleich Null und löst nach $x$ auf, so erhält man

$$x = -M \pm \sqrt{M^2 + \frac{u_1^2\theta_1^2 x_0 + 2sG\theta_2 - \theta_2^2 w_0^2 x_0(1-x_0^2) - 2u_1 w_0 \theta_1 \theta_2 (1-x_0^2)}{2sG\theta_2}} \tag{19}$$

wobei zur Abkürzung

$$M = \frac{u_1^2\theta_1^2 + w_0^2\theta_2^2(1-x_0^2)}{4sG\theta_2}$$

gesetzt ist. Während der Kreiselbewegung schwingt $a$ zwischen dem Werte $x_0$ und einem Werte $x_1$ hin und her, der durch Gl. (19) angegeben wird, wenn man darin das positive Wurzelvorzeichen nimmt. Wenn $u_1$ sehr groſs ist, kann man dafür näherungsweise

$$x_1 = x_0 - 2\frac{w_0\theta_2}{u_1\theta_1}(1-x_0^2)$$

setzen, d. h. der Kreisel schwingt dann nur zwischen zwei sehr nahe bei einanderliegenden Werten von $x$.

Die weitere Erörterung dieser Einzelheiten hätte an dieser Stelle keinen Zweck. Mir kam es, wie ich nochmals hervorheben möchte, nur auf den Nachweis an, auf wie einfache Art sich die Theorie des Kreisels mit Hilfe der Vektoren behandeln läſst, ohne daſs man aus der Mechanik mehr als nur den Flächensatz voraussetzen müſste.

# Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues.

Von PAUL ROTH in Berlin.

Man berechnet heutzutage im Maschinenbau Konstruktionsteile, die auf zusammengesetzte Festigkeit beansprucht werden, nach dem Gesichtspunkt, dafs die gröfste auftretende Dehnung einen gewissen durch Materialbeschaffenheit und die jeweiligen Umstände gegebenen Grenzwert nicht überschreitet. Diese Rechenmethode gründet sich auf die Theorie, dafs die gröfste Dehnung für jeden Spannungszustand, vor allem für die Elastizitätsgrenze, charakteristisch ist. In neuerer Zeit ist diese Theorie von verschiedenen Seiten angegriffen worden, weil es sich zeigte, dafs die Theorie mit den Ergebnissen von praktischen Versuchen nicht übereinstimmt. Wenn dem so ist, so mufs an die Stelle der alten Theorie eine neue als Grundlage für die Festigkeitsformeln gesetzt werden. Es ist nun die Frage, welche Festigkeitstheorie nach dem bis heute vorliegenden Versuchsmaterial die gröfste Wahrscheinlichkeit für sich hat, und wie weit sich die Gestalt und die Resultate der Festigkeitsformeln des Maschinenbaues mit der ihnen zu Grunde liegenden Theorie ändern. Hierüber soll die vorliegende Arbeit Aufschlufs geben. Sie zerfällt nach dem Gesagten von selber in zwei Abschnitte:

Im ersten Teile sollen die bisher aufgestellten Festigkeitstheorien an Hand des Versuchsmaterials einer kritischen Betrachtung unterworfen werden,

im zweiten Teile sollen die für den praktischen Gebrauch wichtigsten Formeln der Festigkeitslehre nach derjenigen Theorie abgeleitet werden, die sich als die wahrscheinlich richtige im ersten Abschnitt ergeben hat.

Bei der Besprechung der Festigkeitstheorien werde ich mich an den Aufsatz von O. Mohr[1]):

Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?

anlehnen und namentlich die dort angegebene zeichnerische Darstellung beliebiger Spannungszustände benützen. Die Darstellung ist unabhängig von jeder Festigkeitstheorie und liefert ein ausgezeichnetes

1) Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure 1900, S. 1524 ff.

Mittel, die Übereinstimmung einer Theorie mit den Versuchsergebnissen zu prüfen. Es soll daher hier zuerst die graphische Darstellung mit einigen Erweiterungen, die für die späteren Betrachtungen von Nutzen sind, wiedergegeben werden.

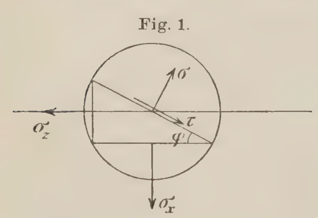
Hat man an einer Stelle eines durch äufsere Kräfte beanspruchten Körpers die Normalspannungen und Schubspannungen für drei zu einander senkrechte Flächenelemente ermittelt, so kann man durch rein mathematische Umrechnung die Spannungen für beliebig gerichtete Flächenelemente desselben Körperpunktes finden. Man bemerkt dann, dafs in je drei ausgezeichneten Flächenelementen die Schubspannungen verschwinden. Diese Flächen stehen auf einander senkrecht, die in ihnen wirksamen reinen Normalspannungen werden als Hauptspannungen, ihre Aktionslinien als Hauptachsen des Punktes bezeichnet. Mit den Hauptspannungen ist an jeder Stelle des beanspruchten Körpers der Spannungszustand vollständig bestimmt.

Denkt man sich ein Körperelement als unendlich kleine Kugel herausgenommen, und durch je zwei Hauptachsen desselben eine Ebene gelegt, so schneiden die drei Ebenen die Kugel in drei gröfsten Kreisen. Es läfst sich leicht beweisen, dafs die Richtungen der Gesamtspannungen in denjenigen Oberflächenelementen der Kugel, welche von einem der drei Kreise geschnitten werden, in die Ebene eben dieses Kreises fallen.

Die drei Hauptspannungen seien der algebraischen Gröfse nach geordnet $\sigma_z$, $\sigma_y$, $\sigma_x$; die drei Ebenen sollen als $xy$-, $yz$-, $zx$-Ebene bezeichnet werden, nach den Indices der beiden Hauptspannungen, welche sie enthalten.

Die Spannungen in den Oberflächenelementen der Kugel werden in einem Koordinatensystem derart aufgezeichnet, dafs die Normalspannung einer Fläche als Abscisse, die zugehörige Schubspannung als Ordinate abgetragen wird. Die Punkte des Systems, welche Hauptspannungen darstellen, liegen auf der Abscissenachse, weil die Hauptspannungen keine Schubkomponenten besitzen. In Fig. 2 wird $\sigma_z$ durch die Strecke $\overline{OZ}$, $\sigma_y$ durch $\overline{OY}$, $\sigma_x$ durch $\overline{OX}$ dargestellt.

Fig. 1.




In die unendlich kleine Kugel werde ein Prisma von dreieckigrechtwinkligem Querschnitt so gelegt, dafs die senkrecht auf einander stehenden Seitenflächen die $\sigma_z$-Achse und die $\sigma_x$-Achse zu Normalen haben, die Prismenachse also mit der $\sigma_y$-Achse zusammenfällt (s. Fig. 1). Dann liegt auch die Spannung der dritten, um den Winkel $\varphi$ gegen die $yz$-Ebene geneigten, Seitenfläche mit ihren beiden Komponenten $\sigma$ und $\tau$

in der $zx$-Ebene. Man erhält also aus den Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte, die an dem Prisma angreifen, die beiden Gleichungen[1]):

$$(1) \qquad \sigma = \sigma_z \sin^2 \varphi + \sigma_x \cos^2 \varphi$$

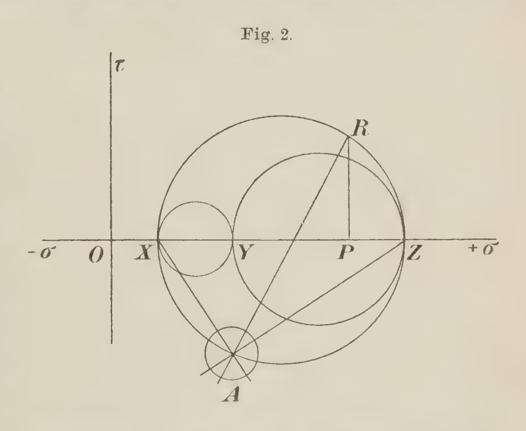
$$(2) \qquad \tau = (\sigma_z - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi$$

Durch Elimination von $\varphi$ erhält man

$$(\sigma - \sigma_x)(\sigma_z - \sigma) = \tau^2.$$

Daraus erkennt man, daſs der geometrische Ort der Punkte $(\sigma, \tau)$ ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt auf der $\sigma$-Achse liegt und die Abscisse $\frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)$ hat, und dessen Durchmesser die Länge $(\sigma_z - \sigma_x)$ hat. Da die Kugel unendlich klein ist, so kann man die Spannungen in den Oberflächenelementen, welche den betrachteten Prismenseiten parallel sind, gleich den entsprechenden Spannungen in diesen setzen. Auf dem Kreis über der Strecke $\overline{XZ} = \sigma_z - \sigma_x$ (Fig. 2) liegen demnach die Punkte, deren Koordinaten die Spannungen in solchen Oberflächenelementen der Kugel wiedergeben, welche von der $zx$-Ebene geschnitten werden. Schlägt man noch über den Strecken $\overline{XY} = \sigma_y - \sigma_x$ und $\overline{ZY} = \sigma_z - \sigma_y$ Kreise, so liegen auf deren Peripherien die Punkte, deren Koordinaten die Spannungen von Oberflächenelementen senkrecht zur $xy$- und $yz$-Ebene darstellen. Die drei Kreise über den Strecken

Fig. 2.




$\overline{XZ}$, $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ nennt Mohr die Hauptkreise des Spannungszustandes. Die Punkte, welche Spannungen eines beliebig gelegenen Oberflächenelementes der Kugel darstellen, liegen sämtlich innerhalb der beiden von den drei Kreisen umschlossenen Zwickel. Der Hauptkreis über $\overline{XZ}$ ist vor den beiden anderen dadurch ausgezeichnet, daſs er die gröſsten Schubspannungen enthält, welche zusammen mit einer Normalspannung von bestimmter Gröſse auftreten.

Die Darstellungsweise hat vor der bekannteren Spannungsellipse den Vorteil, daſs man durch sie ein Bild von dem Verlauf der Spannungen nicht nur ihrer Gröſse, sondern auch ihrer Richtung nach gewinnen kann, und zwar auf folgende Weise: Verbindet man (Fig. 2)

---

1) S. Föppl, Festigkeitslehre S. 29.

einen beliebigen Punkt $A$ des $\overline{XZ}$-Kreises mit den Punkten $X$ und $Z$ und mit dem Punkt $R$, dessen Koordinaten die Spannungskomponenten der dritten Prismenseite angeben, so bildet $AR$ mit $AX$ und $AZ$ dieselben Winkel wie $\sigma$ mit $\sigma_x$ und $\sigma_z$ in Fig. 1, wie man aus den Gleichungen 1 und 2 erkennen kann. Schlägt man um $A$ (Fig. 2) einen kleinen Kreis von beliebigem Durchmesser, und sieht diesen als den gröſsten Kugelkreis der $XZ$-Ebene an, so giebt $AX$ die Richtung der Hauptspannung $\sigma_x$, $AZ$ die Richtung der Hauptspannung $\sigma_z$ an, und $AR$ schneidet den kleinen Kreis um $A$ in einem Punkt, welcher die Lage des Flächenelementes, in dem die Spannungen $\overline{OP} = \sigma$ und $\overline{PR} = \tau$ herrschen, zu den Hauptachsen vollständig bestimmt.

Unter allen Spannungszuständen sind diejenigen von hervorragendem Interesse, welche am häufigsten durch den Versuch verwirklicht werden, nämlich einfacher Zug, einfacher Druck, reine Drehung. Die entsprechenden gröſsten Hauptkreise sind, mit I, II, III bezeichnet, in Fig. 3 eingetragen. Es ist im Falle

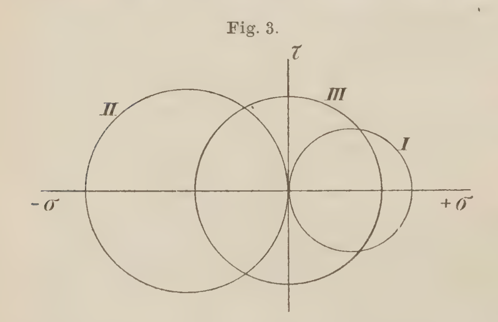
(I) $\sigma_z = \varkappa_1 \qquad \sigma_y = \sigma_x = 0$

(II) $\sigma_z = \sigma_y = 0 \qquad \sigma_x = -\varkappa_2$

(III) $\sigma_z = \varkappa_3 \qquad \sigma_y = 0 \qquad \sigma_x = -\varkappa_3.$

An einigen weiteren Beispielen soll gezeigt werden, in wie hohem Maſse die Mohrsche Darstellungsweise das Eindringen in das Wesen von scheinbar komplizierten Spannungszuständen erleichtert, insbesondere wenn die Spannungen periodischen Schwankungen unterworfen sind.

Fig. 3.




Ein beiderseits geschlossenes, kreiszylindrisches Rohr mit starker Wandung, dessen innerer Radius $r$, dessen äuſserer Radius $R$ ist, sei auf inneren Überdruck vom Betrage $p$ beansprucht. Dann treten in einem Punkt der Wandung, der den Abstand $\varrho$ von der Rohrachse hat, folgende Hauptspannungen[1]) auf:

$$\text{tangential} \qquad \sigma_z = p\frac{r^2}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^2 + \varrho^2}{\varrho^2}$$

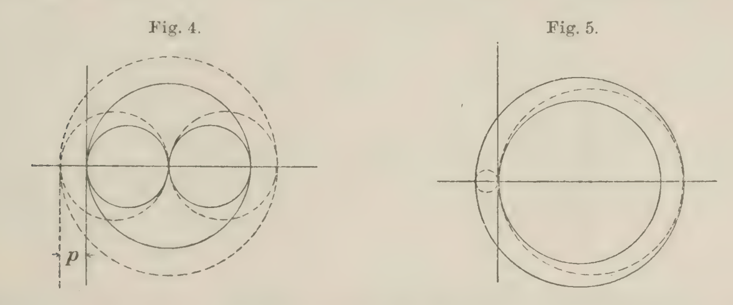
$$\text{axial} \qquad \sigma_y = p\frac{r^2}{R^2 - r^2} = \text{const.}$$

$$\text{radial} \qquad \sigma_x = -p\frac{r^2}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^2 - \varrho^2}{\varrho^2}.$$

1) Bach, Elast. u. Festigk. IV. Aufl. § 58.

Die Abscisse des Mittelpunktes für den gröfsten Hauptkreis ist $\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} = \frac{pr^2}{R^2 - r^2} = \sigma_y = \text{const.}$ Die gröfsten Hauptkreise sind also für alle Punkte im Inneren der Wandung und an den Oberflächen konzentrisch, die Durchmesser der beiden anderen Hauptkreise sind stets einander gleich. An der äufseren Oberfläche des Rohres wird $\sigma_x = 0$, der Spannungszustand daselbst unterscheidet sich von dem der einfachen Zugspannung nur durch das Vorhandensein der mittleren Hauptspannung $\sigma_y$. In Fig. 4 sind die Hauptkreise für einen Punkt der äufseren (ausgezogen) und für einen Punkt der inneren Oberfläche (gestrichelt) gezeichnet.

In einem Rohr ohne feste Böden (etwa einem warm aufgezogenen Geschützring) wird die axiale Hauptspannung $\sigma_y = 0$, die beiden anderen Hauptspannungen bleiben ebenso grofs wie im vorigen Beispiel. Der gröfste Hauptkreis bleibt also derselbe, wenn die Dimensionen und $p$




dieselbe Gröfse haben, wie vorher; die beiden andern Hauptkreise aber werden ungleich grofs (s. Fig. 5). Die gröfsten Hauptkreise sind wieder alle konzentrisch. An der äufseren Oberfläche verschwinden zwei Hauptspannungen, der Spannungszustand daselbst besteht in einer einfachen, tangential gerichteten Zugbeanspruchung.

Als Beispiel für wechselnde Belastung sei folgender Fall gewählt: Ein kreiszylindrischer Stab, welcher um seine Achse rotiert, werde durch ein Kräftepaar beansprucht, dessen Ache zur Stabachse senkrecht steht. Dann schwankt in einem Punkt an der Oberfläche des Stabes die gröfste Hauptspannung, welche stets die Richtung der Stabachse hat, zwischen zwei numerisch gleichen Grenzwerten: $\sigma_{\max} = \sigma_0$ und $\sigma_{\min} = -\sigma_0$ hin und her; die beiden anderen Hauptspannungen sind immer Null. Der Hauptkreis, welcher in jedem Augenblick den Spannungszustand des betrachteten Punktes darstellt, geht also stets durch den Koordinatenanfang. In dem Augenblick, in welchem der Punkt, auf der gezogenen Stabseite liegend, durch die Ebene des biegenden Kräftepaares hindurchgeht, habe der Hauptkreis die Gröfse I (Fig. 6). Während der nächsten

Viertelumdrehung des Stabes schrumpft der Kreis auf einen Punkt, den Koordinatenanfang zusammen, wächst dann während der zweiten Viertelumdrehung auf der negativen Seite der Abscissenachse bis zur Gröfse bei II, und geht während des dritten und vierten Viertels denselben Weg zurück.

Tritt nun zu dem Biegungsmoment ein konstantes Drehungsmoment, dessen Ebene auf der Stabachse senkrecht steht, so wird in allen Punkten an der Oberfläche des Stabes eine konstante axial und tangential gerichtete Torsionsspannung $\tau_0$ hervorgerufen, und es treten nunmehr an jedem Punkt zwei Hauptspannungen auf, nämlich

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_0^2}\right) \text{ und } \sigma_2 = \tfrac{1}{2}\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_0^2}\right);$$ [1]

darin bedeutet $\sigma$ die jeweilige Normalspannung in der Stabachsenrichtung $\sigma = \sigma_0 \cdot \cos\vartheta$, wenn $\vartheta$ den Umdrehungswinkel des Stabes aus

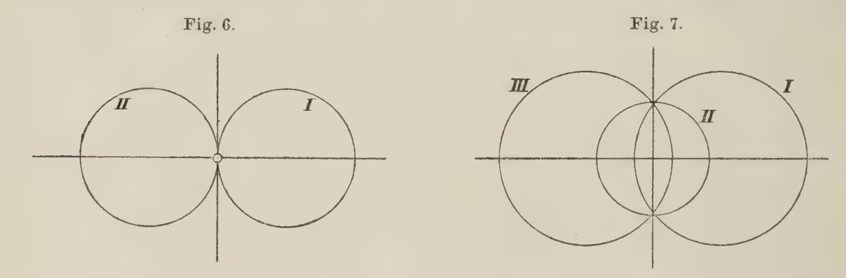



Fig. 6. Fig. 7.

der oben angegebenen Anfangsstellung bezeichnet. Die mittlere Hauptspannung ist Null, der Radius des gröfsten Hauptkreises ist $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau_0^2}$, die Abscisse des Mittelpunktes ist $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}\sigma$. In einem der Stabachse parallelen Flächenelement ist die Normalspannung immer Null, die Schubspannung immer $\tau_0$; der gröfste Hauptkreis mufs also für alle Winkel $\vartheta$ die Ordinatenachse in dem Punkt $\tau_0$ schneiden. Er geht (Fig. 7) von der Lage und Gröfse bei I ($\vartheta = 0$) durch die Lage und Gröfse bei II $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}, \text{ reine Drehungsbeanspruchung}\right)$ in die Lage III ($\vartheta = \pi$) über, wo er die gleiche Gröfse hat, wie bei I. Während der zweiten halben Umdrehung des Stabes geht der gröfste Hauptkreis denselben Weg zurück. Die beiden kleineren Hauptkreise gehen immer durch den Koordinatenanfang, sie sind in die Figur nicht eingetragen.

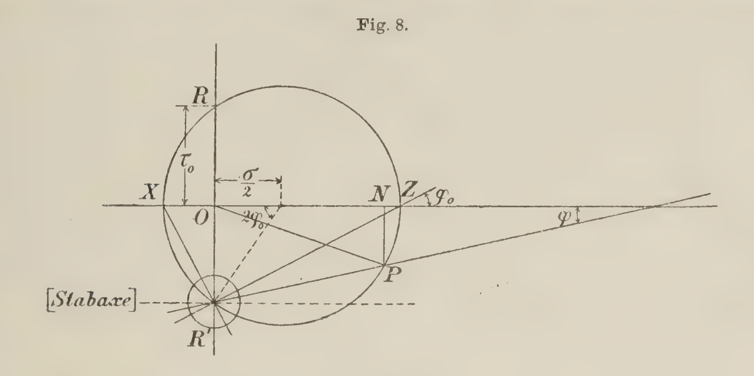
Um in jedem Augenblick die Richtungen der Hauptspannungen zur Stabachse zu finden, kann man die Abscissenachse (Fig. 8) zugleich

---

1) S. Föppl, Festigkeitslehre S. 31.

als Stabachse ansehen. Schlägt man um $R'$ einen Kreis, den man als einen gröſsten Kreis der unendlich kleinen Kugel betrachtet, so giebt $R'Z$ die Richtung der gröſsten, $R'X$ die Richtung der kleinsten

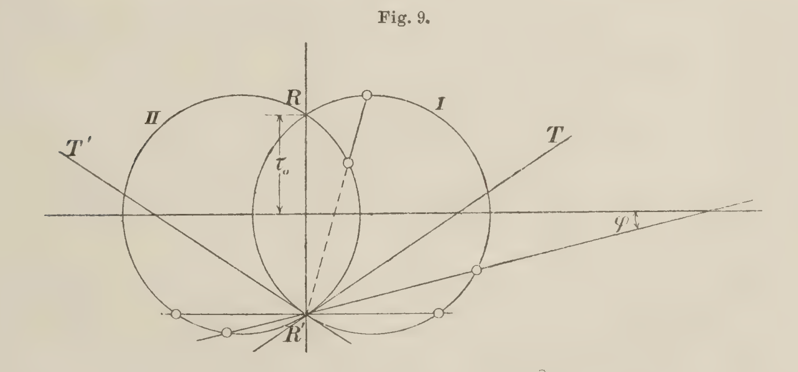
Fig. 8.




Hauptspannung gegen die Stabachse an; man liest die Beziehung[1]): $\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\,\tau_0}{\sigma}$ für den Winkel $\varphi_0$ zwischen Stabachse und Hauptachse aus der Figur ab.

Wie der Punkt $R$ die Spannung eines Flächenelementes angiebt, dessen Normale die Richtung $R'R$ hat, der Punkt $Z$ die Spannung eines Flächenelementes, dessen Normale die Richtung $R'Z$ hat, so kann

Fig. 9.




man auch bei einer beliebigen Richtung $\varphi$ der Normalen unter diesem Winkel gegen die Abscissenachse einen Strahl durch den Punkt $R'$ ziehen und erhält in dem zweiten Schnittpunkt $P$ des Strahles mit dem Hauptkreis denjenigen Punkt des Koordinatensystems, welcher die Spannung in dem normal zu $R'P$ gerichteten Flächenelement darstellt. $\overline{OP}$ ist die Gesamtspannung dieser Fläche, $\overline{ON}$ die Normalkomponente,

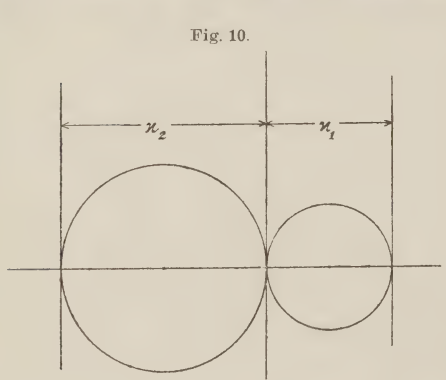
1) Vergl. Föppl, Festigkeitslehre S. 29, Gleichg. (11).

$\overline{PN}$ die Schubkomponente. Der Punkt $R'$ liegt für alle Hauptkreise, die sich bei der Umdrehung des Stabes ergeben, an derselben Stelle; mithin liegen die Punkte $P$, welche die jeweilige Spannung in einem unter $(90-\varphi)$ gegen die Stabachse geneigten Flächenelement darstellen, alle auf der Geraden durch $R'$, die mit der Abscissenachse den Winkel $\varphi$ bildet, und zwar wandert der Punkt $P$ auf der Geraden zwischen den Schnittpunkten derselben mit den beiden Grenzkreisen I und II (Fig. 9) hin und her. Man erkennt ferner, dafs in allen Flächen, deren Normalen zwischen $R'R$ und $R'T$ (Tangente an den Kreis II) und zwischen $R'R$ und $R'T'$ (Tangente an den Kreis I) liegen, die Spannung immer eine Normalkomponente behält, und dafs in allen Flächen bei bestimmten Lagen des rotierenden Stabes eine reine Schubspannung auftritt, welche immer die Gröfse $\tau_0$ hat.

## Die Festigkeitstheorien.

Nach der ältesten Theorie ist die gröfste positive oder gröfste negative Hauptspannung für den Spannungszustand charakteristisch. In der Mohrschen Darstellung würde das bedeuten, dafs die gröfsten Hauptkreise aller gleichwertigen Spannungszustände eine der beiden im Abstand $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zur Ordinatenachse gezogenen Parallelen (Fig. 10) berühren. $\varkappa_1$ ist die gröfste einfache Zugspannung, $\varkappa_2$ die gröfste einfache Druckspannung, welche den Zustand charakterisieren. Der für die praktische Anwendung wichtigste unter den charakteristischen Zuständen ist die Elastizitätsgrenze, weil nach dieser in der Regel die zulässige Beanspruchung des Materials bemessen wird. Für die Elastizitätsgrenze, die sich bei den technisch wichtigsten Materialien, Schmiedeisen und Stahl, mit der Proportionalitätsgrenze deckt, trifft die Theorie sicher nicht zu. Bauschinger[1]) fand die Proportionalitätsgrenze bei Torsion von verschiedenen Sorten Bessemerstahl etwa halb so hoch wie bei Zug, andere Experimentatoren haben ganz ähnliche Verhältnisse gefunden.[2])

Fig. 10.




1) Mitteil. a. d. mechan.-techn. Labor. München, Heft 3, 1874.

2) Vergl. J. Guest, Strength of ductile materials under combined stress. Philos. Magazine 1900, Bd. 49, S. 69 ff.

Der gröfste Hauptkreis für Torsion ist demnach etwa halb so grofs, als die Theorie verlangt. Auch für den Bruch scheint die Theorie nicht richtig zu sein; doch ist dies schwer zu entscheiden, weil es aufser bei Versuchen mit einfachem Zug oder Druck selten möglich ist, die Gröfse der Hauptspannungen im Moment des Bruches mit einiger Sicherheit festzustellen.

Eine zweite Theorie setzt an die Stelle der gröfsten Hauptspannung die gröfste Hauptdehnung.[1]) Wie weit diese Theorie für die Bruchgrenze zutrifft, ist noch nicht genügend geklärt. Einige Versuche, z. B. von v. Szily[2]) sprechen dafür, andere entschieden dagegen, z. B. die Versuche von Voigt[3]) an Steinsalz und einem stearinartigen Material. Die Frage nach der Gültigkeit der Theorie an der Bruchgrenze ist indessen praktisch von ungleich geringerer Bedeutung als die Frage, ob die Elastizitätsgrenze von der Höhe der gröfsten Dehnung abhängt. Auf dieser Annahme beruhen die im Maschinenbau gebräuchlichen Festigkeitsformeln, indem darin als Mafs für die zulässige Anstrengung eines Materials immer die gröfste *reduzierte* Hauptspannung, d. h. die mit dem Elastizitätsmodul $E$ multiplizierte gröfste Haupt*dehnung*, angesetzt ist. Man kann aber nach dem heute vorliegenden Versuchsmaterial an dieser Annahme nicht mehr festhalten. Wenn die Dehnungstheorie, wie sie kurz genannt werden kann, richtig wäre, so müfste sich die gröfste Hauptspannung an der Torsionselastizitätsgrenze eines Materials zur Spannung an der Zugelastizitätsgrenze wie 1 : 1,3 verhalten, weil die Hauptdehnung im ersten Fall $\frac{1}{E}\sigma_z\left(1+\frac{1}{m}\right)$, im zweiten Fall nur $\frac{1}{E}\sigma_z$ beträgt; $m$ bedeutet hierin den Koeffizienten der Querkontraktion, der ungefähr die Gröfse $\frac{10}{3}$ hat. Nach den schon erwähnten Versuchen von Bauschinger[4]) ist aber das Verhältnis thatsächlich z. B. für Stahl etwa 1 : 2. Das Gleiche fand J. Guest[4]) bei Versuchen an Röhren aus Stahl, Messing und Kupfer.

Guest sieht durch seine Versuche die von neueren Forschern vielfach verfochtene Theorie bestätigt, dafs die gröfste Schubspannung einen Spannungszustand charakterisiere. Die gröfste Schubspannung tritt, wie

---

1) Die Mohrsche Darstellung dieser Theorie ist etwas kompliziert, sie ist in der Originalabhandlung von Mohr [Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure 1900, S. 1528] zu finden.

2) Zugversuche mit auf inneren Druck beanspruchten Röhren. [Kongrefs des Internationalen Verbandes für die Materialprüfungen der Technik, Budapest 1901.]

3) Annalen der Physik u. Chemie, 1894, Bd. 53, S. 43; 1899, Bd. 67, S. 452; 1901, Bd. 4, S. 567.

4) S. o. S. 292.

aus der Mohrschen Darstellung deutlich hervorgeht, in der Ebene der gröſsten und kleinsten Hauptspannung auf und ist gleich der halben Differenz zwischen diesen beiden, sie wird ihrer Gröſse nach durch den Radius des gröſsten Hauptkreises dargestellt. Daraus folgt, daſs nach der Schubspannungstheorie, wie man sie kurz nennen kann, die gröſsten Hauptkreise aller Spannungszustände, welche an derselben Grenze liegen, von gleicher Gröſse sein müſsten. Auf diese Theorie braucht hier nicht näher eingegangen zu werden, da sich zeigen wird, daſs sie nur ein Sonderfall der Mohrschen Theorie ist.

Vor der Mohrschen Theorie ist noch eine andere zu erwähnen, welche auf Coulomb zurückzuführen ist. Die von Coulomb[1]) im Jahre 1773 unter dem Titel: Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelque problèmes de statique, relatifs à l'architecture veröffentlichte Abhandlung enthält den Grundgedanken einer Festigkeitstheorie. Coulomb bestimmt rechnerisch den Winkel, welchen die Bruchfläche eines auf einfachen Druck beanspruchten prismatischen Körpers mit der Richtung der Kraft bildet, indem er das Minimum des Materialwiderstandes gegen Gleiten aufsucht. Der Widerstand setzt sich zusammen aus der Kohäsion und der inneren Reibung des Materials. Die Bedingung, die Coulomb für die Lage der Bruchfläche findet, nimmt er zugleich als Bedingung für den Eintritt des Bruches an. Er hat aber seine Betrachtung auf einfache Zug- und Druckbeanspruchung beschränkt, nicht auf zusammengesetzte Beanspruchung ausgedehnt.[2]) Zu einer vollständigen Festigkeitstheorie wurde der Gedanke von Coulomb erst durch Ch. Duguet[3]) ausgebaut, der sich aber nicht streng an die Anschauungsweise des ersteren band. Namentlich in zwei wichtigen Punkten weicht er davon ab: Coulomb hatte angenommen, daſs die innere Reibung in einer Fläche mit dem daselbst wirksamen Normaldruck zunimmt, hatte aber beim einfachen Zug die innere Reibung ganz auſser Acht gelassen und die Zugfestigkeit gleich der Kohäsion des Materials gesetzt. Duguet dagegen nimmt an, daſs der Reibungswiderstand einer Fläche abnimmt, wenn in derselben eine Zugspannung herrscht. Ebenso wie Coulomb sieht Duguet den Bruch als Gleit-

---

1) Savants étrangers 1773.

2) Es ist geschichtlich interessant, daſs Coulomb erwartete, die Zugfestigkeit und die Schubfestigkeit eines Materials gleich groſs zu finden, weil in beiden Fällen nur die Kohäsion zu überwinden sei, einmal senkrecht zum Querschnitt, das andere Mal parallel mit dem Querschnitt des belasteten Stabes. Er machte den Versuch mit einem Steinmaterial (une pierre blanche de Bordeaux) und fand seine Erwartung bestätigt.

3) Ch. Duguet: Limite d'élasticité et résistance à la rupture. Deuxième partie: Statique générale. 1885.

vorgang an und setzt die Schubspannung $T$ einer Fläche, welche in dieser den Bruch herbeiführt, $T = S - f \cdot N$, worin $S$ die reine Schubfestigkeit, $N$ die in derselben Fläche wie $T$ wirkende, als algebraische Gröfse aufzufassende Normalspannung, $f$ den Koeffizienten der inneren Reibung bedeutet. Während aber Coulomb betont, dafs der Koeffizient $f$ für jedes Material eigens bestimmt werden müsse, setzt Duguet für alle Metalle $f = 0{,}176$, für andere Materialien giebt er keine Werte an.

Ist $f = \operatorname{tg} \varphi$, so verhält sich nach der Duguetschen Theorie die Zugfestigkeit eines Materials zur Druckfestigkeit wie

$$\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) : \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) = 1 : 1{,}4,$$

wenn man $f = 0{,}176$ d. h. $\varphi = 10^0$ setzt. Da für Gufseisen das Verhältnis bekanntlich etwa $1 : 4$ beträgt, so ist die Annahme eines konstanten $f$ für alle Metalle jedenfalls unzutreffend.

Für eine beliebige Belastungsart, bei welcher alle drei Hauptspannungen von Null verschieden sind, erhält Duguet die Gleichung[1])

$$S = \tfrac{1}{2}\, \sigma_z \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\, \sigma_x \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

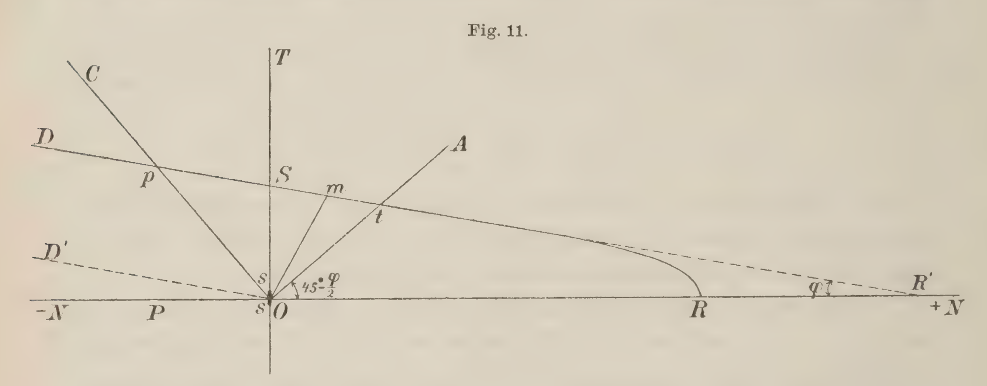
die im Augenblicke des Bruches gelten soll. Die mittlere Hauptspannung $\sigma_y$ kommt in diesem Ausdruck nicht vor, ihre Gröfse ist demnach für den Eintritt des Bruches ohne Belang.

Duguet giebt zur Veranschaulichung seiner rechnerischen Resultate die Fig. 11. $ss$ bedeutet ein Flächenelement, das auf der Zeichenebene senkrecht steht, der Fahrstrahl $\overline{Om}$ bedeutet nach Gröfse und Richtung eine Spannung, durch welche in $ss$ der Bruch herbeigeführt wird. $NN$ ist die Achse der Normalkomponenten, $OT$ die Achse der Schubkomponenten der Spannungen in $ss$. Da $T + fN = S = \text{const}$, so liegen die Endpunkte aller Fahrstrahlen $\overline{Om}$, welche Bruchspannungen darstellen, auf einer Geraden $DR'$, welche unter dem Winkel $\varphi$ gegen die Abscissenachse geneigt ist. Der Abschnitt $\overline{OS}$ auf der Ordinatenachse giebt die Gröfse $S$ der reinen Schubfestigkeit. Spannungen, deren Abbildungen innerhalb des Winkels $D'OP$ fallen ($D'O \parallel DR'$), können keinen Bruch in $ss$ herbeiführen. Da bei Eintritt des Bruches die gröfste Hauptspannung mit der Normale der Fläche einen Winkel $\alpha = 45 - \frac{\varphi}{2}$, die kleinste Hauptspannung einen solchen $\gamma = 45 + \frac{\varphi}{2}$ bildet, so geben die Richtungen $OA$ und $OC$, welche unter $\alpha$ und $\gamma$ gegen die Abscissenachse gezogen sind, die *Richtungen* der beiden

1) S. Duguet S. 32.

Hauptspannungen im Augenblick des Bruches an, die Achse der mittleren Hauptspannung steht in $O$ auf der Bildebene senkrecht. Die *Gröfse* der Hauptspannungen für einen beliebigen Fall von Beanspruchung ist aus der Figur *nicht* zu entnehmen. Die einfache Zugfestigkeit wird durch die Strecke $\overline{Ot}$, die einfache Druckfestigkeit durch $\overline{Op}$ dargestellt. Der allseitig gleiche Druck (dabei ist $T = 0$) kann nach der Formel $T + fN \leqq S$ unendlich grofs werden, ohne dafs Bruchgefahr eintritt; dagegen liefert die Formel für den allseitig gleichen Zug den Grenzwert $N_0 = \frac{S}{f}$, der nach Duguet ein Mafs für die Kohäsion des Materials ist und durch die Strecke $\overline{OR'}$ dargestellt wird, wenn man $f$ für alle Werte $N$ konstant läfst. Duguet läfst aber $f$ mit wachsender Druckspannung allmählich abnehmen, so dafs sich die Gerade $DR'$ nach der positiven Abscissenachse hin krümmt, und $\overline{OR}$ die Grenze der allseitig

Fig. 11.




gleichen Zugspannung angiebt. Auf die Übereinstimmung dieser Theorie mit den Erfahrungen braucht nicht weiter eingegangen zu werden, da sich zeigen wird, dafs auch diese Theorie nur ein Sonderfall der nun zu besprechenden Mohrschen Theorie ist.

Mohr kommt aus anderen Gesichtspunkten heraus als Coulomb und Duguet zu ganz ähnlichen Resultaten. Er veröffentlichte seine Theorie zuerst 1882[1]), also ehe Duguet sein Werk herausgab, und wies 1900[2]), auf mehr Versuchsmaterial gestützt, in der erwähnten Abhandlung von neuem darauf hin.

Mohr nimmt an, dafs für den Eintritt bleibender Deformationen und des Bruches die Spannungen derjenigen Flächen mafsgebend sind, in welchen bleibende Verschiebungen bezw. der Bruch auftreten; er läfst die innere Reibung ganz aus dem Spiel, hält es für unwahrschein-

1) Civil-Ingenieur 1882. S. 113.

2) Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ing. 1900. S. 1524.

lich, daſs nur eine Komponente der Spannung maſsgebend sein soll, sondern geht von der Ansicht aus, daſs die Bruchgefahr von den beiden Komponenten der Gesamtspannung abhänge. Mohr gelangt so zu dem Satz: „Die Schubspannung der Gleitflächen erreicht an der Grenze einen von der Normalspannung und der Materialbeschaffenheit abhängigen gröſsten Wert“. Es ist dies dasselbe, was Duguet durch die Beziehung $T + fN \leqq S$ ausdrückt; die Fassung des Satzes ist nur bei Mohr viel allgemeiner, vor allem ist der Koeffizient $f$ von der Materialbeschaffenheit abhängig gemacht und seine Gröſse vorläufig ganz unbestimmt. Die Mohrsche Theorie kann sich daher den Versuchsergebnissen viel besser anpassen.

Die gleichzeitig mit einer gewissen Normalspannung auftretenden gröſsten Schubspannungen liegen auf dem gröſsten Hauptkreis[1]), dieser allein kommt daher bei jedem Spannungszustand in Betracht. Die gröſsten Hauptkreise für einen gewissen Grenzzustand nennt Mohr Grenzkreise.

Das Gesetz der Abhängigkeit der Grenzschubspannung von der Normalspannung desselben Flächenelementes nimmt Mohr eindeutig an bis auf das Vorzeichen der Schubspannung, welches physikalisch keine Bedeutung hat. Wenn also bei Vorhandensein einer gewissen Normalspannung eine Schubspannung von ganz bestimmter Gröſse die Gleitbewegung der Fläche herbeiführt, in welcher beide wirken, so können nie zwei Grenzkreise einander umschlieſsen, sonst gäbe es ja zwei Grenzschubspannungen zu einer Normalspannung. Jeder Grenzkreis muſs daher den unmittelbar benachbarten schneiden, und alle werden von einer gemeinsamen Umhüllungskurve berührt. Diese Hüllkurve stellt das Gesetz dar, nach welchem der Grenzwert der Schubspannung von der Normalspannung abhängt und wird die Grenzkurve genannt.

Die Annahme, daſs ein Körper wohl durch allseitigen Zug, aber nicht durch allseitigen Druck zertrümmert werden könne, führte Mohr auf die in Fig. 12 gezeichnete parabelartige Form der Bruchgrenzkurve; man erkennt darin sofort die Duguetsche Grenzkurve wieder, und es ist interessant zu bemerken, daſs beide Autoren unabhängig von einander die Kurve in ganz ähnlicher Form entworfen haben.

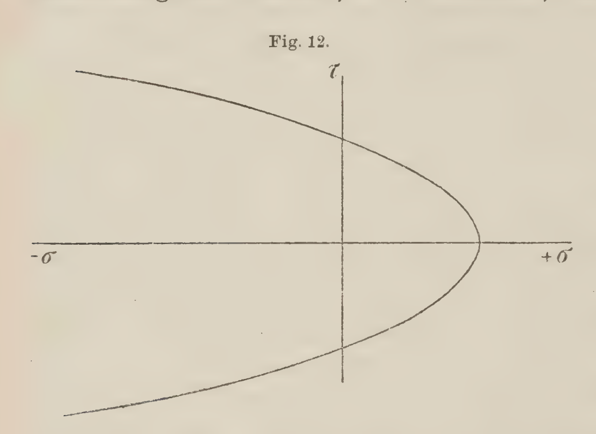
Mohr hat seine Theorie sowohl für die Elastizitätsgrenze wie für den Bruch aufgestellt. In dieser Beziehung muſs die Theorie von vornherein eine gewisse Beschränkung erfahren. Es giebt Materialien, welche keine Elastizitätsgrenze besitzen und auch keine deutliche Flieſsgrenze, die man an deren Stelle setzen könnte. Für solche Materialien kommt natürlich nur die Bruchgrenze und die Bruchgrenzkurve in Be-

---

1) S. o. S. 287.

tracht. Andrerseits giebt es auch zähe Materialien, welche zwar eine ganz bestimmte Zugfestigkeit, aber für manche Beanspruchungsarten, wie Druck und Torsion, keine Bruchgrenze haben, sondern sich jenseit der Fliefsgrenze wie zähe Flüssigkeiten verhalten und sich beliebig deformieren lassen. Unter diesen Umständen kann man nicht von einer Bruchgrenzkurve sprechen. Da aufserdem bei allen Materialien, welche grofse bleibende Formänderungen zulassen, die Formeln, nach denen die Spannungen aus den angreifenden äufseren Kräften berechnet werden, an der Bruchgrenze auch nicht annähernd richtige Resultate mehr geben können, so soll die Mohrsche Theorie für die *Bruch*grenze *nur* bei solchen Materialien in Betracht gezogen werden, die keine Elastizitätsgrenze besitzen, z. B. Gufseisen, Steinmaterial, im übrigen aber wird nur noch von der Theorie für die Elastizitätsgrenze die Rede sein.

Fig. 12.




Brauchbare Formeln kann man auf Grund der Mohrschen Theorie erst aufstellen, wenn man die Grenzkurve durch eine bestimmte mathematische Kurve annähert, und dafür kommt praktisch nur die gerade Linie in Betracht. Mohr ersetzt daher das Stück der Kurve zwischen den Grenzkreisen für einfachen Zug und für einfachen Druck durch die gemeinsamen äufseren Tangenten dieser beiden Kreise. Die Hauptkreise aller praktisch wichtigen Spannungszustände, die durch Zug, Druck, Schub, Drehung, Biegung und Innendruck entstehen können, werden bei dieser Annäherung mit einbegriffen.

Bezeichnet $\varkappa_1$ die Zugelastizitätsgrenze, $\varkappa_2$ die Druckelastizitätsgrenze, so lautet die Gleichung der Tangente

$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}\left[1 - \sigma\,\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 \varkappa_2}\right]$$

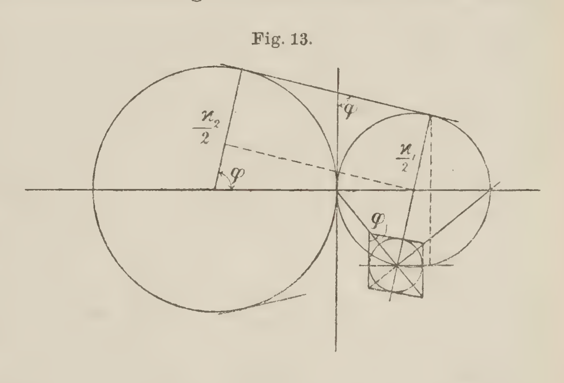
wo $\sigma$ und $\tau$ die Komponenten der in einer Gleitfläche wirkenden Spannung sind. $\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2} = \tau_0$ ist die Ordinate für $\sigma = 0$, also die Schubelastizitätsgrenze; bei reiner Torsion ist an der Elastizitätsgrenze $\sigma_z = \varkappa_3$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = -\varkappa_3$; der Grenzkreis hat den Koordinatenanfang zum Mittelpunkt, sein Radius ist $\varkappa_3 = \frac{\varkappa_1 \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}$.

Für jedes einzelne Material charakteristisch ist die Neigung der Grenzgeraden; der Winkel $\varphi$, welchen sie mit der $\tau$-Achse bildet, ist gegeben durch die Beziehung $\cos\varphi = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2 + \varkappa_1}$ (s. Fig. 13). Die Duguetsche Theorie mit $\varphi = 80^0$, und die Schubspannungstheorie mit $\varphi = 90^0$, sind demnach nur Sonderfälle der Mohrschen Theorie.

Prinzipielle Einwände gegen die Mohrsche Theorie können entweder auf der etwaigen Erkenntnis beruhen, dafs zwei experimentell gefundene Grenzkreise für dasselbe Material vollständig in einander fallen, und ihre Durchmesser über die Grenze der Versuchsfehler hinaus von einander abweichen, dafs also die Grenzschubspannungen nicht eindeutig bestimmt sind, oder es könnte sich zeigen, dafs die Annäherung der Grenzkurve durch die gerade Linie nicht ausreichend genau ist.

Was zunächst die Elastizitätsgrenze betrifft, so ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung durchaus zufriedenstellend. Die Versuche von Bauschinger[1]), v. Szily[2]) und J. Guest[3]) bestätigen die Theorie vollständig. Die Mohrsche Theorie ist vor allem dadurch gekennzeichnet, dafs in ihr die mittlere Hauptspannung $\sigma_y$ gar keine Rolle spielt. Guest hat nun durch planmäfsige Versuche festgestellt, dafs die Gröfse der mittleren Hauptspannung für den Eintritt der Streckgrenze ohne Einflufs ist. (Guest hat vornehmlich die Streckgrenze untersucht, weil er diese für den wirklich charakteristischen Deformationszustand hält, während er das Auftreten der Proportionalitätsgrenze vor der Streckgrenze auf lokale Fliefserscheinungen zurückführt. Soweit er die Proportionalitätsgrenze beobachtete, fand er übrigens die für die Streckgrenze gültigen Gesetze bestätigt.)

Fig. 13.




Da für Stahl und Schmiedeisen die Zug- und Druck-Elastizitätsgrenze etwa gleich hoch liegen, also $\varkappa_1 = \varkappa_2$ gesetzt werden kann, so geht die Mohrsche Theorie für diese beiden Materialien in die einfache Schubspannungstheorie über, die Gleichung der Mohrschen Geraden lautet dann einfach $\tau = \tau_0 = \text{const.}$

An der Bruchgrenze liegen die Verhältnisse weniger günstig für die Mohrsche Theorie. Zerreifsversuche unter verschieden hohen all-

1) S. o. S. 292. 2) S. o. S. 293. 3) S. o. S. 292.

seitigen Flüssigkeitsdrucken, welche Voigt[1]) an Steinsalz und an einem stearinartigen Material anstellen liefs, lassen keine Deutung nach der Mohrschen Theorie zu. Die Ergebnisse von Versuchen, welche Bach[2]) an Gufseisen anstellte, stehen ebenso gut mit der Dehnungstheorie im Einklang, wie mit der Mohrschen Theorie. Versuche von Bauschinger[3]) über die Zug-, Druck- und Schubfestigkeit von Zement zeigen eine ganz gute Übereinstimmung mit der Theorie, leider wurde aber die Torsionsfestigkeit nicht untersucht, die sehr viel zuverlässigere Daten ergeben hätte als die Schubfestigkeit.

Die Mohrsche Theorie bezieht sich, wie zu Anfang der Besprechung erwähnt, nicht nur auf den Zusammenhang der Grenzspannungen bei verschiedenartiger Belastung, sondern auch auf die Lage der Gleit- und Bruchflächen. Die Frage, wie weit die Theorie in dieser Hinsicht mit den Erfahrungen übereinstimmt, ist von hohem wissenschaftlichen Interesse, und die neueren Veröffentlichungen, besonders von L. Hartmann[4]), über die Fliefsfiguren liefern aufserordentlich reichhaltiges Material dazu; aber die Frage behandelt ein Gebiet für sich, das sehr umfangreich ist, und nicht in den Rahmen der vorliegenden Arbeit gehört. Auch auf den Verlauf der Grenzkurven jenseit der Grenzkreise für einfachen Zug und einfachen Druck soll nicht näher eingegangen werden, weil die aufserhalb dieser Grenze liegenden Spannungszustände kein unmittelbar praktisches Interesse haben.

Es erübrigt nur zum Schlufs, eine Gesamtbilanz über das Für und Wider die Mohrsche Theorie aufzustellen. Man wird zugeben müssen, dafs die Mohrsche Erklärung der Festigkeitserscheinungen besser ist als die früheren Theorien, welche zur Deutung und Zusammenfassung der Vorgänge aufgestellt wurden. Sie ist dadurch, dafs sie mehr unabhängige Variabele einführt, anpassungsfähiger als irgend eine ihrer Vorgängerinnen. Es wäre aber verfrüht, zu behaupten, dafs sie eine Lösung des allgemeinen Problems darstelle; die Abweichungen der Versuchsergebnisse von Voigt von den Hauptforderungen der Mohrschen Theorie sind zu grofs, um übersehen werden zu können, und die Zahl der Materialien, mit welchen methodische Versuchsreihen angestellt worden sind, ist noch verhältnismäfsig gering. Dagegen spricht nichts gegen die Existenz der Grenzkurve für die technisch wichtigen

---

1) Annalen der Physik und Chemie, 1894, Bd. 53 S. 43; 1899, Bd. 67 S. 452; 1901, Bd. 4 S. 567.

2) Elastizität und Festigkeit, § 35 u. § 40.

3) Mitteilungen a. d. mech.-techn. Labor. München, Heft 8.

4) L. Hartmann, Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts. Paris 1896.

Materialien. Bei Schmiedeisen und Stahl kann man die Kurve der Elastizitätsgrenze für die praktisch vorkommenden Spannungszustände durch eine zur Abscissenachse parallele Gerade ersetzen, wodurch die Mohrsche Theorie in die einfachere Schubspannungstheorie übergeht. Dasselbe gilt wahrscheinlich von den anderen zähen Metallen, die technisch verwendet werden; jedoch reicht für eine Entscheidung das Versuchsmaterial noch nicht aus. Die Bruchgrenzkurve für Gufseisen kann man ebenfalls durch eine Gerade annähern, welche aber der Abscissenachse nicht parallel läuft. Für andere Materialien, bei denen auch nur die Bruchgrenze einen Mafsstab für die zulässige Beanspruchung abgeben kann, fehlt es noch an dem erforderlichen Versuchsmaterial, um die Frage über die Richtigkeit der Mohrschen Theorie ganz zu entscheiden. Jedenfalls aber ist es als erwiesen anzusehen, dafs die Dehnungstheorie für die Elastizitätsgrenze nicht zutrifft. Damit ist den technischen Formeln für zusammengesetzte Festigkeit, nach welchen heute noch fast allgemein gerechnet wird, der Boden entzogen. In dem folgenden Abschnitt soll nun untersucht werden, in welcher Weise sich diese Formeln und die aus ihnen gewonnenen Resultate ändern, wenn man statt der Dehnungstheorie die Schubspannungstheorie (für Stahl und Schmiedeisen) bezw. die Mohrsche Theorie in ihrer allgemeinen Form (für Gufseisen) zu Grunde legt.

## Die Festigkeitsformeln des Maschinenbaues.

Für die zulässige Beanspruchung eines Maschinenteiles sind sehr häufig Gesichtspunkte mafsgebend, die mit der Festigkeitstheorie nichts zu thun haben, sei es dafs die gröfste Durchbiegung eines Stabes eine gewisse Grenze nicht überschreiten soll, die weit von der Elastizitätsgrenze entfernt ist, sei es dafs der Verdrehungswinkel einer langen Welle, oder dafs die Abnutzung einer Fläche durch Reibung in gewissen Grenzen gehalten werden soll. Solche Rücksichten führen praktisch dazu, dafs man nur eine geringe Materialbeanspruchung zuläfst. Wenn aber im folgenden schlechtweg von zulässiger Beanspruchung die Rede ist, so ist stets die mit Rücksicht auf Haltbarkeit und Sicherheit der Konstruktion zulässige Beanspruchung gemeint. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint bei ruhender Belastung lediglich die Erfüllung der Forderung notwendig, dafs an keiner Stelle des beanspruchten Körpers die Elastizitätsgrenze überschritten wird. Da man die Höhe der Elastizitätsgrenze nicht für jedes Stück genau kennt, so wird man als höchste Spannung eine solche zulassen, die sicher noch unter der Grenze liegt. Die zulässige Beanspruchung in diesem Sinne kann als

ein charakteristischer Spannungszustand angesehen werden, auf den die oben besprochenen Festigkeitstheorien angewendet werden können. Bei Materialien, welche schon unter ganz geringen Spannungen bleibende Formänderungen erfahren, also praktisch keine Elastizitätsgrenze besitzen, mufs die zulässige Beanspruchung nach der Höhe der Bruchgrenze normiert werden.

Bei Torsionsbeanspruchung hat man demgemäfs bisher die zulässige Spannung so gewählt, dafs die gröfste Hauptdehnung die bei einfachem Zug zugelassene Dehnung nicht überschreitet; daher verhält sich die zulässige Beanspruchung $\varkappa_d$ für Torsion zu der zulässigen Beanspruchung $\varkappa_z$ für Zug wie $1:1{,}3$[1]) oder wie $0{,}77:1$. Ebenso könnte man von einer zulässigen Beanspruchung $\varkappa_p$ für Innendruck dünnwandiger Rohre sprechen, und müfste nach der Dehnungstheorie in der üblichen Formel für die beim Druck $p$ und dem Radius $r$ erforderliche Wandstärke $\delta = \frac{p \cdot r}{\varkappa_z}$ statt $\varkappa_z$ streng genommen setzen $\varkappa_p = \frac{\varkappa_z}{0{,}85}$, weil die gröfste reduzierte Spannung $\varepsilon \cdot E = \sigma_z \left(1 - \frac{1}{2m}\right) = \varkappa_z$ sein soll.[2]) Legt man statt der Dehnungstheorie z. B. die Schubspannungstheorie zu Grunde, so werden sich die entsprechenden zulässigen Beanspruchungen anders verhalten, und zwar wird dann $\varkappa_d = 0{,}5\ \varkappa_z$ und $\varkappa_p = \varkappa_z$.

Die Festigkeitsformeln enthalten stets eine gewisse Funktion der äufseren angreifenden Kräfte. Diese Funktion giebt diejenige Gröfse an, welche nach der zu Grunde gelegten Theorie mafsgebend ist. Es wird also mit einer Änderung der Theorie nicht nur eine Änderung der zulässigen Beanspruchung, sondern auch der Gestalt der Festigkeitsformeln verbunden sein: Die gröfste Dehnung drückt sich im allgemeinen durch die angreifenden Kräfte anders aus als die gröfste Schubspannung. In den beiden angeführten Fällen, Torsion und Innendruck dünnwandiger Rohre, unterscheiden sich jedoch die beiden Ausdrücke nur durch einen Proportionalitätsfaktor, der in die zulässige Beanspruchung hineingezogen ist. Beide Fälle haben die gemeinsame Eigentümlichkeit, dafs die auftretenden Hauptspannungen ein ganz bestimmtes, von den Abmessungen des Körpers unabhängiges Verhältnis haben, bei reiner Torsion ist nämlich stets $\sigma_z : \sigma_y : \sigma_x = 1 : 0 : -1$, bei Innendruck, wenn die Wandstärke klein ist gegenüber dem Durchmesser, $\sigma_z : \sigma_y : \sigma_x = 2:1:0$. Zu den Spannungszuständen mit konstantem Verhältnis der Hauptspannungen, kann man auch diejenigen zählen, bei denen nur eine Hauptspannung vorhanden ist, also einfachen Zug und einfachen Druck.

---

1) S. o. S. 293. 2) Vergl. Föppl, Festigkeitslehre S. 315.

Bei anderen Spannungszuständen ändert sich die Funktion der äufseren Kräfte mit der Festigkeitstheorie derart, dafs die Formeln nach der einen und nach der anderen Theorie sich nicht nur durch einen konstanten Koeffizienten unterscheiden.

Nach der Schubspannungstheorie, in welche die Mohrsche Theorie, wie wir sahen, für Schmiedeisen und Stahl[1]) übergeht, gestalten sich die Formeln verhältnismäfsig einfach. Die gröfste Schubspannung ist gleich der halben Differenz zwischen der gröfsten und der kleinsten Hauptspannung. Bei der einfachen Zugbelastung ist sie also gleich der halben Zugspannung, man hat daher stets die Differenz $(\sigma_z - \sigma_x)$ gleich der zulässigen Zugbeanspruchung $\varkappa_z$ zu setzen.

1. Torsion eines zylindrischen Stabes von kreisförmigem Querschnitt, dessen Durchmesser $d$ für das angreifende Drehmoment $M_d$ zu bestimmen ist.

$$\sigma_z = -\sigma_x = \frac{M_d \cdot 16}{d^3 \pi}; \ \sigma_z - \sigma_x = \varkappa_z = \frac{32\, M_d}{\pi\, d^3}.$$

Die neue Formel lautet also:

$$d^3 \sim \frac{10\, M_d}{\varkappa_z}.$$

Die Dehnungstheorie ergiebt: $d^3 = \frac{5\, M_d}{\varkappa_z} \cdot 1{,}3$. Der Durchmesser $d$ wird also nach der neuen Formel *stets* um 15% *gröfser* als nach der alten Formel.

2. Innendruck $p$ eines dickwandigen Rohres, dessen innerer Radius $r$ ist, dessen äufserer Radius $R$ zu bestimmen ist.

$$\sigma_z = p\,\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \qquad \sigma_x = -p; \quad \sigma_z - \sigma_x = \varkappa_z = \frac{2p\, R^2}{R^2 - r^2}.$$

Die neue Formel lautet also:

$$R = r\sqrt{\frac{\varkappa_z}{\varkappa_z - 2p}},$$

die Wandstärke wird

$$\delta = r\left[\sqrt{\frac{\varkappa_z}{\varkappa_z - 2p}} - 1\right].$$

Die Grenze der theoretischen Ausführbarkeit ist also gegeben durch $p = \frac{1}{2}\varkappa_z$, dann wird $R = \infty$. Die Dehnungstheorie ergiebt bekanntlich:

$$R = r\sqrt{\frac{\varkappa_z + 0{,}4\,p}{\varkappa_z - 1{,}3\,p}} \qquad \delta = r\left[\sqrt{\frac{\varkappa_z + 0{,}4\,p}{\varkappa_z - 1{,}3\,p}} - 1\right].$$

---

1) Vergl. S. 301.

Danach liegt die Grenze der theoretischen Ausführbarkeit bei $p = \frac{1}{1,3} \varkappa_z$, also wesentlich höher als nach der Schubspannungstheorie. Die Wandstärken $\delta$ für einen bestimmten Radius $r$ werden nach der neuen Formel *stets* gröfser als nach der alten, und zwar für $\varkappa_z = 25p$ um 20%, für $\varkappa_z = 4p$ um 50%. Die Abweichungen sind also sehr erheblich.

3. Biegung und Drehung eines zylindrischen Stabes von kreisförmigem Querschnitt, dessen Durchmesser $d$ zu bestimmen ist. Das Biegungsmoment $M_b$ wirkt in einer Ebene, die durch die Stabachse geht, das Drehmoment $M_d$ in einer Ebene senkrecht zur Stabachse. Es sei die zulässige Biegungsspannung $\varkappa_b = \varkappa_z$.

$$\sigma_z = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{32}{\pi d^3} \left[M_b + \sqrt{M_b^2 + M_d^2}\right]$$ [1])

$$\sigma_x = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{32}{\pi d^3} \left[M_b - \sqrt{M_b^2 + M_d^2}\right]$$

$$\sigma_z - \sigma_x = \varkappa_b = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_b^2 + M_d^2} \cdot$$

Die neue Formel lautet also:

$$d^3 \sim \frac{10}{\varkappa_b} \sqrt{M_b^2 + M_d^2} \cdot$$

Die Drehungstheorie verlangt:

$$d^3 = \frac{10}{\varkappa_b} \left[0,35\, M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + M_d^2}\right] \cdot$$

Nach der Schubspannungstheorie ergeben sich *stets* gröfsere Abmessungen als nach der Dehnungstheorie, wie man erkennt, wenn man die neue Formel folgendermafsen schreibt:

$$d^3 = \frac{10}{\varkappa_b} \left[0,35 \sqrt{M_b^2 + M_d^2} + 0,65 \sqrt{M_b^2 + M_d^2}\right] \cdot$$

Gleiche Abmessungen erhält man nach beiden Theorien nur für $M_d = 0$. Der Durchmesser wird nach der Schubspannungstheorie

| für | $M_d = M_b$ | $M_d = 2\,M_b$ | $M_b = 0$ |
|---|---|---|---|
| um | 3,7% | 7,4% | 15,4% |

gröfser als nach der Dehnungstheorie.

Ist der Querschnitt des Stabes nicht kreisförmig, sondern etwa rechteckig, so ändert sich prinzipiell nichts, die Abmessungen werden

1) S. o. S. 290.

auch für einen solchen Querschnitt nach der Schubspannungstheorie gröſser als nach der Dehnungstheorie.

Auf andere Arten von zusammengesetzter Beanspruchung einzugehen, ist unnötig, da sich das Prinzip in den herangezogenen Beispielen vollständig ausdrückt.

Für Guſseisen und ähnliche Materialien ohne Elastizitätsgrenze müssen die entsprechenden Formeln nach der allgemeinen Mohrschen Theorie entwickelt werden.

Für die abzuleitenden Gleichungen wird die Grenzkurve als Gerade betrachtet, welche die Gleichung[1]) hat $\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}\left[1 - \sigma \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_1 \varkappa_2}\right]$.

Die Gleichung wird bequemer, wenn man statt $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ andere Variabele einführt, nämlich $\tau_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}$ und den Winkel $\varphi$, den die Gerade mit der Ordinatenachse einschlieſst, und der gegeben ist durch $\cos\varphi = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2 + \varkappa_1}$. Die Gleichung der Geraden lautet dann

$$\sigma \cos\varphi + \tau \sin\varphi - \tau_0 \sin\varphi = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung statt der laufenden Koordinaten $\sigma$ und $\tau$ die Koordinaten $\sigma'$ und $\tau'$ eines beliebigen Punktes im Koordinatensystem, so erhält man rechts nicht mehr Null, sondern den senkrechten Abstand des Punktes $(\sigma', \tau')$ von der Geraden, und zwar mit negativem Vorzeichen, wenn der Punkt $(\sigma', \tau')$ auf derselben Seite der Geraden liegt, wie der Koordinatenanfang. Der Hauptkreis eines beliebigen, zulässigen Spannungszustandes soll die Gerade nur berühren, nicht schneiden. Die Koordinaten des Kreismittelpunktes sind $\sigma' = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}$ und $\tau' = 0$. Setzt man diese Gröſsen für $\sigma$ und $\tau$ ein, so erhält man jedesmal den Radius $\varrho = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}$ des noch zulässigen Spannungskreises, d. h. die Bedingungsgleichung für die Abmessungen.

Die Formeln sollen alle für Guſseisen entwickelt werden, mit der Annahme, daſs $\varkappa_2 = 4\varkappa_1$, also $\cos\varphi = 0{,}6$ ist. Für $\tau_0 \sin\varphi$ kann man setzen $\frac{\varkappa_z}{2}(1 + \cos\varphi) = 0{,}8\,\varkappa_z$ (vergl. Fig. 13).

1. Torsion eines kreiszylindrischen Stabes, dessen Durchmesser $d$ zu bestimmen ist.

$$\sigma_z = -\sigma_x = \frac{5\,M_d}{d^3}; \quad \sigma' = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} = 0, \quad \tau' = 0,$$

$$0{,}8\,\varkappa_z = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} = \frac{5\,M_d}{d^3}.$$

1) S. o. S. 298.

Die neue Formel lautet also für Gufseisen:

$$d^3 = \frac{5\,M_d}{\varkappa_z} \cdot 1{,}25 \cdot$$

Die alte[1]) und die neue Formel geben also gleiche Werte $d$, wenn man den Kontraktionskoeffizienten $m = 4$ annimmt, statt $m = \frac{10}{3}$.

2. Innendruck $p$ eines dickwandigen Rohres, dessen innerer Radius $r$ ist, dessen äufserer Radius $R$ zu bestimmen ist.

$$\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} = \frac{pR^2}{R^2 - r^2}, \quad \sigma' = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} = \frac{pr^2}{R^2 - r^2}, \quad \tau' = 0,$$

$$p\,\frac{r^2}{R^2 - r^2} \cdot \cos\varphi - 0{,}8\,\varkappa_z = -\frac{pR^2}{R^2 - r^2}.$$

Die neue Formel lautet also für Gufseisen:

$$R = r\sqrt{\frac{\varkappa_z + 0{,}75\,p}{\varkappa_z - 1{,}25\,p}} \quad \text{bezw.} \quad \delta = r\left[\sqrt{\frac{\varkappa_z + 0{,}75\,p}{\varkappa_z - 1{,}25\,p}} - 1\right].$$

Die Grenze der Ausführbarkeit liegt danach etwa eben so hoch wie nach der Dehnungstheorie[2]), nämlich bei $p = 0{,}8\,\varkappa_z$. Die Wandstärke $\delta$ für einen gegebenen Radius $r$ wird nach der neuen Formel *stets gröfser* als nach der Dehnungstheorie, und zwar für $\varkappa_z = 2p$ um $7\%$, für $\varkappa_z = 20p$ um $17\%$.

3. Biegung und Drehung eines kreiszylindrischen Stabes, dessen Durchmesser $d$ zu bestimmen ist. Es sei $\varkappa_b = \varkappa_z$

$$\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} = \frac{5}{d^3}\sqrt{M_b^2 + M_d^2}, \quad \sigma' = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} = \frac{5\,M_b}{d^3}, \quad \tau' = 0,$$

$$\frac{5\,M_b}{d^3} \cdot \cos\varphi - 0{,}8\,\varkappa_b = -\frac{5}{d^3}\sqrt{M_b^2 + M_d^2} \cdot$$

Die neue Formel lautet also für Gufseisen:

$$\frac{d^3}{10}\,\varkappa_b = 0{,}375\,M_b + 0{,}625\sqrt{M_b^2 + M_d^2},$$

also genau so wie nach der Dehnungstheorie[2]), wenn man $m = 4$ setzt.

## Formeln für wechselnde Belastung.

Es werde im folgenden die bei ruhender Belastung ermittelte Bruchgrenzspannuug eines Materials als *Tragfestigkeit*, die Belastungsart, bei welcher die Spannung periodisch zwischen Null und einem

1) S. o. S. 303. 2) S. o. S. 304.

Gröfstwert schwankt, als pulsierende Belastung, die dabei ermittelte Bruchgrenze als *Ursprungsfestigkeit*, die Belastungsart, bei welcher die Spannung periodisch zwischen einem positiven und einem negativen Grenzwert schwankt, als schwingende Belastung, die dabei ermittelte Bruchgrenze als *Schwingungsfestigkeit* bezeichnet.

Ob die Resultate, die bei der Prüfung der Theorien gefunden wurden, ohne weiteres auf beständig wechselnde Beanspruchungen übertragen werden können, ist zweifelhaft. Die Versuche von Wöhler scheinen dagegen zu sprechen. Wöhler fand[1]) für Gufsstahl von Krupp (aus dem Jahr 1862) folgende Verhältnisse. Bei pulsierender Zugbelastung zwischen 0 und $3300^{at}$ und bei pulsierender Torsionsbelastung zwischen 0 und $2600^{at}$ trat kein Bruch ein nach millionenmal wiederholtem Belastungswechsel; war die obere Spannungsgrenze nur wenig höher, so trat der Bruch nach einer beschränkten Anzahl von Wechseln ein. Die Grenzzugbelastung verhält sich zur Grenztorsionsbelastung wie 1 : 0,79. Bei schwingender Biegungsbelastung lag die Bruchspannungsgrenze bei $\pm 1920^{at}$, bei schwingender Torsionsbelastung war $\pm 1500^{at}$ die Grenze. Die Grenzspannungen verhalten sich wie 1 : 0,78. Nach diesen Versuchen sind also die Hauptdehnungen, welche bei verschiedenartigen Belastungen mit gleichem Schwingungsgesetz von dem Material gerade noch beliebig oft ertragen werden, genau gleich, da man annehmen darf, dafs bis zur Grenze Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung bestand. Man kann aus den vier Versuchsreihen zwar noch nicht auf ein allgemein gültiges Gesetz schliefsen, aber es mag daran erinnert werden, dafs die Dehnungstheorie für den *Bruch* bei ruhender Belastung durch eine Reihe von Versuchen gestützt wird; die Dauerversuche mit wechselnder Belastung scheinen eine weitere Möglichkeit zu liefern, die Frage zu entscheiden.

Bauschinger, der gleichfalls Dauerversuche[2]) angestellt hat, hat dieselben nicht auf Torsionsbeanspruchung ausgedehnt, so dafs die Resultate von Wöhler nicht an ihnen kontrolliert werden können. Bauschinger hat aber nachgewiesen, dafs die Festigkeit des Materials (er untersuchte Stahl und Schmiedeisen) bei periodisch wechselnder Beanspruchung in einem gewissen Zusammenhang mit der ursprünglichen Elastizitätsgrenze steht, und diese hängt, wie oben gezeigt, bei den genannten Materialien von der Höhe der gröfsten Schubspannung ab. Es ist daher wohl denkbar, dafs die zulässige Beanspruchung bei wechselnder Belastung auch von der gröfsten Schubspannung abhängt.

---

1) Festigkeitsversuche mit Stahl und Eisen. 1870.

2) Mitteil. a. d. mech.-techn. Labor. München. Heft 13 u. 25.

Aus diesem Grunde und weil es an sich interessant ist, festzustellen, welchen Einfluſs die Änderung der Theorie auf die Dimensionierung von periodisch beanspruchten Konstruktionsteilen, also fast aller Maschinenelemente, ausübt, sollen auch hierfür einige Formeln nach der Schubspannungstheorie abgeleitet werden. Zu dem Zweck ist zunächst ein Blick auf die Abhängigkeit der zulässigen Beanspruchung von dem Schwingungsgesetz der Spannungen zu werfen.

Wöhler fand das Verhältnis zwischen Ursprungsfestigkeit und Schwingungsfestigkeit bei allen Stahl- und Schmiedeisensorten, die er untersuchte, im Mittel zu 1,8 : 1, die Abweichungen von diesem Wert bei einzelnen Versuchen sind gering. Bauschinger dagegen fand beide Festigkeitsgrenzen gleich hoch. Worin dieser auffallende Unterschied seine Ursache haben kann, ist schwer festzustellen. Da man an der Sorgfalt der Versuchsausführung bei keinem der beiden Experimentatoren zweifeln kann, und beide gleichartige Maschinen für die Versuche verwendeten, so bleiben wohl nur zwei Möglichkeiten zur Erklärung übrig. Entweder hatte sich das Material in den 20 Jahren, die zwischen den Versuchen von Wöhler und denen von Bauschinger verstrichen, hinsichtlich der Festigkeit gegenüber schwingender Belastung auffallend verbessert, oder das Tempo, in dem die Spannungswechsel auf einander folgen, und das in beiden Versuchsreihen nicht gleich war, ist von sehr bedeutendem Einfluſs, sei es prinzipiell, sei es gerade bei der Wöhlerschen Versuchsanordnung.

Das Verhältnis zwischen der Tragfestigkeit und der Ursprungsfestigkeit bei Zugbelastung haben beide Forscher etwa gleich gefunden, Wöhler fand das Verhältnis für Stahl 2,2 : 1, für Schmiedeeisen 1,5 : 1, Bauschinger fand für Stahl 2,1 : 1, für Schmiedeeisen 1,75 : 1. Es ist damit jedenfalls bewiesen, daſs bei wechselnder Belastung die Bruchgefahr wesentlich näher an die ursprüngliche Elastizitätsgrenze heranrückt als bei ruhender Belastung; ferner stimmen die Beobachtungen beider Forscher auch darin überein, daſs sie eine auſserordentlich groſse Empfindlichkeit des Materials, besonders bei Fluſseisen und Fluſsstahl, gegen ganz geringe Materialfehler feststellten, wenn die Belastung eine wechselnde war.

Man kann allerdings die zulässige Beanspruchung bei wechselnder Belastung ebenso wenig wie bei ruhender nach der Bruchgrenze allein normieren, sondern muſs stets die zulässigen Formänderungen im Auge behalten. Hat man bei ruhender Last dafür zu sorgen, daſs keine bleibenden Formänderungen eintreten, so zwingen die durch wechselnde Belastung entstehenden Schwingungen des betreffenden Konstruktionsteiles oder auch der ganzen Maschine, die zulässige Beanspruchung in

engeren Grenzen zu halten. Wo es sich um wechselnde äufsere Kräfte handelt, kann man es aus dieser Rücksicht erklären, dafs es sich eingebürgert hat, die zulässige Beanspruchung bei schwingender Belastung halb so grofs zu nehmen als bei pulsierender. Man erreicht dadurch, dafs die äufserlich wahrnehmbaren Formänderungen, z. B. die Durchbiegung eines Stabes, in gleichen Grenzen bleiben.

Wenn man nach Bach die zulässigen Beanspruchungen bei schwingender, pulsierender und ruhender Belastung im Verhältnis 1:2:3 wählt, so steht diese Annahme mit den Versuchsergebnissen von Bauschinger aufser jeder Beziehung. Mit den Wöhlerschen Ergebnissen steht sie in dem Zusammenhang, dafs sie die zulässigen Beanspruchungen etwa im Verhältnis der dort gefundenen Bruchgrenzen wählt. Dies ist aber mehr ein äufserlicher, als ein innerer Zusammenhang; denn bei allen Materialien, die eine Elastizitätsgrenze für ruhende Belastung haben, wird die zulässige Beanspruchung nach der Elastizitätsgrenze normiert. Wenn man nun das zahlenmäfsige Verhältnis zwischen Bruchgrenzspannung und Elastizitätsgrenzspannung bei ruhender Belastung auf die wechselnde Belastung überträgt, um so die zulässige Beanspruchung zu erhalten, so ist das eine durchaus willkürliche Analogiebildung, die aber durch die praktische Erfahrung gerechtfertigt wird. Bach schreibt darüber im Vorwort zur ersten Auflage seiner „Maschinenelemente“, dafs „die zulässigen Beanspruchungen, welche im Laufe der Zeit in überaus grofser Anzahl als Erfahrungsgröfsen entstanden sind und nicht selten unter sich des Zusammenhanges entbehren, zu einem ziemlichen Teile die Wöhlersche Beziehung der verschiedenen Bruchbelastungen zu einander bestätigen.“ Das Verhältnis 1:2:3 soll daher auch in den hier zu entwickelnden Formeln beibehalten werden. Für Spannungswechsel, welche zwischen den drei ausgezeichneten Arten liegen, sind nach Bach zwischenliegende Werte für die zulässige Beanspruchung zu wählen, derart dafs diese linear von der Gröfse des Spannungswechsels abhängt. Ist $\sigma_u$ die untere, $\sigma_o$ die obere Grenzspannung, so kann man für den Betrag $w$ des Wechsels die Gröfse $w = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{\sigma_o}$ einführen; bezeichnet ferner $\varkappa_o$ die zulässige Beanspruchung für schwingende Belastung, also für $w = 2$, und $\varkappa$ die zulässige Beanspruchung für einen beliebigen anderen Wert von $w$, der immer zwischen 0 und 2 liegt, so ist demnach zu setzen $\varkappa = \varkappa_o (3 - w)$. Mit Hilfe dieser Beziehung kann man die Rechnung für die einfachen Belastungsarten, bei denen die Hauptspannungen ganz bestimmte, konstante Verhältnisse zu einander haben, stets streng durchführen, nicht so bei zusammengesetzter Beanspruchung, für welche die Biegung und

Drehung eines zylindrischen Stabes das typische Beispiel ist. Hier besteht eine Schwierigkeit darin, dafs in der Regel das Schwingungsgesetz der Normalspannung ein anderes ist als das der Schubspannungen. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, führt Bach[1]) in die Formel $M_i = 0{,}35\, M_b + 0{,}65 \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$, nach welcher das ideelle Biegungsmoment $M_i$ aus dem vorhandenen Biegungsmoment $M_b$ und dem Drehmoment $M_d$ (nach der Dehnungstheorie) zu berechnen ist, den Faktor $\alpha_o = \frac{\varkappa_b}{1{,}3\, \varkappa_d}$ ein, mit dem $M_d$ multipliziert wird; $\varkappa_b$ bedeutet darin die zulässige Biegungsbeanspruchung für den Fall, dafs $M_b$ allein vorhanden wäre, $\varkappa_d$ die zulässige Beanspruchung für den Fall, dafs $M_d$ allein vorhanden wäre. Bei einer kreisrunden Welle ist $M_i = \frac{d^3 \pi}{32} \varkappa_b$ zu setzen, worin $d$ den gesuchten Wellendurchmesser bedeutet.

Die Einfügung des Koeffizienten $\alpha_o$ bewirkt folgendes: Für den Fall, dafs das Biegungsmoment $M_b$ etwa gleich dem Torsionsmoment $M_d$ ist, was praktisch sehr häufig vorkommt, dafs aber die Torsionsspannung konstant ist, während die Biegungsspannung zwischen einem positiven und einem gleich grofsen negativen Grenzwert schwankt, wird $\alpha_o = \frac{1}{2}$ und der Wert von $M_i$ dadurch um 15% kleiner, als er ohne die Korrektion sein würde.

Man könnte nun vermuten, dafs durch den Einflufs der konstanten Torsionsspannung die resultierende gröfste Dehnung nur noch in so engen Grenzen schwankt, dafs die zulässige Beanspruchung $\varkappa_b$ viel höher angenommen werden kann, als sie nach Mafsgabe der Biegung allein sein darf. Wenn z. B. die aus Biegung und Drehung jeweilig resultierende gröfste Dehnung zwischen Null und einem Maximalwert schwanken würde, so könnte ja $\varkappa_b$ um 50% gröfser gewählt werden, als in der Bachschen Formel angenommen ist. Dann würde also die Korrektion durch $\alpha_o$ nicht ausreichen. Bei der grofsen praktischen Wichtigkeit der in Frage stehenden Formel lohnt es sich wohl, hierauf einmal näher einzugehen, und die Schwankungen der resultierenden gröfsten Dehnung rechnerisch zu ermitteln, um die zulässige Anstrengung der wirklichen *Dehnungsänderung* entsprechend in die Rechnung einführen zu können. Vergleicht man dann die so erhaltenen Resultate der Formel mit den Resultaten der nach Bach korrigierten Formel, so erhält man ein Bild davon, wie weit die zwar praktisch einfache, aber immerhin ziemlich willkürliche Korrektion durch $\alpha_o$ theoretischen Anforderungen gerecht wird.

---

1) Elast. u. Festigk. IV. Aufl. S. 420.

Verfasser hat diese Rechnung für den einfachen Belastungsfall durchgeführt, daſs eine kreiszylindrische, rotierende Welle durch ein konstantes Biegungsmoment $M_b$ und ein konstantes Torsionsmoment $M_d$ beansprucht wird, ein Fall, wie er etwa bei Turbinenwellen oder Wellen von rotierenden Umformern vorkommt.

Es wurde die Dehnung $\varepsilon_\varphi$ in einer beliebigen Richtung $\varphi$ gegen die Richtung der gröſsten Hauptdehnung durch $M_b$, $M_d$ und den Winkel $\varphi$ ausgedrückt, daraus die Gröſse des Dehnungswechsels $w_d = \frac{\varepsilon_{\varphi \max} - \varepsilon_{\varphi \min}}{\varepsilon_{\varphi \max}}$ ermittelt und in die Beziehung für die zulässige Anstrengung $\varkappa = \varkappa_0 (3 - w_d)$ [1]) eingesetzt. Es entspricht also jeder Richtung ein gewisser erforderlicher Mindestdurchmesser der Welle, der gröſste von allen diesen ist das Mindestmaſs für die praktische Ausführung. Die maſsgebende Faserrichtung ändert sich wesentlich mit dem Verhältnis $M_d : M_b$. Solange $M_d < 3{,}2\, M_b$, erhält man den gröſsten Durchmesser, wenn man die Dehnung in Richtung der Wellenachse zu Grunde legt, also das Torsionsmoment ganz vernachlässigt, da es hierzu keinen Beitrag liefert. Für $M_d > 3{,}2\, M_b$ hat die maſsgebende Faser ungefähr die Richtung der Hauptdehnung, mit welcher sie für $M_b = 0$ genau zusammenfällt.

Für $M_d < 3{,}2\, M_b$ lautet also die Formel für den auszuführenden Durchmesser $d$ wie bei einfacher Biegung:

$$\frac{d^3 \pi}{32} = \frac{M_b}{\varkappa_b}.$$

$\varkappa_b$ ist darin der der *Schwingungs*festigkeit entsprechende Wert. Für $M_d > 3{,}2\, M_b$ kann man die an sich komplizierte Formel mit genügender Annäherung ersetzen durch:

$$\frac{d^3 \pi}{16} = \frac{M_d + 1{,}35\, M_b}{3\, \varkappa_d},$$

worin $3 \varkappa_d$ die zulässige Torsionsbeanspruchung ist, welche der *ruhenden* Belastung entspricht.

Die Resultate dieser beiden Formeln sind von den entsprechenden Resultaten der nach Bach korrigierten Formel nicht sehr erheblich verschieden, aber durchweg etwas kleiner als diese. Dabei ist indessen eines zu beachten. Bei dem hier angegebenen Rechnungsverfahren wurde, um die Durchführung zu ermöglichen, der Umstand ganz auſser Acht gelassen, daſs auch die Schiebungen in jeder Faser wechseln, und die Gröſse dieses Wechsels bei der Wahl der zulässigen Dehnung zu berücksichtigen wäre. Die Dehnungstheorie ist wie alle Festigkeits-

1) S. o. S. 309.

theorien ursprünglich nur für ruhende Belastung aufgestellt und müfste streng genommen in diesem Punkt eine Ergänzung erfahren, wenn man sie auf wechselnde Belastung überträgt. Der Einfachheit zuliebe ist eine solche Ergänzung bei der Rechnung nicht vorgenommen worden; aber mit Rücksicht darauf kann man wohl sagen, dafs die Einführung des Koeffizienten $\alpha_0$ in die Formel für ruhende Belastung das Resultat der Formel sinngemäfs beeinflufst. Ob man zu dem gleichen Ergebnis auch bei komplizierten Belastungsfällen kommen würde, ist nicht ohne weiteres abzusehen.

Durch Einführung des Koeffizienten $\alpha_o$ kann man auch die Formeln, welche nach der Mohrschen Theorie für ruhende Belastung abgeleitet wurden, der wechselnden Belastung anpassen, soweit die Formeln nicht unmittelbar übertragbar sind, da die in Betracht kommenden Formeln 3) S. 304 u. S. 305 der entsprechenden Formel, die auf der Dehnungstheorie beruht, sehr ähnlich gebaut sind. Man hat aber der Mohrschen Theorie gemäfs zu setzen $\alpha_o = \frac{\varkappa_b}{\frac{2}{1+\cos\varphi}\,\varkappa_d}$, worin $\varphi$ den Winkel bedeutet, welchen die Mohrsche Gerade mit der $\tau$-Achse bildet. Es dürfte aber von Interesse sein, für einige Belastungsfälle eine genauere Rechnung durchzuführen.

Für solche Materialien, bei denen die Mohrsche Theorie die einfache Form der Schubspannungstheorie annimmt, gestaltet sich die Rechnung nicht schwierig. Man kann es bei Zugrundelegung dieser Theorie als sinngemäfs bezeichnen, dafs man als Mafs für die zulässige Beanspruchung einer Materialfaser den Wechsel der Schubspannungen in der Faser annimmt. Der Wechsel der Normalspannungen werde vernachlässigt. Da die Schubspannungen aller Fasern den Schiebungen stets proportional sind, so kommt es auf dasselbe hinaus, ob man mit dem Wechsel der Schubspannungen oder der Schiebungen rechnet.

Für den Fall, dafs eine rotierende, kreiszylindrische Welle einem konstanten Biegungsmoment $M_b$ und einem konstanten Drehmomente $M_d$ unterworfen ist, ergiebt die Rechnung folgendes: Solange $M_d < 2{,}4\,M_b$, ist für die Abmessung der Welle die Beanspruchung desjenigen Flächenelementes an der Wellenoberfläche mafsgebend, welches unter $45^0$ gegen den senkrechten Wellenquerschnitt geneigt ist. Zu der Schubspannung in einer solchen Fläche giebt das Torsionsmoment keinen Beitrag, es ist also ganz zu vernachlässigen, und die Formel für den erforderlichen Wellendurchmesser $d$ lautet, wenn

$$M_d < 2{,}4\,M_b \qquad \frac{d^3\pi}{32} = \frac{M_b}{\varkappa_b}.$$

Darin bedeutet wieder $\varkappa_b$ die bei schwingender Belastung zulässige Biegungsbeanspruchung. Für $M_d > 2{,}4\ M_b$ bildet das gefährliche Flächenelement mit dem senkrechten Querschnitt Winkel, welche kleiner als $20^0$ sind; die Formel für den erforderlichen Durchmesser $d$ kann mit ausreichender Genauigkeit geschrieben werden, wenn

$$M_d > 2{,}4\ M_b \qquad \frac{d^3 \pi}{16} = \frac{M_d + 0{,}54\ M_b}{3\varkappa_d}$$

$3\varkappa_d$ ist die bei ruhender Belastung zulässige Torsionsbeanspruchung.

Die Resultate dieser beiden Formeln weichen nicht sehr erheblich von den Resultaten der korrigierten Formel

$$\frac{d^3 \pi}{32} \cdot \varkappa_b = \sqrt{M_b^2 + \alpha_o^2\ M_d^2}$$

ab, die letzteren sind durchweg etwas gröfser. Die korrigierte Formel giebt also eine angemessene Konstruktionssicherheit.

Da die Rechnung mit den Schubspannungswechseln verhältnismäfsig einfach ist, so läfst sich unter diesem Gesichtspunkt auch einer der praktisch häufigen Fälle behandeln, dafs nicht nur die Biegungsspannungen, sondern auch die Torsionsspannungen periodischen Schwingungen folgen.

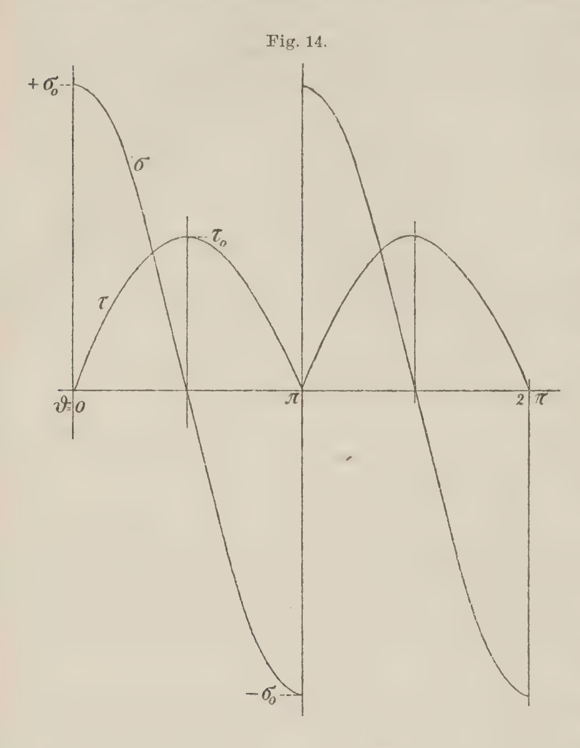
Als Beispiel sei die Berechnung des Wellenzapfens einer elektrisch oder durch Transmission angetriebenen, doppeltwirkenden Pumpe gewählt und der Weg der Rechnung kurz angegeben. Die Gröfse der Kolbenkraft sei konstant angenommen, sie wechselt nur in den beiden Totpunkten der Kurbel ihre Richtung. Das auf den Zapfen wirkende Biegungsmoment ist also seiner Gröfse nach konstant, das Torsionsmoment folgt, unter der Annahme einer unendlich langen Schubstange, während jedes Hubes einem Sinusgesetz, wirkt aber immer im gleichen Sinne. Bezeichnet $\vartheta$ den Umdrehungswinkel der Kurbel, von einer Totlage aus gerechnet, $\sigma_o$ den Gröfstwert der Biegungsspannung, $\tau_o$ den Gröfstwert der Torsionsspannung im Zapfen, $\sigma$ und $\tau$ die jeweilige Biegungs- und Torsionsspannung in dem Punkt an der Zapfenoberfläche, in welchem die Ebene des Kurbelarms den gefährlichen Querschnitt des Zapfens schneidet, so gelten für $\sigma$ und $\tau$ während eines Hubes die Gleichungen:

$$\sigma = \sigma_o \cos \vartheta \text{ und } \tau = \tau_o \sin \vartheta \qquad (O < \vartheta < \pi).$$

Der Verlauf von $\sigma$ und $\tau$ während einer ganzen Umdrehung ist für $n = 1$ in Fig. 14 dargestellt. $\sigma$ und $\tau$ wirken beide in einem Flächen-

element, welches normal zur Zapfenachse gerichtet ist; in einem gegen dieses Element um den Winkel $\varphi$ geneigten Flächenelement ist die jeweilige Schubspannung

Fig. 14.




$$\tau' = \tau_o \sin \vartheta \cos 2\varphi$$
$$+ \sigma_o \cos \vartheta \cdot \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

Wenn man $\tau'$ nach $\vartheta$ differenziert und $\varphi$ konstant läfst, so kann man für jede Richtung $\varphi$ denjenigen Umdrehungswinkel $\vartheta_o$ finden, bei welchem $\tau'$ am gröfsten ist. Man erhält

$$\operatorname{tg} \vartheta_o = \frac{2\tau_o}{\sigma_o} \operatorname{ctg} 2\varphi$$
$$= n \operatorname{ctg} 2\varphi,$$
$$\tau'_{\max} = \frac{\sigma_o}{2} \frac{\sin 2\varphi}{\cos \vartheta_o}$$
$$= \frac{\sigma_o}{2} \sqrt{\sin^2 2\varphi + n^2 \cos^2 2\varphi}.$$

Das Minimum von $\tau'$ würde bei $\vartheta = \vartheta_o + \pi$ liegen, wenn $\sigma$ und $\tau$ volle Sinusschwingungen ausführten. Da die Schwingungsperiode aber nur von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ reicht, so tritt das Minimum von $\tau'$ ein, wenn $\vartheta = \pi$, also

$$\tau'_{\min} = -\frac{\sigma_o}{2} \sin 2\varphi$$

$$w = \frac{\tau'_{\max} - \tau'_{\min}}{\tau'_{\max}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \operatorname{ctg}^2 2\varphi}} = 1 + \cos \vartheta_o$$

$$\varkappa'_d = \varkappa_d (3 - w) = \varkappa_d (2 - \cos \vartheta_o)$$

$$\frac{d^3}{5} = \frac{M_b}{\varkappa_d} \frac{\frac{\sin 2\varphi}{\cos \vartheta_o}}{2 - \cos \vartheta_o} = \frac{M_b}{\varkappa_d} \nu \cdot$$

Darin bedeutet $M_b$ den Gröfstwert des Biegungsmomentes.

Die numerische Auswertung von $\nu = \frac{\sin 2\varphi}{\cos \vartheta_o (2 - \cos \vartheta_o)}$ für verschiedene Winkel $2\varphi$ und verschiedene $n = \frac{M_d}{M_b}$ ergiebt, dafs alle Werte $\nu$

kleiner oder gleich 1 sind, solange $n < 2$.[1]) Für $\varphi = 45^0$ wird stets $\nu = 1$, diese Richtung ist also die maſsgebende, wenn $n < 2$, und man erhält dann wieder die einfache Gleichung $\frac{d^3\pi}{32} = \frac{M_b}{\varkappa_b}$, da $\varkappa_d = \frac{1}{2}\varkappa_b$.

Das Torsionsmoment ist ganz zu vernachlässigen, wenn sein Gröſstwert kleiner ist als der doppelte Gröſstwert des Biegungsmomentes. Praktisch würden andere Fälle nicht in Betracht kommen, da die Entfernung von Wellenzapfenmitte bis Kurbelzapfenmitte stets kleiner sein wird als der doppelte Kurbelradius. Der Vollständigkeit halber soll aber auch für $n > 2$ die Formel abgeleitet werden.

Für $n > 2$ kann man in dem Ausdruck $\cos\vartheta_o = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \operatorname{ctg}^2 2\varphi}}$ die Einheit gegen $n^2 \operatorname{ctg}^2 2\varphi$ mit einem Fehler von höchstens 2,5% vernachlässigen, weil der Winkel $2\varphi$ klein ist. Man kann also setzen $\cos\vartheta_o = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{n}$ und erhält

$$\frac{d^3}{5} = \frac{M_b \cdot n}{\varkappa_d} \cdot \frac{\sin 2\varphi \cdot \operatorname{ctg} 2\varphi}{2 - \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{n}} = \frac{M_d}{\varkappa_d}\,\frac{\cos 2\varphi}{2 - \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{n}}.$$

Hierin kann man mit einem Fehler von höchstens 3,5% den Faktor $\frac{\cos 2\varphi}{2 - \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{n}} = \frac{1}{2}$ setzen, diesem Wert nähert sich der Faktor mit wachsendem $n$ mehr und mehr. Man gelangt so zu der anderen, ebenso einfachen Formel

$$n > 2 \qquad \frac{d^3}{5} = \frac{M_d}{2\varkappa_d}.$$

Das Biegungsmoment kann ganz vernachlässigt werden, wenn sein Gröſstwert kleiner ist als der halbe Gröſstwert des Torsionsmomentes. Die zulässige Torsionsbeanspruchung wird entsprechend dem zwischen Null und einem Gröſstwert schwankenden Torsionsmoment gleich $2\varkappa_d$.

Rechnet man im vorliegenden Fall nach der korrigierten Formel für ruhende Belastung:

$$\frac{d^3}{10}\varkappa_b = \sqrt{M_b^2 + \alpha_o^2 M_d^2},$$

und setzt darin für $M_b$ und $M_d$ die Maximalwerte der Momente (obwohl diese nicht zusammen auftreten), und für $\alpha_o$ den Wert $\frac{1}{2}$, so erhält man für den praktisch häufigsten Wert $n = 1$ einen um 3,8% gröſseren Zapfendurchmesser.

---

1) Genauer $n < 1{,}9$; für $n = 2$ ist $\nu_{\max} = 1{,}05$.

Eine entsprechende Rechnung wie die hier angeführten auf Grund der allgemeinen Mohrschen Theorie anzustellen, d. h. für den Fall, daſs die Mohrsche Gerade einen beliebigen Winkel mit der $\tau$-Achse bildet, ist vor der Hand nicht möglich. Nach der Mohrschen Theorie für ruhende Belastung sind die zulässigen Schubspannungen abhängig von den gleichzeitigen Normalspannungen. Bei wechselnder Belastung schwanken aber in jeder Faser beide Spannungskomponenten; in der bisher benutzten Beziehung $\varkappa = \varkappa_0 (3 - w)$[1] ist also $\varkappa_0$ nicht mehr konstant, wenn man die Beziehung auf die Mohrsche Theorie überträgt. Man müſste notwendigerweise den Wechsel beider Spannungskomponenten in die Rechnung einführen. Dadurch würde die Rechnung überaus kompliziert und auſserdem zwecklos, weil sie sich auf ganz willkürliche Annahmen stützen müſste.

Die hier angegebenen Formeln für wechselnde Belastung gelten nur für bestimmte einfache Fälle. Ihre Ableitung ist zu umständlich und zeitraubend, als daſs sie in jedem praktisch vorkommenden Fall durchgeführt werden könnten. Es zeigte sich aber, daſs die Resultate der durch Einführung des Koeffizienten $\alpha_0$ korrigierten Formel für ruhende Belastung nur wenig von den Resultaten einer genaueren Rechnung, so weit solche hier erhalten wurden, abweichen, und man darf wohl annehmen, daſs die Abweichungen auch in komplizierteren Belastungsfällen nicht erheblich sein werden, da für die beiden Grenzen $M_d = 0$ und $M_b = 0$ die korrigierte Formel immer streng richtig ist. Was die Formeln für ruhende Belastung betrifft, so sei das Ergebnis der vorliegenden Untersuchungen kurz dahin zusammengefaſst: Wenn man anstelle der Dehnungstheorie die Mohrsche Theorie zu Grunde legt, so erhält man im allgemeinen stärkere Abmessungen der Konstruktionsteile bei gleicher Wahl der zugelassenen einfachen Zugbeanspruchung; besonders wenn die Mohrsche Theorie die Form der Schubspannungstheorie annimmt, wie bei Schmiedeisen und Stahl, ergiebt sie teilweise ganz erheblich gröſsere Abmessungen.

---

1) S. o. S. 309.

# Kleinere Mitteilungen.

## „Soho-rules“.

In der Vorrede zu der Schrift über den logarithmischen Rechenschieber von K. v. Ott (Prag 1874, 2. Aufl. 1891) liest man: „Bei dem durch und durch praktischen Volk der Engländer wurde der Rechenschieber bereits in der Mitte des 17. Jahrhunderts und zwar zuerst in der Fabrik von Boulton & Watt zu Soho nächst Birmingham unter dem Namen Soho-Regeln oder Soho-Lineale eingeführt und von Maschinenarbeitern dieser Fabrik mit grofsem Geschick gehandhabt. Von hier aus verbreitete sich das Schieberlineal (sliding rule) nach und nach über ganz England. . .“ Diese Angaben, deren Quelle nicht genannt ist, sind teilweise auch in andere Darstellungen übergegangen, z. B. in die ausführliche Arbeit über logarithmische Rechenapparate von A. Favaro[1]) (wo sogar behauptet wird, der Rechenschieber sei in der genannten Fabrik zuerst hergestellt worden), aber sie enthalten unzweifelhaft verschiedene Irrtümer. Man findet über unseren Gegenstand einige Mitteilungen, deren Zuverlässigkeit mir aufser Frage zu stehen scheint, in dem Treatise on the Steam Engine des Ingenieurs John Farey (London 1827), chap. VII, p. 531 und 536. Hiernach wandte James Watt logarithmische Skalen auf einem Rechenschieber an, um die Abmessungen von Dampfmaschinen und anderen Maschinen zu berechnen. Rechenschieber waren — so berichtet Farey — bei Aichmeistern und Steuerbeamten lange in Gebrauch gewesen und sie wurden auch von Zimmerleuten angewendet, aber sie waren roh ausgeführt und ungenau geteilt und verlangten auch sonst Verbesserungen, um für Ingenieure brauchbar zu werden. Watt und sein Gehilfe Southern gaben den Skalen auf dem Rechenschieber eine für Ingenieure sehr brauchbare Anordnung und liefsen die Originale, nach denen die Rechenschieber kopiert wurden, von sehr geschickten Mechanikern ausführen. Diese Rechenschieber waren besonders für den Gebrauch der Ingenieure in der Maschinenfabrik von Boulton & Watt in Soho bestimmt, wo sie in die Hände aller Werkmeister und Vorarbeiter kamen, und ihre Vorteile wurden allmählich auch bei anderen Ingenieuren bekannt. Sie waren aus Buchsbaumholz und $10\frac{1}{2}$ inches lang, mit einem Schieber und vier Skalen auf der Vorderseite (von denen drei kongruent waren, die vierte eine doppelt so grofse Längeneinheit hatte); auf der Rückseite befanden sich Tafeln häufig gebrauchter Zahlen, Divisoren und Faktoren.[2]) Rechenschieber dieser Art wurden auch später noch Soho rules genannt.

Durch diese Mitteilungen von Farey wird das Vorkommen der Benennung Soho rule und die Angabe v. Otts über ihren Ursprung bestätigt,

1) Atti del Istituto Veneto, (5) 5 (1878—1879), p. 495—520.

2) Man hat es hier offenbar mit dem Urbild der lange auch auf dem Festland verbreitetsten Form des Rechenschiebers (ohne Läufer, vgl. diese Zeitschrift, S. 134 des laufenden Bandes) zu thun.

aber zugleich gezeigt, daſs nicht der Gebrauch des Rechenschiebers überhaupt sich von Soho aus verbreitet hat, was anderweitig bekannt genug war, wohl aber der unter den Ingenieuren. Zudem hat v. Ott die Zeit um mehr als ein Jahrhundert zu früh angesetzt, da Watt Boultons Fabrik 1767 zum ersten Male sah und erst 1775 Teilhaber derselben wurde. Daſs die Rechenschieber, die in jener Fabrik benützt wurden, in derselben auch hergestellt worden seien, sagt Farey so wenig wie v. Ott und ist auch nicht wahrscheinlich. In der That lesen wir in Dinglers Polytechnischem Journal Bd. 32 (1829), S. 455, daſs William Jones, ein ausgezeichneter Instrumentenmacher, viele Jahre lang Rechenschieber für die Arbeiter in Boulton & Watts Fabrik verfertigt habe (nach einer Mitteilung von Gill im Tech. and Microsc. Repos., März 1829, p. 189).

---

## Auskünfte.

G. T., T. Den in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. 1, S. 1019 abgebildeten *logarithmischen Zirkel* können Sie bei bei seinem Erfinder, Herrn Hofrat E. Brauer, Professor an der technischen Hochschule in Karlsruhe, bestellen.

---

J. B., B. Die *graphischen Logarithmentafeln* von A. Tichy sind im Verlag des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins erschienen und können von der Kanzlei dieses Vereins, Wien I, Eschenbachgasse 9, zum Preise von 1,20 Kronen (postfrei K. 1,30) bezogen werden.

---

## Anfragen.

Unter der Überschrift „Eine in Deutschland erfundene Rechenmaschine“ findet man in Dinglers Polytechnischem Journal Bd. 52 (1834), S. 237 folgende, angeblich der Zeitschrift Le National, Nummer vom 27. März 1834, entnommene Mitteilung: Herr Schiereck, Professor der Mathematik zu Frankfurt a. M., hat der französischen Akademie der Wissenschaften eine Dissertation über die Theorie der Zahlen eingeschickt. Dieser Abhandlung ist ein Zeugnis des Herrn Gauſs, des berühmten Geometers zu Göttingen beigelegt, folgenden Inhalts: „Herr Schiereck hat mir ein Modell einer Rechenmaschine gezeigt, welche er zur Ausführung der arithmetischen Operationen erfunden hat. Ich bezeuge mit Vergnügen, daſs diese Maschine den beabsichtigten Zweck sehr leicht erreicht und daſs dies nach den Verbesserungen, welche der Erfinder an ihr zu machen beabsichtigt, noch mehr der Fall sein wird. Diese sinnreiche Erfindung ist um so schätzbarer, weil diese Maschine mit geringen Kosten hergestellt werden kann.“

Weiſs jemand Näheres über diese Rechenmaschine anzugeben?

R. Mehmke.

---

# Bücherschau.

**O. Koll. Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadrate mit ihrer Anwendung auf die Geodäsie und die Wassermessungen.** Mit in den Text gedruckten Figuren. Zweite Auflage. 8⁰. XII u. 323 u. 31 S. Berlin 1901, Julius Springer.

Da die erste Auflage dieses Buches, die aus dem Jahre 1893 stammt, weit verbreitet ist und unter den Praktikern, besonders bei den preufsischen Vermessungsbeamten, grofse Anerkennung gefunden hat, und weil ferner die vorliegende zweite Auflage im wesentlichen unverändert geblieben ist, so glaubt Ref. auf eine eingehende Besprechung verzichten zu können.

Der Hauptwert des Buches beruht darauf, dafs es die theoretischen Grundlagen für die noch gültige, preufsische „Anweisung IX für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten", an deren Abfassung der Verf. bekanntlich stark beteiligt ist, enthält, und dafs es mit Rücksicht darauf eine sehr grofse Anzahl durchgeführter Beispiele in der vorgeschriebenen schematischen Form darbietet. Aufserdem aber giebt es auch noch eine Übersicht über die bei Landestriangulationen und Landesnivellements vorkommenden Ausgleichungsrechnungen und deren Ausführung. Die im Titel noch erwähnten Wassermessungen treten sehr stark zurück.

Eine zeitgemäfse und nützliche Erweiterung gegen die erste Auflage besteht darin, dafs für die Fälle, die dem Verf. geeignet erschienen, das Rechnungsverfahren für die Anwendung der Rechenmaschine eingerichtet worden ist. Der Verf. hätte aber noch einen Schritt weiter gehen können, indem er auch den sehr häufig als praktisch bewährten Gebrauch des Rechenschiebers gebührend berücksichtigt hätte.

Da das Buch nicht nur für die Praxis, sondern auch für das Studium bestimmt ist, so soll hier noch auf einige Punkte näher eingegangen werden, in denen Ref. im Hinblick auf den zweiten Zweck mit dem Verf. nicht ganz derselben Meinung ist.

Im I. Teil, der Theorie der Beobachtungsfehler, wird das Fehlergesetz allein aus der Hagenschen Hypothese über die Elementarfehler abgeleitet. Es empfiehlt sich dieses Verfahren zwar dadurch, dafs nur verhältnismäfsig geringe mathematische Kenntnisse vorausgesetzt werden, jedoch ist diese Hypothese selbst nicht gerade einfach und bietet mancherlei Angriffspunkte dar. Wenn nun auch die Entwickelungen von Laplace über diesen Gegenstand für den angenommenen Leserkreis vielleicht zu schwierig sind, so hätte sich doch leicht auf 1 bis 2 Seiten die klassische Gaufssche Ableitung, auf Grund der Annahme des arithmetischen Mittels als wahrscheinlichsten Wert einer mehrfach gleich genau beobachteten Gröfse, geben lassen.

Auffällig ist es, dafs im II. Teil, der Methode der kleinsten Quadrate, die Ergebnisse des I. Teils vollständig unberücksichtigt bleiben. Es wird hier vielmehr von dem Grundsatz ausgegangen, dafs die gesuchten Gröfsen so zu bestimmen oder die Fehler der Beobachtungsergebnisse so aus-

zugleichen sind, dafs die Quadratssumme der auf die Gewichtseinheit zurückgeführten wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler ein Minimum wird. Diese einfache Annahme ist für ein Buch, wie das vorliegende, gewifs empfehlenswert, zumal da man dadurch unmittelbar auch auf das arithmetische Mittel als plausibelsten Wert geführt wird. Zu welchem Zwecke sind dann aber die Entwickelungen des I. Teils gemacht worden? Es hätte doch wenigstens angedeutet werden müssen, dafs das Gaufssche Fehlergesetz sofort auch auf diesen Grundsatz führt. Aufserdem kann man bei diesem Verfahren nicht von „wahrscheinlichsten" Beobachtungsfehlern sprechen, sondern höchstens nur von plausibelsten, eine Bezeichnung, die gleichfalls von Gaufs herrührt. Wenn der Verf. ferner behauptet, dafs wir keinen „strengen" Beweis dafür führen könnten, dafs wir nicht auf eine andere Weise (z. B. dadurch, dafs man die Summe irgend einer anderen Potenz der absolut genommenen Beobachtungsfehler möglichst klein macht) im gegebenen Falle etwas Besseres zu erreichen imstande seien, als durch die Methode der kleinsten Quadrate, so ist dieses ja richtig; denn ohne irgend welche Axiome oder Hypothesen läfst sich überhaupt nichts streng beweisen. Es sei aber hier darauf hingewiesen, dafs z. B. unter den sehr allgemeinen Voraussetzungen der zweiten Gaufsschen Begründung der Methode der kleinsten Quadrate in der Theoria combinationis observationum etc. die hierauf beruhende Art der Kombination der Beobachtungen die plausibelsten, d. h. den geringsten Fehlern unterworfenen Resultate liefert.

Um ein Mafs für die Genauigkeit der Beobachtungsergebnisse und der aus ihnen abgeleiteten Gröfsen festzustellen, wird als zweiter Grundsatz eingeführt, dafs als Mittelwert der Quadrate der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler (?) oder als Quadrat des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit der Wert angenommen wird, der sich ergiebt, wenn wir die Quadratsumme der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler durch die Anzahl der überschüssigen Beobachtungsergebnisse dividieren. Auch von diesem Grundsatze wird behauptet, dafs er sich nicht streng beweisen lasse. Jedenfalls läfst er sich aber auf einen sehr viel einfacheren zurückführen; und dies ist hier von Wert, da sich der vom Verf. gewählte Grundsatz durchaus nicht von selbst versteht, was schon die häufigen Verstöfse gegen ihn zeigen. Da nämlich im I. Teil der mittlere Fehler (angenähert) als das Mittel der Quadrate der wahren Fehler definiert ist, so kann der zweite Grundsatz hieraus unter Annahme des ersten streng abgeleitet werden, und es läfst sich sogar zeigen, dafs diese Berechnung des mittleren Fehlers gegenüber allen sonst noch möglichen Arten die günstigste ist.

Auf den Seiten 251/253 wird die Aufstellung der Seitengleichung für ein vollständig beobachtetes Viereck behandelt. In sämtlichen 13, durch Figuren erläuterten Beispielen wird, ebenso wie in den beiden Fällen des Zahlenbeispiels auf S. 254/257, als Centralpunkt der dem Dreieck mit dem kleinsten Flächeninhalt gegenüberliegende, also ihm nicht angehörige Eckpunkt gewählt. Dies ist falsch; von der Anwendung dieses Prinzips ist also abzuraten. Dafs im Gegenteil der dem Dreieck mit der gröfsten Fläche gegenüberliegende Eckpunkt des Vierecks als Centralpunkt für die Aufstellung der Seitengleichung der günstigste ist, ist schon lange bekannt; am Beweise dieses Satzes waren Andrae, Zachariae und Jordan beteiligt. Die im 23. Bande der Zeitschrift für Vermessungswesen (1894) hierüber zwischen

W. Jordan und dem Verf. geführte Fehde erscheint demnach Herrn Koll nicht bekehrt zu haben. Vielleicht macht es aber auf ihn mehr Eindruck, wenn ich mitteile, dafs Gaufs bereits in einem Briefe an Gerling vom 11. Februar 1824 den Satz in der obigen Form ohne jede Einschränkung ausgesprochen hatte, und dafs sich überdies in seinem Nachlafs ein rein analytischer Beweis dafür vorgefunden hat, der in dem im Druck befindlichen IX. Bande von Gaufs' Werken veröffentlicht werden wird.

Überhaupt ist es dem Ref. aufgefallen, dafs sich in dem ganzen Buche der Name Gaufs nur einmal (auf S. 101), und noch dazu in einer Anmerkung vorfindet, und zwar hier auch nur bei der Angabe der „üblichen Gaufsschen Bezeichnungsweise" $[aa]$ u. s. w. Freilich wird noch fünfmal, ebenfalls ohne nähere Kenntlichmachung durch Andeutung der Vornamen oder durch Ähnliches, dieser Name zitiert, jedoch ist damit ein anderer, Fr. G. Gaufs, gemeint.

Die zwei Bogen umfassende, besonders paginierte und am Schlufs beigegebene Zusammenstellung aller wichtigeren und für den praktischen Gebrauch in Frage kommenden Formeln wird manchem Leser erwünscht sein.

Potsdam. A. Börsch.

---

Dr. **P. H. Schoute,** Professor der Mathematik an der Reichsuniversität zu Groningen (Holland): **Mehrdimensionale Geometrie.** Erster Teil. Die linearen Räume. Mit 65 Figuren und 335 Aufgaben. Sammlung Schubert XXXV. Leipzig, G. J. Göschen. 1902. Preis geb. 10 Mark.

Fast wie eine geistreiche Antithese mutet es den der Sache ferner Stehenden an, wenn er, wie im vorliegenden Buche, von einer darstellenden Geometrie im $n$-dimensionalen Raume liest. Ist doch die mehrdimensionale Geometrie eine kühne Schöpfung der reinen Abstraktion, während die darstellende Geometrie mit ihren zahlreichen Beziehungen zur Praxis so ganz auf dem Boden der Wirklichkeit steht. In der That kann man, dem heutigen Stande der Wissenschaft nach, die gesamte Geometrie einteilen in eine reale, welche sich in unserm Raume verwirklichen läfst, und in eine ideale, die blos gedacht werden kann. Aber es finden sich doch die innigsten Zusammenhänge zwischen diesen Gebieten. Auch die Gebilde der gewöhnlichen Geometrie, wie die Gerade, der Kreis u. s. f. existieren ja nur in der Vorstellung; sie beruhen auf der Abstraktion, wenn sie auch in der Wirklichkeit mit einer gewissen Annäherung realisiert werden können. So betrachtet ist die mehrdimensionale Geometrie eine Art von Weiterentwicklung oder Verallgemeinerung der gewöhnlichen Geometrie, nur mit dem Unterschiede, dafs ihr auch die angenäherte Realisierbarkeit mangelt. Diese philosophische Seite und die grofsen prinzipiellen Schwierigkeiten werden — was ja übrigens auch ein Standpunkt ist — im vorliegenden Buche nicht weiter berührt. Der Verfasser bemerkt, es genüge, dafs man sich aufserhalb des gewöhnlichen Raumes einen Punkt denken könne; über die Frage der wirklichen Existenz der mehrdimensionalen Geometrie soll nicht weiter gegrübelt werden. Er giebt dann mit elementaren Mitteln eine streng logisch aufgebaute, synthetische Theorie der mehrdimensionalen linearen Räume und gewinnt für die Begriffe Parallelismus, Orthogonalität, Abstand, Projektion und Winkel zum Teil in neuer Weise die entsprechenden Definitionen. Daran schliefst sich die weitere Ausführung dieser Betrach-

tungen in der darstellenden und analytischen Geometrie, in der Geometrie der Lage und der Anzahl und in der Polygonometrie. Hier möge etwas näher darauf eingegangen werden, wie der Verfasser die darstellende Geometrie solcher höheren Räume behandelt.

Unter einem rechtwinkligen Koordinaten-System im $n$-dimensionalen Raume $R_n$ versteht man $n$ durch einen Punkt $O$ gehende Gerade $OX_1, OX_2 \ldots OX_n$, von denen je zwei aufeinander senkrecht stehen, die aber ferner noch die allgemeinere Eigenschaft haben, daſs der durch $d$ von ihnen bestimmte Raum $R_d$ auf dem durch die übrigen $n-d$ Geraden bestimmten Raum $R_{n-d}$ senkrecht steht. Einen Punkt $P$ des Raumes $R_n$ kann man durch $n$ Räume $R_{n-1}$, welche bezw. auf den Geraden $OX_1$, $OX_2 \ldots OX_n$ senkrecht stehen, auf diese Koordinatenachsen projizieren, wodurch man die Punkte $P_1, P_2 \ldots P_n$ erhält. Die $n$ Koordinatenachsen bestimmen ferner zu zweien $\frac{n(n-1)}{2}$ Ebenen $OX_1X_2$, $OX_1X_3$ u. s. f. Legt man durch $P$ Räume $R_{n-2}$, welche zu diesen Ebenen orthogonal sind, so ergeben sich als Projektionen die Punkte $P_{12}$, $P_{13}$ u. s. f. Es genügt meistens, $n-1$ solche Projektionsebenen z. B. $OX_1X_2$, $OX_2X_3 \ldots OX_{n-1}X_n$ zu betrachten. Beschränken wir uns jetzt auf den Raum von vier Dimensionen $R_4$, so ist ein Punkt umgekehrt bestimmt durch die Projektionen $P_{12}$, $P_{23}$, $P_{34}$.

Um nun zu einer Art von Darstellung der Gebilde des $R_4$ zu gelangen, zeichnet man in der Zeichenebene zwei auf einander senkrechte Gerade mit dem Schnittpunkt $O$ und denkt sich die Projektionsebene des $R_4$ in die Quadranten der Zeichenfläche geklappt, so daſs man also die vier Halbstrahlen durch $O$ der Reihe nach mit $OX_1$, $OX_2$, $OX_3$, $OX_4$ bezeichnet. Man kann dann die Projektionen eines Punktes in diese Felder eintragen, erhält gewisse Lagenbeziehungen zwischen denselben und ist imstande, den idealen Operationen im $R_4$ gewisse Konstruktionen in dieser Tafel gegenüber zu stellen. Von den im vorliegenden Buche durchgeführten Problemen des $R_4$ erwähnen wir folgende: Bestimmung der Lagenverhältnisse einer Geraden, Darstellung einer Ebene und eines gewöhnlichen Raumes $R_3$, Bestimmung des Abstandes eines Punktes von einem Raume $R_3$, Bestimmung des Winkels zweier Geraden. Wenn man auf Grund dieser Abbildung für die abstrakten Begriffe im $R_4$ reale Gröſsen erhält, so scheint es fast überflüssig zu bemerken, daſs diese realen Gröſsen eben nur durch die benutzte Abbildung den idealen Gebilden des $R_4$ zugeordnet werden, und man kann darüber im Zweifel sein, ob man die Bezeichnung „darstellende“ Geometrie auf diese Abbildung anwenden soll. Denn die Quadranten in der Zeichenebene und die Projektionsebenen des Koordinatensystems im $R_4$, sind doch nur durch eine äuſserliche, fast mechanische Beziehung in Zusammenhang gebracht und zwischen beiden gähnt die Kluft, welche die ideale mehrdimensionale Geometrie von der gewöhnlichen trennt, ohne daſs dieselbe durch diese Abbildung überbrückt würde.

Daſs die Konstruktion des Abstandes zweier Punkte im $R_4$ ihre Begründung erst in dem späteren Abschnitt über die analytische Geometrie erfährt, verstöſst etwas gegen das sonst so strenge System des Verfassers und lieſse sich vermeiden durch Voranstellung des Abschnittes über die analytische Geometrie. Einen besonderen Vorzug des Buches bilden die in reicher Zahl (335) eingeflochtenen, zum Teil allerdings nicht leichten

Aufgaben, welche dem Leser Gelegenheit bieten, sein Eindringen in die Materie selbst zu kontrolieren. Zahlreiche kleine stilistische Unebenheiten haben sich infolge der Übertragung aus dem Holländischen eingeschlichen. Im übrigen kann man dem Buche nur wünschen, daſs es das Interesse für die mehrdimensionale Geometrie in weiteren Kreisen verbreite. Denn diese abstrakten Spekulationen bilden eine vorzügliche Schule für strenge Logik und führen auch dazu, die Begriffe und Definitionen der gewöhnlichen Geometrie schärfer zu fassen, ganz abgesehen davon, daſs man auch schon zu neuen Theoremen der gewöhnlichen Geometrie dadurch gelangt ist, daſs man diese Geometrie als eine Schnittbildung aus dem Raum von vier Dimensionen auffaſste.

München, Nov. 1902. KARL DOEHLEMANN.

---

Dr. **Ludwig Marc,** K. Reallehrer in Deggendorf. **Sammlung der Aufgaben aus der höheren Mathematik, technischen Mechanik und darstellenden Geometrie,** welche bei der Vorprüfung für das Bauingenieur-, Architektur- und Maschineningenieurfach an der k. technischen Hochschule zu München in den Jahren 1885 bis mit 1901 gestellt worden sind. München, Theodor Ackermann. 1901. Preis brosch. 1,60 Mk.

Die Figuren sind, auf die Hälfte verkleinert, den Aufgaben beigegeben.

München, Nov. 1902. KARL DOEHLEMANN.

---

**G. Müller,** Professor. **Zeichnende Geometrie.** Im Auftrage der Königlich Württembergischen Centralstelle für Gewerbe und Handel herausgegeben. Mit XI Figurentafeln und mehreren Abbildungen im Text. 6. vermehrte Auflage. Stuttgart, Paul Neff. 1901. Preis geb. 2,20 Mk.

Das Buch ist für solche Schulen bestimmt, in welchen die Geometrie nicht als ein besonderes Unterrichtsfach, sondern im Anschluſs an das geometrische Zeichnen behandelt wird. Die Anschauung, welche die gut ausgeführte Zeichnung liefert, soll möglichst ausgenutzt werden, um die geometrischen Wahrheiten zu erkennen und um zu Beweisen für dieselben zu gelangen. Der Verfasser giebt eine groſse Zahl guter und praktisch angeordneter Zeichenübungen, welche sich auf die Gerade und den Kreis beziehen, sodann Konstruktionen von Kegelschnitten und cyklischen Linien (Cykloiden, Trochoiden, Kreisevolvente, archimedische Spirale). Sehr gut sind die Winke und Bemerkungen über die Werkzeuge und Materialien zum praktischen Zeichnen und über die Genauigkeit beim Konstruieren. Die dem Text eingereihten Figuren 5, 9 und 10 kann der Referent, auch wenn sie ausdrücklich als schematisch und der vollständigen Richtigkeit entbehrend bezeichnet werden, nicht gelten lassen. Denn unter allen Umständen muſs der Schein vermieden werden, als berührten die von der Spitze des Kegels nach den Scheiteln der Grundellipse gehenden Mantellinien diese Ellipse in den Scheiteln.

München, Nov. 1902. KARL DOEHLEMANN.

---

# Neue Bücher.

### Arithmetik und Analysis.

1. Czuber, Emanuel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. (Teubners Sammlung Bd. 9.) 1. Hälfte. gr. 8°, 304 S. Leipzig, B. G. Teubner. M. 12.—
2. Encyklopädie d. mathem. Wissenschaften. I. Bd. 7. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 3.60.
3. Mellor, J. W., Higher Mathematics for students of Chemistry and Physics. With special reference to practical work 8 vo, XXII and 544 pp. London, Longmans, Green & Co. 12 s. 6 d.
4. Thiermayer, Die Mathematik in ihrer Anwendung auf das Versicherungswesen. Progr. Papenburg. 4°, 23 S.

### Astronomie und Geodäsie.

5. Buchholz, H., Untersuchung der Bewegung vom Typus 2/3 im Problem der drei Körper und der „Hilda-Lücke" im System der kleinen Planeten auf Grund der Gyldenschen Störungstheorie. Habilitationsschrift. Halle a. S. 4°, 165 S.
6. Charlier, Carl Ludw., Die Mechanik des Himmels. Vorlesungen. 1. Bd. gr. 8°, VIII u. 488 S. u. Fig. Leipzig, Veit & Co. M. 18.—; geb. in Halbfrz. M. 20.50.
7. Günther, Siegmund, Astronomische Geographie. (Sammlung Göschen Nr. 92). kl. 8°, 170 S. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 0.80.
8. Hegemann, E., Übungsbuch f. die Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie. 2. verb. u. erweit. Aufl. gr. 8°, VI u. 169 S. m. 41 Abb. Berlin, Parey. geb. in Leinw. M. 5.
9. Lambert, J. H., Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Kometen. Insigniores orbitae cometarum proprietates (1761). Observations sur l'orbite apparente des comètes (1771). Auszüge aus den „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik" (1772). Deutsch herausg. u. m. Anmerkgn. versehen von J. Bauschinger. (Ostwalds Klassiker Nr. 133). 8°, 149 S. m. 35 Fig. Leipzig, Engelmann. kart. M. 2.40.
10. Middleton, Reginald E., A treatise on Surveying. In 2 parts. Part 2. Roy. 8 vo, 384 pp. London, Spon. 10 s. 6 d.
11. Zimmermann, W., Eine Methode zur Berechnung specieller Störungen durch Variation der kanonischen Elemente. Diss. Breslau. 4°, 30 S. m. 1 Tab. u. 2 Taf.

### Darstellende Geometrie, graphische Methoden.

12. Goering, A., Massenermittelung, Massenverteilung u. Transportkosten der Erdarbeiten. Ein einheitliches graphisches Verfahren zur Ermittelg. u. Veranschlagg. der Erdbewegg. bei allgemeinen u. ausführl. Vorarbeiten. 4. erw. Aufl. gr. 8°, VII u. 38 S. m. Fig. u. 2 Taf. Berlin, Polytechn. Buchh. kart. M. 2.50.

13. Grimshaw, Rob., Leitfaden f. das isometrische Skizzieren u. die Projektionen in den schiefen oder sog. Kavalier-Perspektiven u. s. w., m. besond. Bezug auf die isometr. Skizzen-Blöcke (D. R. G.-M.). gr. 8°, IV u. 48 S. m. 145 Abb. Hannover, Gebr. Jänecke. M. 1.
14. Manchot, Wilh., Das Stereoskop. Seine Anwendg. in den techn. Wissenschaften. Über Entstehung u. Konstruktion stereoskop. Bilder. gr. 8°, VII, 68 S. m. 50 Fig. Leipzig, Veit & Co. M. 1.80.

Siehe auch Nr. 41.

## Geschichte.

15. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. 14. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 16.
16. Bradhering, F., Kurze Geschichte des Schiffskompasses. Progr. Magdeburg. 4°, 32 S. m. Abb.
17. Burckhardt, F., Zur Geschichte des Thermometers. Progr. Basel. 4°, 22 S.
18. Curtze, Maximilian, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter u. der Renaissance. (Abhandlgn. zur Gesch. der mathem. Wissensch. m. Einschlufs ihrer Anwendungen, 13. Hft.) 2. Tl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.
19. Dünner, Lasar, Die älteste astronomische Schrift des Maimonides. Ein Beitrag zur Geschichte der Astronomie. gr. 8°, 54 S. Würzburg, Beckers Universitäts-Buchdruckerei M. 1.50.
20. Fauser, W., Telegraphie in alter u. neuer Zeit. Progr. Stettin. 4°, 12 S. u. 1 Taf.

## Mechanik.

21. Encyklopädie d. mathem. Wissenschaften. IV. Bd. 1. Tl. II. Hft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4.60.
22. Grassmann, Herm., Gesammelte mathematische und physikalische Werke. 2. Bd. 2. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. gr. 8°, VIII u. 264 S. Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.
23. Heun, Karl, Formeln u. Lehrsätze der allgemeinen Mechanik in systematischer u. geschichtlicher Entwicklung. 8°, VIII u. 112 S. Leipzig, Göschen. geb. M. 3.50.
24. Lorenz, Hans, Lehrbuch der technischen Physik. 1. Bd. Technische Mechanik starrer Systeme. gr. 8°, XXIV u. 626 S. München u. Berlin, Oldenbourg. M. 15.
25. Picard, Emile, Quelques réflexions sur la mécanique, suivies d'une première leçon de dynamique. In-8°. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.50.
26. Reissner, H., Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerkes. Diss. Berlin. 8°, 28 S.

## Physik.

27. Andrews, Thomas, Über die Continuität der gasförmigen und flüssigen Zustände der Materie und Über den gasförmigen Zustand der Materie. Herausg. von Arthur von Öttingen u. Kenji Tsuruta. (Ostwalds Klassiker Nr. 132). 8°, 82 S. Leipzig, Engelmann. kart. M. 1.40.
28. Auerbach, F., Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. (Aus Natur u. Geisteswelt. 40. Bdchen). Leipzig, B. G. Teubner. M. 1, geb. M. 1.25.
29. Bragstad, O. S., Theorie des rotierenden Feldes mit Anwendung auf die Bestimmung des Stromdiagrammes der asynchronen Maschinen. Habilitationsschr. Karlsruhe i. B. 8°, 71 S. m. 20 Fig.
30. Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik. Übersetzt von H. Pflaum. 1. Bd. Einleitung. Mechanik. Einige Mefsinstrumente und Mefsmethoden. Die Lehre von den Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern. gr. 8°, XX u. 792 S. m. 412 Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 12, geb. M. 14.

31. Fortschritte, die, der Physik im J. 1901. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellschaft. 57. Jahrg. 2. Abt. Physik des Äthers. gr. 8°, LXIV u. 810 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 30.
32. Fritsch, H., Die Huygensche Darstellung des Lichtäthers. Progr. Königsberg. 4°, 14 S.
33. Greinacher, Heinr., Einführung in die Theorie der Doppelbrechung. Elementargeometrisch dargestellt. Eine Ergänzung zu den physikal. Lehrbüchern. 8°, 64 S. m. Fig. Leipzig, Veit & Co. M. 1.20.
34. Ludwig, Walther, Die Horopterkurve mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve. Abhandlung zu dem Modell Serie XXVIII Nr. 6. Halle a. S., Schilling. M. 1.
35. Macdonald, H. M., Electric waves. Being an Adams Prize Essay in the University of Cambridge. 8 vo, 200 pp. Cambridge, University Press. 10 s.
36. Travaux du congrès international de physique réuni à Paris en 1900, sous les auspices de la Société française de physique, rassemblés et publiés par Ch.-Ed. Guillaume et L. Poincaré. T. IV. Procès-verbaux; Annexes; Liste des membres. In.-8°. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 6.

Siehe auch Nr. 22.

### Rechenapparate, Tafeln.

37. Brunn, J., Vierstellige Logarithmen, für den Schulgebrauch zusammengestellt. gr. 8°, 18 S. Münster, Aschendorff. M. 0.25.
38. Fürle, Rechenblätter. Gebrauchserklärung zu den Blättern 1 u. 2. gr. 8°, 4 S. Berlin, Mayer & Müller. M. 0.20.
39. Joal, A., Tables géodésiques pour diviser rapidement et avec précision les immeubles territoriaux. In.-8° avec tableaux et 35 pl. Paris, Vve. Dunod. kart. Fr. 4.
40. Küster, F. W., Logarithmische Rechentafeln f. Chemiker. 3., neu berechnete u. erweit. Aufl. 8°, 95 S. Leipzig, Veit & Co. geb. in Leinw. M. 2.
41. Mandl, Julius, Graphische Darstellung von Formeln. (Sonderabdruck aus der „Allgem. Bauzeitung" 1902, Hft. 3). gr. 8°, 65 S. m. 37 Fig. im Text u. 4 Tafeln. Wien, Seidel & Sohn. M. 6.
42. Smith, G. L., A circular slide rule. With directions for use. 12 mo, in case. London, Longmans. 1 s.

### Verschiedenes.

43. Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. 11e série. Fiches 1001 à 1100. In.-8°. Paris 1901, Gauthier-Villars. Fr. 2.
44. Zeemann, P., Zuivere en toegepaste wiskunde. Rede bij de aanvaarding van het hoogleeraarsambt aan de rijksuniversiteit de Leiden, den 8en October 1902 uitgesproken. gr. 8°, 32 blz. Delft, Waltmann. f. 0.50.

---

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle einlaufenden Schriften regelmäſsig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 14. Hft., s. N. B., („Neue Bücher") Nr. 15.

Andrews, Thomas, Über die Continuität der gasförmigen und flüssigen Zustände der Materie, s. N. B. 27.

Auerbach, F., Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre, s. N. B. 28.

Bachmann, P., Niedere Zahlentheorie. 1. Tl. (Teubners Sammlung Bd. X 1). Leipzig, B. G. Teubner.

Bardey-Piezker, Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1903, B. G. Teubner.

Beltrami, Eugenio, Opere mathematiche. Tomo primo. Milano, Hoepli. M. 20.

Brioschi, Francesco, Opere matematiche. Tomo secondo. Milano, Hoepli. M. 20.

Brüsch, Wilh., Grundriſs der Elektrotechnik für technische Lehranstalten. Leipzig, B. G. Teubner. In Leinw. geb. M. 3.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Phyisk, s. N. B. 30.

Coulon, Joseph, Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques. Thèse. Paris, Hermann.

Curtze, Maximilian, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter u. der Renaissance, 2. Tl., s. N. B. 18.

Czuber, Emanuel, Wahrscheinlichkeitsrechnung, s. N. B. 1.

Doehlemann, Karl, Geometrische Transformationen. 1. Tl. Die projektierten Transformationen nebst ihren Anwendungen. (Sammlung Schubert XXVII). Leipzig, Göschen. geb. M. 10.

Doležal, Ed., Trigonometrische Punktbestimmung durch Einschneiden und Hansens Problem. (Sonderabdruck aus dem Berg- u. Hüttenmännischen Jahrbuche der Bergakademieen, 50. Jahrg., 2. Hft.). Leoben, Nüſsler.

— Festlegung eines polygonalen Zuges bei Verwendung neuer Instrumente für optische Distanzmessung. (Sonderabdruck aus der Ztschr. des Österr. Ingen. u. Archit. Ver. 1901). Ebenda.

Dünner, Lasar, Die älteste astronomische Schrift des Maimonides, s. N. B. 19.

Exner, Franz u. Haschek, E., Wellenlängen-Tabellen für spektralanalytische Untersuchungen auf Grund der ultravioletten Funkenspektren der Elemente. 1. u. 2. Tl. Leipzig u. Wien, Deuticke. M. 16.

Faraday, Michael, Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. (Ostwalds Klassiker Nr. 131.) Leipzig, Engelmann. kart. M. 0.80.

Fricke, Robert, Hauptsätze der Differential- u. Integralrechnung. 3. umgearbeitete Auflage. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 5, geb. M. 5.80.

Grassmann, Herm., Gesammelte Werke, 2. Bd., 2. Tl., s. N. B. 22.

Günther, Siegmund, Astronomische Geographie, s. N. B. 7.

Hauck, A. Fr. und H., Lehrbuch der Arithmetik für Real-, Gewerb- u. Handelsschulen. I. Tl. 2. Abt. 8. Aufl. Herausg. von C. W. Bauschinger. Nürnberg 1903, Korn. geb. M. 2.90.

— Dasselbe. II. Tl. 1. Abt. 6. Aufl. Herausg. von F. Fischer. Ebenda. geb. M. 3.—.

Heun, Karl, Formeln u. Lehrsätze, s. N. B. 23.

Holzmüller, Gust., Elemente der Stereometrie. 4. Tl. Leipzig, Göschen. M. 9, geb. M. 9.50.

Lambert, J. H., Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Kometen, s. N. B. 9.

Lesser, Oskar, Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Berlin, Salle. M. 2.

Lobatschefskij, N. J., Pangeometrie. (Ostwalds Klassiker Nr. 130.) Leipzig, Engelmann. kart. M. 1.70.

Lorenz, Hans, Lehrbuch der technischen Physik. 1. Bd., s. N. B. 24.

Ludwig, Walther, Die Horopterkurve, s. N. B. 34.

Mandl, Julius, Graphische Darstellung von mathematischen Formeln, s. N. B. 41.

Močnik, Franz, Ritter von, Lehrbuch der Arithmetik für Unter-Gymnasien, bearb. v. Anton Neumann. 1. Abt. 36. Aufl. Leipzig, Freytag. geb. M. 2.

Müller, H. u. Hupe, A., Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Bd. II. Oberstufe. 2. Abt. Synthetische u. analytische Geometrie der Kegelschnitte. Darstellende Geometrie. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. geb. M. 2.40.

Pfaff, Joh. Friedr., Allgemeine Methode partielle Differentialgleichungen zu integrieren. (Ostwalds Klassiker Nr. 129.) Leipzig, Engelmann. kart. M. 1.40.

Rey-Pailhade, J. de, Sur les avantages de l'emploi du système décimal aux calculs nautiques. Conférence faite le 27 janvier 1902, au Club nautique de Nice. In-4°, 6 p. Toulouse (18, rue St. Jacques) 1902.

Sauerbeck, Paul, Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion. (Abhandlgn. zur Gesch. der math. Wissensch. 15. Hft.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.

Schröder, Th., Beispiele u. Aufgaben aus der Algebra für Gymnasien, Realschulen u. zum Selbstunterricht. 11. Aufl. Nürnberg 1903, Korn. geb. M. 1.20.

Schubert, H., Neuer ewiger Kalender zur Bestimmung des Wochentags für jedes beliebige Datum nach und vor Christi Geburt, mit Berücksichtigung der Ausnahmejahre 42 vor bis 4 nach Christi Geburt und zur Bestimmung der Daten der christlichen Feste. Leipzig, Göschen. M. 0.50.

Schubert, Herm., Niedere Analysis. 1. Tl. Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen. (Sammlung Schubert V). Leipzig, Göschen. geb. M. 3.60.

Snyder, Virgil and Hutchinson, John Irwin, Differential and Integral Calculus. New York, American Book Company. Cloth. $ 2.50.

Thieme, Herm., Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. 2. Tl. Leipzig, Freytag. geb. M. 2.50.

Veröffentlichungen des königl. preufsischen geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 9. Bestimmung der Polhöhe u. der Intensität der Schwerkraft in der Nähe des Berliner Meridians von Arkona bis Elsterwerda, sowie auf einigen anderen Stationen nebst Azimutmessungen auf drei Stationen. Berlin, Stankiewicz.

Wertheim, Gustav, Anfangsgründe der Zahlenlehre. Mit den Bildnissen von Fermat, Lagrange, Euler und Gaufs. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 9.

Whittaker, E. T., A course of Modern Analysis. An introduction to the general theory of infinite series and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions. Cambridge, University Press. bound in cloth 12 s. 6 d.

Wienecke, Ernst, Die Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben durch geometrische Örter in schulgemäfser Weise erläutert an 250 Aufgaben. Berlin 1901, Oehmigke. M. 1.20.

— Geometrie für Volksschulen. 2. Aufl. Ebenda. M. 0.45.

Zindler, Konrad, Liniengeometrie mit Anwendungen. 1. Bd. (Sammlung Schubert XXXIV). Leipzig, Göschen. geb. M. 12.

# Die Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt.

(Zugleich als Erläuterung zu den im Verlage von Martin Schilling in Halle, Serie XXIX, Nr. 1—3, erschienenen Apparaten[1].)

Von Hermann Grassmann in Halle a/S.

Das Problem der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ist für den einfachsten Fall, wo keine äußeren Kräfte wirken, seit der Mitte des 18. Jahrhunderts von einer Reihe hervorragender Mathematiker behandelt und namentlich durch die Arbeiten von Euler, Lagrange, Poinsot, Poisson und Jacobi wesentlich gefördert worden. Seit den fünfziger Jahren des vorigen Jahrhunderts schien das Problem so gut wie erledigt, bis im Jahre 1880 W. Heſs den Nachweis führte, daſs die schönen aus dem Jahre 1834 stammenden Untersuchungen von Poinsot, durch welche insbesondere die geometrische Seite des Problems in anschaulichster Weise entwickelt wurde, in einem wichtigen Punkte der Verbesserung bedürftig seien.[2] Dies erscheint besonders deshalb bemerkenswert, weil der erwähnte Fehler der Poinsotschen Darstellung[3] trotz ihrer groſsen Verbreitung fast ein halbes Jahrhundert unbeachtet geblieben und inzwischen sogar in die Lehrbücher der Mechanik übergegangen war; und es ist daher auch begreiflich, daſs durch jene Entdeckung, die wenige Jahre später auch noch von anderer Seite gemacht wurde[4], die Beschäftigung mit dem Problem der Drehung eines kraftfreien starren Körpers einen neuen Anstoſs erhielt.

---

1) Drei Modelle zur Kreiseltheorie, unter Mitwirkung von Fr. Schilling herausgegeben von H. Graſsmann. Halle, 1902.

2) Vgl. W. Heſs, Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariablen Ebene. Inauguraldissertation. München, 1880.

3) Vgl. unten S. 361.

4) Vgl. die weiter unten zitierten Arbeiten von De Sparre.

## Erster Abschnitt.

### Der Polhodiekegel und der Herpolhodiekegel. Die beiden Polwege.

Wie in den Elementen der Kinematik gezeigt wird, läſst sich jede beliebige Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt $O$ für jedes Zeitelement auffassen als eine Drehung um eine gewisse, durch den festen Punkt gehende Axe, die sogenannte instantane Drehaxe des Körpers. Diese Axe wechselt freilich, worauf auch ihr Name hindeuten soll, von Augenblick zu Augenblick ihre Lage, und zwar in doppelter Weise. Einmal verlegt sie beständig ihren Ort in dem starren Körper und beschreibt also, da sie dauernd durch den festen Punkt $O$ hindurchgehen muſs, eine in dem starren Körper liegende Kegelfläche, die den Punkt $O$ zum Scheitel hat. Andererseits aber führt sie gleichzeitig auch eine Bewegung in Bezug auf ein im Raume festliegendes System aus und durchläuft somit eine zweite Kegelfläche, welche ihre Lage im Raum beibehält und ihren Scheitel ebenfalls im Punkt $O$ hat. Beide Kegelflächen berühren einander jeden Augenblick längs einer Erzeugenden, und diese Erzeugende ist eben die instantane Drehaxe. Dreht sich der starre Körper um sie auch nur *unendlich wenig*, so kommt dadurch eine andere Erzeugende des ersten Kegels mit einer solchen des zweiten in Berührung und wird so für den nächsten Moment zur Drehaxe des Körpers. Während einer *endlichen* Bewegung des starren Körpers rollt also der erste Kegel, ohne zu gleiten, auf dem zweiten ab.

Um bei einem speziellen Rotationsprobleme auf Grund der dynamischen Differentialgleichungen die Gestalt der beiden Kegel und zugleich für jeden Augenblick die Geschwindigkeit und den Sinn des Abrollens ermitteln zu können, bedient man sich *zweier* gleichstimmiger rechtwinkliger Koordinatensysteme, eines Systems $x$, $y$, $z$, welches mit dem starren Körper fest verbunden ist und also an der Bewegung des Körpers Teil nimmt, und eines Systems 1, 2, 3, das absolut fest im Raume liegt. Für beide Koordinatensysteme wählt man den festen Punkt $O$ zum Anfangspunkt, für das bewegliche System $x$, $y$, $z$ überdies am besten die Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Punkt $O$ zu Koordinatenaxen.

Denkt man sich, es sei gelungen, die beiden Kegel zu bestimmen, und kennt man auſserdem für irgend einen Augenblick die Lage des ersten Kegels gegen den zweiten, so kann man sich bereits ein vollständiges Bild von dem räumlichen Gange der Bewegung des Körpers verschaffen.

Um indes diese Bewegung auch ihrem zeitlichen Verlaufe nach verfolgen zu können, muſs man auch noch die Winkelgeschwindigkeit ermitteln, mit welcher der Körper in jedem Augenblicke um seine instantane Axe rotiert, und den Sinn, in dem diese Rotation erfolgt. Zur anschaulichen Durchführung dieser Aufgabe pflegt man die Gröſse der Winkelgeschwindigkeit durch eine Länge bildlich darzustellen, die man von $O$ aus auf der zugehörigen Erzeugenden der beiden oben beschriebenen Kegel abträgt, und zugleich den Sinn der Drehung dadurch zu kennzeichnen, daſs man diese Abtragung auf demjenigen Halbstrahl jener Erzeugenden vornimmt, um welchen herum die Drehung in positivem Sinne erfolgt. Positiv soll dabei der Sinn einer Drehung um einen von $O$ ausgehenden Halbstrahl heiſsen, wenn sie für einen diesen Halbstrahl von $O$ aus entlang blickenden Beschauer in demselben Sinne erfolgt, wie diejenige Drehung um die $x$-Axe, bei welcher die positive Seite der $y$-Axe auf dem kürzesten Wege in die positive Seite der $z$-Axe übergeführt wird, diese Drehung betrachtet von einem Beschauer, der vom Anfangspunkte $O$ aus die positive Seite der $x$-Axe entlang sieht.

Durch die so definierte Abtragung erhält man auf jeder Erzeugenden der beiden Kegel einen Punkt, der durch seine Lage die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Drehung um diese Erzeugende charakterisiert und der Drehpol dieser Erzeugenden heiſst. Als geometrischer Ort aller Drehpole ferner ergiebt sich auf jedem der beiden Kegel eine Kurve, welche als Polweg bezeichnet wird, und diese beiden Polwege wickeln sich ebenso wie die beiden Kegel bei der Bewegung des Körpers auf einander ab. Ihr Berührungspunkt heiſst dabei für jeden Augenblick der instantane Drehpol des Körpers.

Nach dem Vorgange von Poinsot, auf den die Einführung der beiden Kegel mit ihren Polwegen zurückgeht, nennt man endlich insbesondere noch den auf dem beweglichen Kegel liegenden Polweg die Polhodie oder Polhodiekurve, den Polweg des festen Kegels die Herpolhodie oder Herpolhodiekurve; und nach diesen beiden Kurven wiederum werden die beiden Kegel als Polhodie- und Herpolhodiekegel unterschieden.

Kennt man die beiden Polwege nach ihrer Gröſse und Gestalt, sowie die Lage der Polhodie in dem starren Körper, die der Herpolhodie im festen Raum und endlich für irgend einen Zeitpunkt die Stellung des Polhodiekegels gegen den Herpolhodiekegel, so kann man die Bewegung des starren Körpers auch ihrem zeitlichen Verlaufe nach vollkommen getreu nachahmen. Die Aufgabe der Mechanik bei der

Behandlung eines Rotationsproblems reduziert sich also der Hauptsache nach auf die Bestimmung der beiden Polwege.

Um bei dem speziellen Problem, auf das sich unsere Apparate beziehen, das heifst, für den Fall, wo keine äufseren Kräfte wirken, die beiden Polwege zu bestimmen, bedienen wir uns des *Prinzips der lebendigen Kraft und des Prinzips der Flächen*, welche in dem Falle einer *kraftfreien* Drehung eines starren Körpers nichts anderes aussagen, als dafs die lebendige Kraft des Körpers und die drei Komponenten seiner doppelten Flächengeschwindigkeit in Bezug auf den Drehpunkt konstant sind, diese Komponenten bezogen auf die Ebenen des im Raume festliegenden Koordinatensystems.

Die doppelte Flächengeschwindigkeit eines um einen festen Punkt drehbaren Körpers in Bezug auf diesen Punkt stimmt übrigens nach ihrer Stellung im Raume, ihrer Gröfse und ihrem Sinne zugleich mit dem in Bezug auf denselben Punkt genommenen *Drehungsmoment der Antriebe eines Systems von Stofskräften* überein[1]), welche die gerade vorhandene Bewegung des Körpers aus dem Ruhezustande heraus in einem einzigen Augenblick erzeugen würden.

Nennt man daher das System der Antriebe dieser Stofskräfte den Impuls des Körpers und das Drehungsmoment dieses Impulses in Bezug auf den Drehpunkt sein Impulsmoment in Bezug auf den Drehpunkt[2]), so kann man sagen: Die doppelte Flächengeschwindigkeit eines um einen festen Punkt drehbaren Körpers in Bezug auf diesen Punkt ist nach Stellung, Gröfse und Sinn mit dem Impulsmomente des Körpers in Bezug auf denselben Punkt gleich; und die Komponenten dieser doppelten Flächengeschwindigkeit des Körpers können somit auch als die Komponenten seines Impulsmomentes aufgefafst werden.

Demgemäfs läfst sich die Eigenschaft der Drehung eines kraftfreien starren Körpers, welche durch das Prinzip der Flächen ausgesprochen wird, auch folgendermafsen formulieren:

---

1) Bekanntlich ist für eine *konstante* Kraft, welche auf einen ruhenden materiellen Punkt einwirkt, das Produkt aus seiner Masse und der von dieser Kraft erregten Geschwindigkeit gleich dem Produkte aus der Kraft und der Zeit, während welcher sie gewirkt hat; und dieses Produkt aus der Kraft und der Dauer ihrer Wirksamkeit bezeichnet man als den Antrieb der Kraft. Bei einer *veränderlichen* Kraft tritt an die Stelle des Produktes aus Kraft und Zeit das Integral, welches über das Produkt aus der Kraft und dem zugehörigen Zeitelement erstreckt ist, und dessen Grenzen den Anfangs- und Endpunkt für die Dauer der Wirksamkeit angeben.

2) Vgl. F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels. Heft I und II. Leipzig, 1897 und 1898. S. 93 ff.

Bei einem kraftfreien starren Körper, der um einen festen Punkt drehbar ist, bleibt während seiner ganzen Bewegung das Impulsmoment in Bezug auf diesen Punkt seiner Stellung im Raume, seiner Gröſse und seinem Sinne nach konstant.

Bezeichnet man die konstanten Werte der lebendigen Kraft und der Komponenten des Impulsmomentes beziehlich mit $h$, $G_1$, $G_2$, $G_3$ und drückt überdies die lebendige Kraft und die Komponenten des Impulsmomentes durch die Koordinaten $p$, $q$, $r$ des instantanen Drehpols aus, diese Koordinaten bezogen auf das bewegliche, das heiſst, mit dem starren Körper fest verbundene System, so nehmen die Gleichungen des Prinzips der lebendigen Kraft und der Flächen die Form an[1])

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h \tag{1}$$

und

$$\begin{cases} Apa_1 + Bqb_1 + Crc_1 = G_1 \\ Apa_2 + Bqb_2 + Crc_2 = G_2 \\ Apa_3 + Bqb_3 + Crc_3 = G_3, \end{cases} \tag{2}$$

wo die vier Gröſsen $h$, $G_1$, $G_2$, $G_3$ Integrationskonstanten sind, welche die soeben angegebene Bedeutung haben. Andererseits sind die Gröſsen $A$, $B$, $C$ die drei Hauptträgheitsmomente des Körpers in Bezug auf den Punkt $O$ und besitzen also die Werte

$$\begin{cases} A = \sum_1^n {}_i\, m_i(y_i^2 + z_i^2) \\ B = \sum_1^n {}_i\, m_i(z_i^2 + x_i^2) \\ C = \sum_1^n {}_i\, m_i(x_i^2 + y_i^2), \end{cases} \tag{3}$$

unter $m_i$ die Masse und unter $x_i$, $y_i$, $z_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, die Koordinaten eines beliebigen materiellen Punktes des starren Körpers in Bezug auf das bewegliche System verstanden, während die neun Gröſsen $a_k$, $b_k$, $c_k$, $k = 1, 2, 3$ die Richtungscosinusse der $x$, $y$, $z$-Axe des beweglichen Systems gegen die Axen 1, 2, 3 des festen Systems sind und somit den Gleichungen genügen

1) Vgl. z. B. Rausenberger, Lehrbuch der analytischen Mechanik. Leipzig, 1888. Bd. II, S. 69 ff.

$$(4)\quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad (5)\quad \begin{cases} b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0. \end{cases}$$

Endlich ist die linke Seite der Gleichung (1), das heifst, die Summe

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

der Ausdruck für die doppelte lebendige Kraft des Körpers und die linken Seiten der Gleichungen (2), das heifst, die drei Summen

$$Ap\, a_k + Bq\, b_k + Cr\, c_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

die Komponenten seines Impulsmomentes in Bezug auf das feste System.

Die vier Gleichungen (1) und (2) enthalten daher in der That den Satz:

Dreht sich ein starrer Körper ohne Einwirkung äufserer Kräfte um einen festen Punkt, so bleibt während der ganzen Bewegung sowohl seine lebendige Kraft wie sein Impulsmoment in Bezug auf den Drehpunkt unverändert, und zwar das letztere seiner Stellung im Raume, seiner Gröfse und seinem Sinne nach.

Für die weitere Untersuchung werden sich die Gröfsenbeziehungen, die zwischen den sieben Konstanten $A$, $B$, $C$, $G_1$, $G_2$, $G_3$ und $h$ obwalten, als besonders wichtig erweisen. Zunächst möge über dieselben wenigstens so viel bemerkt werden, dafs die vier Gröfsen $A$, $B$, $C$ und $h$ ihrer Natur nach positiv sind, denn die Gröfsen $A$, $B$, $C$ sind die Hauptträgheitsmomente des Körpers in Bezug auf den Punkt $O$, und $h$ ist der konstante Wert seiner lebendigen Kraft. Hinsichtlich der Gröfsenfolge der drei Hauptträgheitsmomente $A$, $B$, $C$ ferner möge vorausgesetzt werden, dafs

$$(6)\qquad A < B < C$$

sei.[1])

Neben dieser Ungleichung (6) besteht dann aber, wie aus den Gleichungen (3) hervorgeht, zwischen den drei Gröfsen $A$, $B$, $C$ noch eine andere wichtige Ungleichung. Aus den beiden ersten Gleichungen (3)

---

1) Der Fall, wo zwei von den Hauptträgheitsmomenten einander gleich sind, ist einer einfacheren Behandlung fähig und möge hier von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben. Ein kurzer Hinweis auf diesen Fall findet sich auf S. 374 f.

folgt nämlich durch Addition und unter Berücksichtigung der dritten Gleichung die Beziehung

$$A + B = C + 2\sum_{1}^{n} {}_i\, m_i z_i^2,$$

welche zeigt, dafs

$$(7) \qquad A + B \geqq C$$

sein mufs. Selbstverständlich gelten auch die beiden zyklisch entsprechenden Ungleichungen. Doch bieten sie weniger Interesse, da sie bereits eine Folge der Ungleichung (6) sind.

## Zweiter Abschnitt.

### Die Polhodiekurve.

Für die Beantwortung der Frage nach der Beschaffenheit der Polwege liefert schon die Gleichung (1) einen wichtigen Beitrag. Denn sie ist eine Gleichung zweiten Grades zwischen den Koordinaten $p, q, r$ des Drehpols in Bezug auf das in Bewegung begriffene System; und da sie neben dem konstanten Gliede $2h$ nur Glieder enthält, die in $p, q, r$ quadratisch sind, und überdies die vier Gröfsen $A, B, C$ und $h$ sämtlich positiv sind, so stellt sie ein Ellipsoid dar, das mit dem starren Körper fest verbunden ist, und dessen Hauptaxen mit den Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Punkt $O$ zusammenfallen. Dieses Ellipsoid ist aufserdem, wie der Vergleich seiner Gleichung

$$(1) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

mit der Gleichung des Trägheitsellipsoides für den Punkt $O$:

$$(8) \qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$$

zeigt, mit diesem Trägheitsellipsoide nicht nur koaxial, sondern auch ähnlich und möge, mit Rücksicht auf die Entstehung seiner Gleichung, das Ellipsoid der lebendigen Kraft genannt werden. Da die Koordinaten $p, q, r$ des Drehpols in Bezug auf das bewegliche System die Gleichung (1) des Ellipsoids der lebendigen Kraft befriedigen, so bildet dieses Ellipsoid einen geometrischen Ort für den Polweg, den der Drehpol in dem starren Körper beschreibt, das heifst, *einen geometrischen Ort für die Polhodiekurve.*

*Einen zweiten geometrischen Ort für diese Kurve* liefern die drei Gleichungen (2) des Prinzips der Flächen. Freilich enthalten diese drei Gleichungen in den neun Richtungscosinus $a_k, b_k, c_k,\ k = 1, 2, 3$ noch eine Beziehung auf das im Raume festliegende Koordinatensystem,

welche in der Gleichung der gesuchten Fläche nicht vorkommen darf. Man eliminiere daher diese neun Cosinus, indem man die drei Gleichungen des Prinzips der Flächen quadriert und die entstehenden Gleichungen unter Berücksichtigung der Gleichungen (4) und (5) addiert. Auf diese Weise erhält man die Gleichung

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2, \tag{9}$$

wobei zur Abkürzung

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = G^2 \tag{10}$$

gesetzt ist, und wo also $G$ die Gröſse der doppelten Flächengeschwindigkeit des Körpers oder, was dasselbe ist, die Gröſse seines Impulsmomentes bedeutet. Nun stellt aber die Gleichung (9) wiederum ein mit dem starren Körper fest verbundenes Ellipsoid dar, und zwar ein Ellipsoid, das dem Ellipsoid der lebendigen Kraft koaxial ist; wir wollen es als das Ellipsoid der Flächen bezeichnen. Beide Ellipsoide schneiden sich in einer Raumkurve vierter Ordnung der ersten Art; und diese Kurve muſs mit Rücksicht auf die mechanische Bedeutung der Polhodie *stets reell* sein und besteht, da die beiden Ellipsoide koaxial sind, aus zwei kongruenten Zweigen, von denen aber zufolge der obigen Festsetzung über die Konstruktion des Drehpols *nur derjenige Zweig die Polhodiekurve bildet,* für welchen die Drehung des Körpers um den von $O$ ausgehenden Leitstrahl der Kurve *in positivem Sinne* erfolgt (vgl. S. 331).

Die Gleichung des *Polhodiekegels* erhält man, wenn man aus den Gleichungen der Ellipsoide der lebendigen Kraft und der Flächen, deren partieller Schnitt die Polhodiekurve ist, das heiſst, aus den Gleichungen

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h \tag{1}$$

und

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2 \tag{9}$$

durch lineare Verknüpfung eine *in $p$, $q$, $r$ homogene Gleichung* ableitet, etwa indem man diese Gleichungen beziehlich mit den Faktoren $\frac{G^2}{2h}$ und $-1$ multipliziert und dann addiert, wodurch sich ergiebt

$$A\left(\frac{G^2}{2h} - A\right)p^2 + B\left(\frac{G^2}{2h} - B\right)q^2 + C\left(\frac{G^2}{2h} - C\right)r^2 = 0. \tag{11}$$

Diese Gleichung stellt in der That eine Kegelfläche dar, deren Scheitel in $O$ liegt, und diese Kegelfläche geht überdies, mit Rücksicht auf die Entstehung ihrer Gleichung, durch die Schnittkurve der beiden Ellip-

soide (1) und (9) hindurch. Die Gleichung (11) ist also wirklich die gesuchte Gleichung des Polhodiekegels und liefert, da sie vom zweiten Grade ist, den Satz:

Bei der kraftfreien Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ist der Polhodiekegel ein *Kegel zweiter Ordnung.*

Beachtet man noch, dafs der Polhodiekegel ebenso wie die Polhodiekurve notwendig reell sein mufs, so kann man aus der Gleichung (11) eine wichtige Folgerung über die Gröfse des Verhältnisses $\frac{G^2}{2h}$ der rechten Seiten der Gleichungen (9) und (1) herleiten. Damit nämlich die Gleichung (11) einen reellen Kegel darstelle, dürfen nicht alle ihre Koeffizienten dasselbe Vorzeichen haben, woraus mit Rücksicht auf (6) folgt, dafs

$$A \leqq \frac{G^2}{2h} \leqq C \tag{12}$$

sein mufs. Man erhält also den Satz:

Bei der Drehung des kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt liegt das Verhältnis des Quadrats seines Impulsmomentes zu seiner doppelten lebendigen Kraft zwischen seinem gröfsten und kleinsten Trägheitsmoment in Bezug auf den Drehpunkt.

## Dritter Abschnitt.

## Die Herpolhodiekurve.

Um andererseits die Herpolhodiekurve, das heifst, denjenigen Polweg zu bestimmen, der seine Lage im Raum unverändert beibehält, wird man naturgemäfs Gleichungen heranzuziehen haben, welche eine Beziehung auf das feste Koordinatensystem enthalten. Solche Gleichungen sind aber die drei Gleichungen des Prinzips der Flächen

$$\begin{cases} G_1 = Apa_1 + Bqb_1 + Crc_1 \\ G_2 = Apa_2 + Bqb_2 + Crc_2 \\ G_3 = Apa_3 + Bqb_3 + Crc_3, \end{cases} \tag{2}$$

in denen die Gröfsen $p$, $q$, $r$ die Koordinaten des instantanen Drehpols in Bezug auf das bewegliche System bezeichnen. Für die geometrische Deutung dieser Gleichungen ist es beachtenswert, dafs sie ihrer Form nach genau mit den Gleichungen

$$\begin{cases} x_1 = xa_1 + yb_1 + zc_1 \\ x_2 = xa_2 + yb_2 + zc_2 \\ x_3 = xa_3 + yb_3 + zc_3 \end{cases} \tag{13}$$

übereinstimmen, mittelst deren sich die Koordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ eines Punktes im festen Koordinatensystem durch die Koordinaten $x$, $y$, $z$ desselben Punktes im beweglichen System ausdrücken. Den Koordinaten

$$x, \quad y, \quad z$$

in Bezug auf das bewegliche System entsprechen dabei in den Gleichungen (2) die Gröſsen

$$Ap, \quad Bq, \quad Cr,$$

während die Koordinaten

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

in Bezug auf das feste System durch die konstanten Komponenten

$$G_1, \quad G_2, \quad G_3$$

des Impulsmomentes vertreten werden. Die Gleichungen (2) zeigen daher, daſs der Punkt $I$ des beweglichen Systems, der in diesem die veränderlichen Koordinaten

$$Ap, \quad Bq, \quad Cr$$

besitzt, im festen System die konstanten Koordinaten

$$G_1, \quad G_2, \quad G_3$$

hat, also absolut fest im Raume ist und die konstanten Komponenten des Impulsmomentes zu Koordinaten hat. Der Punkt $I$ liegt somit auf dem *Lote*, das man auf der Ebene des Impulsmomentes im Drehpunkte des Körpers errichten kann; wir wollen es die Impulsaxe des Körpers nennen. Andererseits ist der *Abstand* des Punktes $I$ vom Drehpunkte mit Rücksicht auf (10) nichts anderes als die konstante Impulsstärke $G$ des Körpers. Und endlich ist der *Sinn der Strecke* $OI$ von der Art, daſs für einen diese Strecke entlang blickenden Beschauer das Moment eine Drehung in positivem Sinne hervorzurufen strebt (vgl. S. 331). Der Punkt $I$ charakterisiert also durch seine Lage die Stellung, die Gröſse und den Sinn des Impulsmomentes vollständig und möge daher als der Impulspol der Bewegung bezeichnet werden. Ferner möge die Strecke $OI$, von dem Drehpunkte $O$ des Körpers nach dem Impulspole $I$ der Bewegung gezogen, die Strecke des Impulsmomentes heiſsen. Ihre Richtungscosinus gegen das feste System besitzen die Werte

$$\cos\alpha_1 = \frac{G_1}{G}, \qquad \cos\alpha_2 = \frac{G_2}{G}, \qquad \cos\alpha_3 = \frac{G_3}{G}. \tag{14}$$

Der Strecke $OI$ des Impulsmomentes kommt nun aber auch *eine wichtige Bedeutung für das bewegliche System zu.* Die Koordinaten

$Ap$, $Bq$, $Cr$ ihres Endpunktes, des Impulspoles $I$, in Bezug auf das bewegliche System treten nämlich zugleich als Koeffizienten in der Gleichung der Tangentialebene auf, die sich im instantanen Drehpol $p$, $q$, $r$ des Körpers an das Ellipsoid der lebendigen Kraft legen läſst, denn diese Gleichung lautet:

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = 2h, \tag{15}$$

worin liegt, daſs die Strecke $OI$ des Impulsmomentes in die Linie des Lotes fällt, das man vom Drehpunkte $O$ des Körpers auf diese Tangentialebene herablassen kann. Da aber andererseits die Strecke $OI$ des Impulsmomentes während der ganzen Bewegung des Körpers im Raume fest bleibt, so muſs auch diese Tangentialebene, wenigstens ihre *Stellung im Raume* beibehalten. Sie kann aber auch ihren *Abstand* vom Drehpunkte $O$ nicht verändern; denn aus der Gleichung (15) ergiebt sich für diesen Abstand der Ausdruck

$$\delta = \frac{2h}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}},$$

und dieser reduziert sich wegen der Gleichung (9) auf

$$\delta = \frac{2h}{G}, \tag{16}$$

ist also wirklich konstant.

Die Tangentialebene des Ellipsoids der lebendigen Kraft, konstruiert im Drehpole des Körpers, hat somit nicht nur eine konstante Stellung gegen das feste Koordinatensystem, sondern sie liegt überhaupt im Raume fest und möge daher als die invariable Ebene bezeichnet werden.

Ihre Lage ist fixiert durch die Gleichung (16) für ihren Abstand $\delta$ vom Anfangspunkte und durch die Gleichungen (14), welche die Richtungscosinus ihrer Normale gegen das feste System angeben.

Nun dreht sich, wie wir gesehen haben, der starre Körper und mit ihm das Ellipsoid der lebendigen Kraft in jedem Augenblicke um den Leitstrahl des instantanen Drehpols, das heiſst nach dem Obigen, um den Berührungsradius der invariablen Ebene. Und da dieser Berührungsradius, sofern er nicht gerade mit einer der drei Hauptaxen des Ellipsoids zusammenfällt, nicht auf der zugehörigen Tangentialebene senkrecht stehen kann, so tritt durch die Drehung des Ellipsoids um seinen Berührungsradius in jedem Augenblick ein neuer Ellipsoidpunkt mit der invariablen Ebene in Berührung, und der neue Berührungsradius ist dann immer für den folgenden Augenblick wieder die instantane Drehaxe des Körpers. Hieraus folgt:

Bei der Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt wälzt sich das Ellipsoid der lebendigen Kraft, das seinen Mittelpunkt dauernd in dem festen Drehpunkt des Körpers hat, ohne zu gleiten, auf der invariablen Ebene fort.

Dieser Satz liefert zugleich eine anschauliche geometrische Erzeugung der Herpolhodiekurve. Denn da die Herpolhodie als die Kurve definiert war, welche der Drehpol des Körpers in dem festen System durchläuft, und dieser Drehpol in jedem Augenblick durch den Berührungspunkt der invariablen Ebene mit dem Ellipsoid der lebendigen Kraft dargestellt wird, so ist die Herpolhodiekurve der geometrische Ort aller Berührungspunkte, die das Ellipsoid der lebendigen Kraft bei seinem Abrollen auf der invariablen Ebene ergiebt, womit insbesondere der Satz bewiesen ist:

Bei der Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt ist die Herpolhodie eine ebene Kurve.

## Vierter Abschnitt.

### Das Büschel der Polhodiekegel. Die drei zerfallenden Kegel.

Denkt man sich in der Gleichung des Polhodiekegels

$$(11)\qquad A\left(\frac{G^2}{2h}-A\right)p^2+B\left(\frac{G^2}{2h}-B\right)q^2+C\left(\frac{G^2}{2h}-C\right)r^2=0,$$

die man auch in der Form schreiben kann

$$(17)\qquad \frac{G^2}{2h}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)=0,$$

das Verhältnis $\frac{G^2}{2h}$ veränderlich, so stellt sie ein ganzes Büschel von Kegeln zweiter Ordnung dar. Die Kegel dieses Büschels sind, wie die Gleichungsform (11) zeigt, sämtlich koaxial, und zwar fallen ihre Hauptaxen mit den Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Punkt $O$ zusammen.

Andererseits aber haben die Kegel des Büschels, wie man aus der Gleichungsform (17) entnimmt, aufser ihrem Scheitel $O$ keinen reellen Punkt mit einander gemein. Da nämlich jeder gemeinsame Punkt *irgend zweier* Flächen eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung *sämtlichen* Flächen des Büschels angehört, und nach der Gleichung (17) in dem Kegelbüschel auch die beiden imaginären Kegel enthalten sind, deren Gleichungen lauten

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=0,\quad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=0,$$

und welche aufser ihrem gemeinsamen Scheitel $O$ überhaupt keinen reellen Punkt darbieten, so können auch die reellen Kegel des Büschels aufser dem Punkte $O$ keinen reellen Punkt mit einander gemein haben.

Endlich geht durch jeden Punkt des Raumes *eine* und mit alleiniger Ausnahme des gemeinsamen Scheitels aller Kegelflächen *auch nur eine* Kegelfläche des Büschels hindurch. Denn, ist nicht gerade $p = q = r = 0$, so bestimmt die Gleichung (17) bei gegebenem $p, q, r$ eindeutig den Parameter $\frac{G^2}{2h}$ der durch den Punkt $p, q, r$ gehenden Fläche des Büschels.

Man hat also den Satz:

Sämtliche Polhodiekegel, welche einem gegebenen Drehpunkte $O$ eines starren Körpers zugehören, bilden ein Büschel von koaxialen Kegeln zweiter Ordnung, deren Hauptaxen mit den Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Punkt $O$ zusammenfallen, und welche aufser ihrem Scheitel $O$ keinen reellen Punkt mit einander gemein haben. Dabei geht durch jeden Punkt des Raumes mit Ausnahme des Punktes $O$ nur eine aber auch stets eine Kegelfläche des Büschels hindurch.

Wie jedes Büschel von konzentrischen Kegelflächen zweiter Ordnung enthält auch das Büschel der Polhodiekegel drei in ein Ebenenpaar zerfallende Kegel zweiter Ordnung. Die Gleichungen dieser drei Ebenenpaare erhält man, wenn man über den Parameter des Büschels, das heifst, über das Verhältnis $\frac{G^2}{2h}$, nach einander in der Weise verfügt, dafs immer eine von den drei in der Gleichung (11) auftretenden Differenzen verschwindet. Man hat somit dieses Verhältnis der Reihe nach den drei Hauptträgheitsmomenten gleich zu machen, also nach einander zu setzen:

$$(18)\quad \frac{G^2}{2h} = A, \qquad (19)\quad \frac{G^2}{2h} = B, \qquad (20)\quad \frac{G^2}{2h} = C,$$

wodurch die Gleichung (11) des Polhodiekegels in die Gleichungen übergeht:

$$B(A - B)q^2 + C(A - C)r^2 = 0$$
$$A(B - A)p^2 + C(B - C)r^2 = 0$$
$$A(C - A)p^2 + B(C - B)q^2 = 0.$$

Von den drei Ebenenpaaren, welche durch diese drei Gleichungen dargestellt werden, ist allerdings *nur eins reell.* Schreibt man nämlich unter Berücksichtigung der Ungleichungen (6) die Gleichungen der

drei Ebenenpaare in der Weise, dafs in den Klammern nur positive Differenzen auftreten, wodurch die Gleichungen die Form annehmen

$$(21) \qquad B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = 0$$

$$(22) \qquad A(B-A)p^2 - C(C-B)r^2 = 0$$

$$(23) \qquad A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2 = 0,$$

so sieht man in der That, dafs das erste und dritte Ebenenpaar imaginär ist, und dafs bei jedem von ihnen *nur seine Doppellinie reell ist.* Bei dem Ebenenpaar (21) wird diese Doppellinie durch die Gleichungen

$$(24) \qquad q^2 = 0 \quad \text{und} \quad r^2 = 0$$

dargestellt und fällt also mit der Axe des kleinsten Trägheitsmoments $A$, das heifst, mit der gröfsten Axe des Trägheitsellipsoids und des Ellipsoids der lebendigen Kraft zusammen. Bei dem Ebenenpaar (23) lauten die Gleichungen der Doppellinie

$$(25) \qquad p^2 = 0 \quad \text{und} \quad q^2 = 0;$$

die Doppellinie ist daher in diesem Falle die Axe des gröfsten Trägheitsmoments, das heifst, die kleinste Axe des Trägheitsellipsoids und des Ellipsoids der lebendigen Kraft.

Man kann dies auch so ausdrücken: *In den beiden Fällen (21) und (23) eines imaginären Ebenenpaares ist der Polhodiekegel in eine gerade Linie zusammengeschrumpft;* die instantane Axe behält also ihre Lage in dem starren Körper bei. Da sich ferner in diesen beiden Fällen dann auch die Polhodiekurve in einen Punkt, nämlich in einen Endpunkt der gröfsten oder kleinsten Axe des Ellipsoids der lebendigen Kraft zusammengezogen hat, und somit gerade der oben ausgeschlossene Ausnahmefall eintritt, wo der Berührungsradius der invariablen Ebene, um den die Rotation erfolgt, auf dieser Ebene senkrecht steht, so kann durch die Drehung auch kein neuer Punkt der invariablen Ebene mit einem solchen des Ellipsoids der lebendigen Kraft in Berührung treten. Der Berührungspunkt dieser Ebene, das heifst, der Drehpol des Körpers, bleibt also auch im Raume fest, und *die Herpolhodiekurve ist somit ebenso wie die Polhodiekurve in einen Punkt, der Herpolhodiekegel ebenso wie der Polhodiekegel in eine gerade Linie zusammengeschrumpft.* Dabei wird die gerade Linie, welche den Herpolhodiekegel vertritt, durch das Lot gebildet, das man vom Drehpunkte des Körpers auf die invariable Ebene fällen kann, während der Fufspunkt dieses Lotes die Herpolhodiekurve ersetzt.

Hieraus folgt bereits, dafs der Abstand $\delta$ der Herpolhodieebene von dem Drehpunkte $O$ des Körpers in diesen beiden Fällen gleich der gröfsten oder kleinsten Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft sein wird. Dies zeigt man aber auch leicht analytisch. Nach dem Obigen entsprechen den geraden Linien (24) und (25) diejenigen Werte der Impulsstärke $G$, welche den beiden Gleichungen

$$(18) \quad \frac{G^2}{2h} = A \quad \text{und} \quad (20) \quad \frac{G^2}{2h} = C$$

Genüge leisten. Bezeichnet man daher die Halbaxen des Ellipsoids der lebendigen Kraft, das durch die Gleichung

$$(1) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

dargestellt wurde, mit $a$, $b$, $c$, setzt also

$$(26) \qquad a = \sqrt{\frac{2h}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{2h}{B}}, \quad c = \sqrt{\frac{2h}{C}},$$

oder, was dasselbe ist,

$$(27) \qquad A = \frac{2h}{a^2}, \quad B = \frac{2h}{b^2}, \quad C = \frac{2h}{c^2},$$

so verwandeln sich die Gleichungen (18) und (20) in:

$$\frac{G^2}{2h} = \frac{2h}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{G^2}{2h} = \frac{2h}{c^2}$$

oder in:

$$\frac{2h}{G} = a \quad \text{und} \quad \frac{2h}{G} = c$$

oder endlich mit Rücksicht auf (16) in:

$$(28) \quad \delta = a \quad \text{und} \quad (29) \quad \delta = c,$$

woraus in der That hervorgeht, dafs für die beiden extremen Werte des Verhältnisses $\frac{G^2}{2h}$ das Ellipsoid der lebendigen Kraft mit einem Endpunkte seiner gröfsten oder kleinsten Axe die invariable Ebene berührt, dafs also das Ellipsoid um seine in diesem Falle im Raume fest liegende gröfste oder kleinste Axe und zwar mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert.

Man pflegt dies so auszudrücken: Die Axen des gröfsten und kleinsten Hauptträgheitsmoments sind zwei „permanente“ („natürliche“, „freie“) Drehaxen des Körpers. Das soll heifsen: Wenn der Körper in irgend einem Augenblick um eine dieser beiden Axen rotiert, so setzt er die Rotationsbewegung um diese Drehaxe, die dann sowohl im Körper wie im Raume fest bleibt, mit konstanter

Winkelgeschwindigkeit fort, so lange nicht eine äuſsere Kraft störend auf ihn einwirkt, so lange also der Körper wirklich kraftfrei bleibt.

Nach Ausscheidung dieser beiden Fälle eines imaginären Ebenenpaares bleibt von den drei Fällen (18), (19), (20) noch der Fall übrig, wo

$$\frac{G^2}{2h} = B \tag{19}$$

ist, wo also wegen (27) und (16)

$$\delta = b \tag{30}$$

ist, das heiſst, wo der Abstand $\delta$ des Drehpunktes $O$ von der invariablen Ebene gleich der mittleren Halbaxe $b$ des Ellipsoids der lebendigen Kraft ist. Hier wird der Polhodiekegel durch die Gleichung (22) dargestellt, die man auch in der Form schreiben kann

$$\frac{r}{p} = \pm \sqrt{\frac{A(B-A)}{C(C-B)}}. \tag{31}$$

Der Polhodiekegel ist also in ein reelles Ebenenpaar ausgeartet, dessen Ebenen durch die mittlere Axe des Ellipsoids der lebendigen Kraft hindurchgehen und mit der gröſsten Axe des Ellipsoids, das heiſst, mit der $x$-Axe, zwei entgegengesetzt gleiche Neigungswinkel $\lambda$ einschlieſsen, die sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \lambda = \pm \sqrt{\frac{A(B-A)}{C(C-B)}} \tag{32}$$

bestimmen.

## Fünfter Abschnitt.

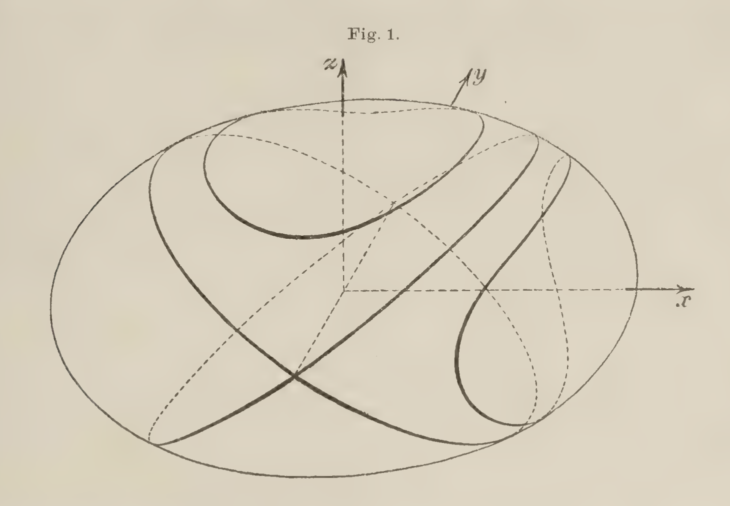
## Das System der Polhodiekurven.

### a) Das System von Polhodiekurven, das einem konstanten Werte der lebendigen Kraft zugehört.

Wir gehen nunmehr zu der Betrachtung aller Polhodiekurven über, welche einem gegebenen starren Körper in Bezug auf einen gegebenen festen Punkt zugehören. Wir wissen bereits (vgl. S. 336), daſs jede von diesen Polhodiekurven einen Zweig einer Raumkurve vierter Ordnung der ersten Art bildet, welche durch die beiden Gleichnngen (1) und (9) oder, wenn man will, durch die Gleichungen (1) und (11) dargestellt wird. Hält man in diesen Gleichungen einstweilen den Wert der lebendigen Kraft $h$ konstant und läſst nur die Stärke $G$ des Impulsmomentes variieren, so bekommt man ein *Büschel von Raumkurven vierter Ordnung der ersten Art*, nämlich die Gesamt-

heit derjenigen Raumkurven, die aus dem Ellipsoide der lebendigen Kraft mit dem Parameter $h$ durch das soeben betrachtete und durch die Gleichung (11) (oder (17)) dargestellte Büschel von Polhodiekegeln

Fig. 1.




ausgeschnitten werden.[1]) Und die einzelnen Zweige dieses Büschels von Raumkurven bilden dann eben dasjenige System von Polhodiekurven, das dem Werte $h$ der lebendigen Kraft zugehört (vgl. Fig. 1).

## $\alpha$) Die drei Grenzfälle, insbesondere der Fall der trennenden Polhodie.

In diesem System von Polhodiekurven sind wiederum *diejenigen drei Kurven ausgezeichnet, die den drei in ein Ebenenpaar zerfallenden Kegeln zweiter Ordnung entsprechen.* Den beiden imaginären Ebenenpaaren ist, wie schon oben erwähnt, je eine Polhodiekurve zugeordnet, die in einen Punkt zusammengeschrumpft ist und je einen Endpunkt der gröſsten oder kleinsten Axe des Ellipsoids der lebendigen Kraft bildet. Dem reellen Ebenenpaar dagegen entsprechen zwei von der $y$-Axe begrenzte Halbellipsen, die den beiden Ellipsen angehören, welche durch die Ebenen (31) aus dem Ellipsoide ausgeschnitten werden. Diese beiden Ellipsen trennen die Polhodiekurven, welche die $x$-Axe umschlieſsen, von denen, welche die $z$-Axe umschlieſsen: die zugehörige Polhodiekurve möge daher als „trennende Polhodie“

1) Wir verstehen dabei allgemein unter einem *Büschel von Raumkurven vierter Ordnung der ersten Art* das einfach unendliche System von Raumkurven, welches durch ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung aus einer diesem Büschel nicht angehörenden Fläche zweiter Ordnung ausgeschnitten wird.

bezeichnet werden.[1]) Die Neigungswinkel $\lambda$ ihrer beiden Ebenen gegen die $xy$-Ebene stehen übrigens zu den Neigungswinkeln $\mu$ der Kreisschnitte des Ellipsoids gegen die $xy$-Ebene in einer engen Beziehung.[2]) Führt man nämlich in Gleichung (32) an Stelle von $A$, $B$, $C$ ihre Werte aus (27) ein, so nimmt die Gleichung (32) die Form an

$$\text{(33)} \qquad \operatorname{tg} \lambda = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}}.$$

Andererseits folgt aus der Gleichung der beiden „Hauptkreisschnitte des Ellipsoids“, welche lautet[3])

$$\text{(34)} \qquad \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 = 0,$$

für die Neigungswinkel $\mu$ der Kreisschnitte gegen die $xy$-Ebene die Gleichung

$$\text{(35)} \qquad \operatorname{tg} \mu = \frac{z}{x} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}}.$$

Die Winkel $\lambda$ und $\mu$ befriedigen also die Proportion

$$\text{(36)} \qquad \operatorname{tg} \lambda : \operatorname{tg} \mu = c : a,$$

und diese gestattet eine einfache geometrische Deutung. Man denke sich nämlich in der $xz$-Ebene, der die Winkel $\lambda$ und $\mu$ angehören, die Ellipse

$$\text{(37)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gezeichnet, welche diese Ebene aus dem Ellipsoid der lebendigen Kraft ausschneidet (vgl. Fig. 2), trage innerhalb ihrer Ebene an die $x$-Axe die Winkel $\lambda$ und $\mu$ an und bringe den freien Schenkel des Winkels $\lambda$ zum Schnitt mit der Ellipse in $T$, fälle von $T$ das Lot $TQ$ auf die $x$-Axe und verlängere es über $T$ hinaus bis zum Schnitt mit dem freien Schenkel des Winkels $\mu$ in $U$. Dann verhält sich

$$\operatorname{tg} \lambda : \operatorname{tg} \mu = QT : QU,$$

---

1) Vgl. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, deutsch von Schepp. Leipzig, 1898. Bd. II, S. 107.

2) Vgl. die oben zitierte Dissertation von Hefs. S. 8.

3) Siehe zum Beispiel: Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. Teil I. Vierte Auflage. Leipzig, 1898. S. 130 f.

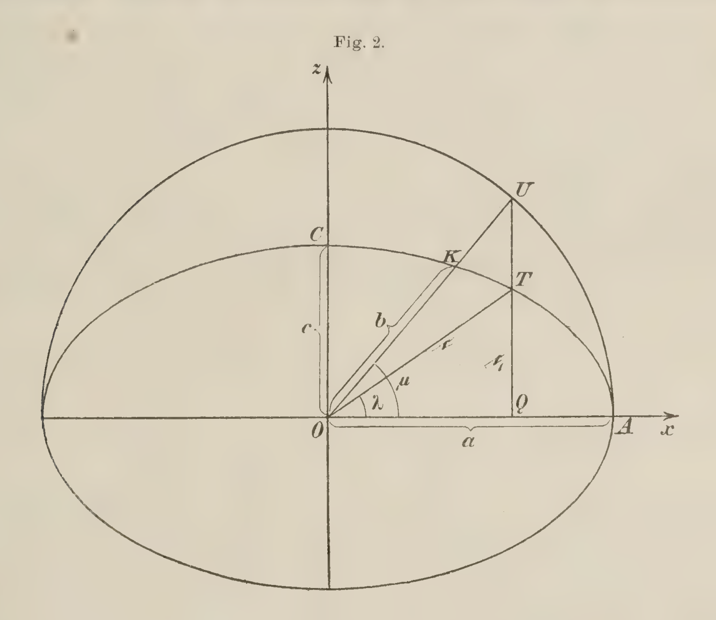
und wegen (36) besteht daher die Proportion

$$QT : QU = c : a,$$

welche zeigt, dafs der Punkt $U$ auf dem Kreise liegt, der die gezeichnete Ellipse in den Endpunkten ihrer grofsen Axe berührt. Man hat also den Satz:

Verzeichnet man in der Ebene der gröfsten und kleinsten Axe des Ellipsoids der lebendigen Kraft aufser der Ellipse, die diese Ebene aus dem Ellipsoide ausschneidet, die Spuren der beiden Hauptkreisschnitte des Ellipsoids, so

Fig. 2.




sind die beiden Winkel, welche diese Spuren mit der grofsen Axe der Ellipse einschliefsen, die exzentrischen Anomalieen der Punkte, in denen die Ellipse von der trennenden Polhodie getroffen wird.

Dieser Satz ergiebt dann für die grofse Halbaxe der trennenden Polhodie die folgende Konstruktion:

Man schlage um den Mittelpunkt $O$ der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{37}$$

welche durch die $xz$-Ebene aus dem Ellipsoide der lebendigen Kraft ausgeschnitten wird, innerhalb ihrer Ebene mit dem Radius der Hauptkreisschnitte des Ellipsoids, dafs heifst, mit seiner mittleren Halbaxe $b$,

den Kreis und verbinde den Mittelpunkt $O$ der Ellipse mit einem von ihren vier Schnittpunkten mit jenem Kreise, er heiſse $K$; verlängere die Linie $OK$, bis sie gleich der groſsen Halbaxe $a$ der Ellipse wird, bis $U$, und fälle von $U$ das Lot auf die $x$-Axe, das die Ellipse in $T$ schneiden mag, so ist das Stück $OT = \mathfrak{c}$ seiner Gröſse und Lage nach die halbe groſse Axe der trennenden Polhodie, während die halbe kleine Axe nach Gröſse und Lage mit der mittleren Halbaxe ($b$) des Ellipsoids der lebendigen Kraft zusammenfällt.

Daſs wirklich die in der $xz$-Ebene liegende Halbaxe $OT$ der trennenden Polhodie gröſser ist als die in der $y$-Axe liegende Halbaxe $b$, folgt daraus, daſs der zu dem Leitstrahl $OT$ der Ellipse (37) gehörende Polarwinkel $\lambda$ stets kleiner ist als der zu dem Leitstrahl $OK = b$ gehörende Polarwinkel $\mu$, so lange nicht $b = a$ oder $b = c$ wird; diese beiden Fälle aber sind durch die Ungleichungen (6) von der Betrachtung ausgeschlossen.

Natürlich kann man die Länge $\mathfrak{c}$ der halben groſsen Axe $OT$ der trennenden Polhodie auch leicht durch Rechnung finden. Dem Obigen zufolge ist die trennende Polhodie eine Hälfte der zerfallenden Raumkurve vierter Ordnung, die aus dem Ellipsoide der lebendigen Kraft

$$(1) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h$$

durch das Ebenenpaar

$$(22) \qquad A(B-A)p^2 - C(C-B)r^2 = 0$$

ausgeschnitten wird (vgl. Fig. 1). Um nun aber über die Halbaxenlängen der beiden Ellipsen, in welche diese Kurve zerfällt, Aufschluſs zu erhalten, stelle man zunächst die Gleichung desjenigen Cylinders auf, der durch die Kurve hindurchgeht, und dessen Erzeugende der $x$-Axe parallel laufen. Dazu eliminiere man aus den Gleichungen (1) und (22) die Gröſse $p$, indem man diese Gleichungen beziehlich mit den Faktoren $B - A$ und $-1$ multipliziert und dann addiert, wodurch sich die Gleichung ergiebt

$$(38) \qquad B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = 2h(B-A),$$

welche den in Rede stehenden Cylinder darstellt. Ihre Form zeigt, daſs der Cylinder elliptisch ist und die Halbaxen besitzt:

$$(39) \qquad \mathfrak{b}_1 = \sqrt{\frac{2h}{B}} = b, \qquad \mathfrak{c}_1 = \sqrt{\frac{2h(B-A)}{C(C-A)}}.$$

Diese Halbaxen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$ des elliptischen Cylinders sind dabei zugleich die Halbaxen derjenigen Ellipse, welche die Projektion der

beiden Polhodieellipsen auf die $yz$-Ebene bildet. Da aber die beiden Ebenen der trennenden Polhodie mit der $yz$-Ebene den Winkel $\frac{\pi}{2} - \lambda$ einschliefsen, so werden die Halbaxen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ der trennenden Polhodie

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 = b \tag{40}$$

und

$$\mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{c}_1}{\sin\lambda} = \sqrt{\frac{2h(B-A)}{C(C-A)}}\,\frac{1}{\sin\lambda}, \tag{41}$$

wobei $\lambda$ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\lambda = \pm\sqrt{\frac{A(B-A)}{C(C-B)}} \tag{32}$$

bestimmt ist. Es wird daher

$$\frac{1}{\sin\lambda} = \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\lambda}} = \sqrt{\frac{A(B-A) + C(C-B)}{A(B-A)}};$$

und bei Einführung dieses Wertes verwandelt sich die Gleichung (41) in:

$$\mathfrak{c} = \sqrt{\frac{2h}{CA}\,\frac{AB - A^2 + C^2 - CB}{C-A}}$$

oder, falls man die Division im zweiten Bruche ausführt, in:

$$\mathfrak{c} = \sqrt{2h\frac{C+A-B}{CA}}, \tag{42}$$

wofür man wegen (27) auch schreiben kann:

$$\mathfrak{c} = \sqrt{a^2 + c^2 - \frac{a^2c^2}{b^2}}. \tag{43}$$

Um endlich zu zeigen, dafs dieser Ausdruck gröfser als $\mathfrak{b}$ ist, bilde man die Differenz $\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}^2$. Es wird

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2c^2}{b^2} - b^2,$$

das heifst

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{b^2}. \tag{44}$$

Dieser Ausdruck aber ist sicher positiv; denn die Ungleichungen (6) ziehen wegen (27) die Ungleichungen nach sich

$$a > b > c. \tag{45}$$

Folglich ist wirklich

$$\mathfrak{c} > \mathfrak{b}. \tag{46}$$

### $\beta$) Die beiden Hauptfälle.

Nach Erledigung dieser drei Grenzfälle, in denen die Polhodiekurve in einen Punkt oder in zwei Halbellipsen ausgeartet ist, bleiben jetzt noch *die beiden Hauptfälle* zu behandeln, wo der Parameter $\frac{G^2}{2h}$ des Polhodiekegels *zwischen den beiden kleineren Hauptträgheitsmomenten $A$ und $B$* oder *zwischen den beiden gröfseren Hauptträgheitsmomenten $B$ und $C$* liegt, wo also eine von den beiden Ungleichungen befriedigt wird:

$$A < \frac{G^2}{2h} < B < C \tag{47}$$

und

$$A < B < \frac{G^2}{2h} < C, \tag{48}$$

oder was wegen (27) und (16) dasselbe ist, die beiden Fälle, wo zwischen dem Abstande $\delta$ des festen Punktes $O$ von der invariablen Ebene und den Halbaxen des Ellipsoids der lebendigen Kraft die Ungleichungen bestehen:

$$a > \delta > b > c \tag{49}$$

und

$$a > b > \delta > c. \tag{50}$$

Nun wurde die Polhodiekurve oben definiert als partieller Schnitt des Ellipsoids der lebendigen Kraft und des Ellipsoids der Flächen, nämlich als ein Zweig der Raumkurve vierter Ordnung, in der sich die beiden Ellipsoide schneiden, deren Gleichungen lauteten:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h \tag{1}$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2. \tag{9}$$

Fafst man in diesen Gleichungen für den Augenblick nicht nur wie bisher die lebendige Kraft $h$, sondern auch die Stärke $G$ des Impulsmomentes als fest gegeben auf, so erhält man *eine einzelne Kurve* des oben betrachteten Büschels von Raumkurven vierter Ordnung der ersten Art. Um über die Form und Lage dieser Raumkurve mit den festen Parameterwerten $h$ und $G$ Aufschlufs zu erhalten, benutze man die abwickelbaren Flächen zweiter Ordnung, auf denen die Raumkurve gelegen ist. Man erhält die Gleichungen aller Flächen des Büschels von Flächen zweiter Ordnung, welche durch die Raumkurve vierter Ordnung $h$, $G$ hindurchgehen, durch lineare Verknüpfung der Gleichungen (1) und (9). Wie jedes Büschel von Flächen zweiter Ordnung enthält nun dieses Büschel *vier* abwickelbare Flächen zweiter Ordnung.

*Eine* solche abwickelbare Fläche zweiter Ordnung ist der zu der Raumkurve $h, G$ und den beiden in ihr enthaltenen Polhodiekurven gehörige Polhodiekegel, dessen Gleichung (11) bereits oben aus den Gleichungen (1) und (9) durch lineare Verknüpfung abgeleitet wurde. Die *drei anderen* abwickelbaren Flächen des Büschels sind drei Cylinderflächen zweiter Ordnung, deren Betrachtung dazu dienen kann, eine genaue Anschauung von der Raumkurve vierter Ordnung $h, G$ zu vermitteln. Man findet die Gleichungen dieser drei Cylinderflächen zweiter Ordnung, wenn man aus den Gleichungen (1) und (9) der Reihe nach die drei Gröfsen $p$, $q$ und $r$ eliminiert, wodurch man die drei Gleichungen erhält

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = 2h\left(\frac{G^2}{2h} - A\right),$$

$$C(C-B)r^2 + A(A-B)p^2 = 2h\left(\frac{G^2}{2h} - B\right),$$

$$A(A-C)p^2 + B(B-C)q^2 = 2h\left(\frac{G^2}{2h} - C\right)\cdot$$

Diese Gleichungen schreibe man mit Rücksicht auf die Ungleichungen (47) und (48) in der Form

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = 2h\left(\frac{G^2}{2h} - A\right), \tag{51}$$

$$\begin{cases} A(B-A)p^2 - C(C-B)r^2 = 2h\left(B - \frac{G^2}{2h}\right), & \text{(52a)} \\ C(C-B)r^2 - A(B-A)p^2 = 2h\left(\frac{G^2}{2h} - B\right), & \text{(52b)} \end{cases}$$

$$A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2 = 2h\left(C - \frac{G^2}{2h}\right), \tag{53}$$

wo jetzt alle in den Klammern auftretenden Differenzen positiv sind, vorausgesetzt, dafs man von den beiden Gleichungsformen (52a) und (52b) die erstere Form (52a) wählt, in dem Falle, wo

$$\frac{G^2}{2h} < B, \quad \text{also} \quad \delta > b \tag{a}$$

ist, während man die zweite Form (52b) zu benutzen hat, wenn

$$\frac{G^2}{2h} > B, \quad \text{also} \quad \delta < b \tag{b}$$

ist. Hieraus folgt dann, dafs die beiden Cylinder (51) und (53) elliptisch sind, dafs dagegen der durch die Gleichung (52a) oder (52b) dargestellte Cylinder hyperbolisch ist und überdies die $x$- oder $z$-Axe schneidet, je nachdem die Ungleichungen (a) oder (b) gelten.

Natürlich kann man die Gleichungen (51) bis (53) auch als die Gleichungen dreier ebenen Kurven ansehen, nämlich als die Gleichungen für die Projektionen der Raumkurve $h$, $G$ auf die $yz$-, $zx$- und $xy$-Ebene. Bei dieser Auffassung sagen die Gleichungen aus, daſs die Projektionen der Raumkurve $h$, $G$ auf die $yz$- und $xy$-Ebene Ellipsen oder Stücke von Ellipsen sind, daſs aber ihre Projektion auf die $zx$-Ebene durch Stücke einer Hyperbel gebildet wird, deren reelle Axe, in dem Falle (a) mit der $x$-Axe, in dem Falle (b) mit der $z$-Axe zusammenfällt.

### $\gamma$) Die Projektionen des betrachteten Systems von Polhodiekurven auf die Hauptträgheitsebenen.

Nach dieser Orientierung über die verschiedenen Kurvenformen, welche bei den Polhodiekurven eines Körpers auftreten können, *kehren wir zur Untersuchung des ganzen Büschels von Raumkurven vierter Ordnung zurück, dessen Zweige die Polhodiekurven bilden.* Wir betrachten also wieder in den Gleichungen (1) und (9) und ebenso in den Gleichungen (51) bis (53) die Stärke $G$ des Impulsmomentes als veränderlich und nur noch die lebendige Kraft $h$ als konstant. Die Gleichungen (51) bis (53), welche die Projektionen der Raumkurven des Büschels auf die Koordinatenebenen darstellen, sind aber bei veränderlichem $G$ die Gleichungen dreier in den Koordinatenebenen liegender Kegelschnittbüschel. Und zwar sind die Gleichungen (51) und (53), welche den Projektionen auf die $yz$- und $xy$-Ebene zugehören, die Gleichungen je eines Büschels ähnlicher und koaxialer Ellipsen, deren Axen die in diesen Ebenen liegenden Hauptträgheitsaxen bilden; die Gleichung (52a) oder (52b) aber die Gleichung eines Büschels von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten.

Die *Gleichung dieses Asymptotenpaars*, welches das Hyperbelbüschel vollständig charakterisiert und selbst dem Büschel angehört, lautet

$$A(B-A)p^2 - C(C-B)r^2 = 0. \tag{54}$$

Sie stimmt also mit der Gleichung (22) überein, die sich uns oben für das Ebenenpaar ergeben hat, das in dem Büschel der Polhodiekegel enthalten ist und aus dem Ellipsoid der lebendigen Kraft die „trennende Polhodie“ ausschneidet. *Die Asymptoten des Hyperbelbüschels sind daher nichts anderes als die beiden Geraden, in denen die $xz$-Ebene durch das Ebenenpaar der trennenden Polhodie geschnitten wird.*

Die Kurven des Hyperbelbüschels verteilen sich auf die beiden Scheitelwinkelpaare, welche die gemeinsamen Asymptoten des Büschels mit einander bilden. In dem Falle (a) nämlich liegen sie in dem

Winkelpaar, das die $x$-Axe enthält, in dem Falle (b) in dem Winkelpaar, das die $z$-Axe einschliefst. *Die Hyperbeln innerhalb eines jeden dieser beiden Winkelpaare sind wieder unter einander ähnlich und koaxial.*

Da eine jede Polhodiekurve als partieller Schnitt zweier Ellipsoide eine ganz im Endlichen verlaufende Kurve ist, so mufs dasselbe auch von ihren senkrechten Projektionen auf die Koordinatenebenen gelten. Insbesondere können daher ihre senkrechten Projektionen auf die $xz$-Ebene nicht die ganzen durch die Gleichungen (52a) und (52b) dargestellten Hyperbeln umfassen, sondern sie können *nur einen Bogen dieser Hyperbeln ausmachen*, und zwar offenbar einen Bogen, dessen Mitte von einem Scheitel der Hyperbel gebildet wird. Aber auch von den Ellipsen, welche durch die Gleichungen (51) und (53) dargestellt werden, ist für jeden gegebenen Wert der Stärke $G$ des Impulsmomentes immer nur die eine in ihrer ganzen Ausdehnung die Projektion der diesem Werte von $G$ zugehörigen Polhodiekurve, *von der andern Ellipse dagegen nur ein Bogen.*

Zum Beweise hierfür hat man nur zu zeigen, dafs eine von den Halbaxen der Ellipsen (51) und (53) die entsprechende Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft an Gröfse übertrifft.

Man bezeichne also die Halbaxen der Ellipse (51), welche der $yz$-Ebene angehört, mit $\beta_1$ und $\gamma_1$, die der Ellipse (53), welche in der $xy$-Ebene liegt, mit $\alpha_3$ und $\beta_3$. Dann ist zufolge der Gleichung (51)

$$(55) \qquad \beta_1^2 = \frac{2h\left(\frac{G^2}{2h} - A\right)}{B(B-A)} \quad \text{und} \quad \gamma_1^2 = \frac{2h\left(\frac{G^2}{2h} - A\right)}{C(C-A)}$$

und zufolge der Gleichung (53)

$$(56) \qquad \alpha_3^2 = \frac{2h\left(C - \frac{G^2}{2h}\right)}{A(C-A)} \quad \text{und} \quad \beta_3^2 = \frac{2h\left(C - \frac{G^2}{2h}\right)}{B(C-B)}.$$

In dem Falle (a), in welchem $\delta > b$ und

$$(47) \qquad A < \frac{G^2}{2h} < B < C$$

ist, wird daher

$$\beta_1^2 < \frac{2h}{B} \quad \text{und} \quad \gamma_1^2 < \frac{2h}{C}$$

oder wegen (27)

$$< b^2 \qquad\qquad < c^2,$$

also

$$(57) \qquad \beta_1 < b \quad \text{und} \quad \gamma_1 < c;$$

ferner

$$\alpha_3^2 < \frac{2h}{A} \quad \text{und} \quad \beta_3^2 > \frac{2h}{B}$$

oder wegen (27)

$$< a^2 \qquad\qquad > b^2,$$

also

$$(58) \qquad \alpha_3 < a \quad \text{und} \quad \beta_3 > b.$$

Hieraus folgt: Solange der Abstand $\delta$ des Drehpunktes von der Herpolhodieebene *größer* bleibt als die mittlere Halbaxe $b$ des Ellipsoids der lebendigen Kraft, ist die Projektion der Polhodiekurve auf die $yz$-Ebene eine *volle Ellipse*, ihre Projektion auf die $xy$-Ebene aber nur ein *Ellipsenbogen*, welcher durch die $x$-Axe halbiert wird. Die *Polhodiekurve umschließt also in diesem Falle die $x$-Axe*, und dasselbe gilt dann auch von dem *Polhodiekegel* (vgl. Fig. 3).

In dem Falle b) dagegen, in welchem $\delta < b$ und

$$(48) \qquad A < B < \frac{G^2}{2h} < C$$

ist, wird

$$\beta_1^2 > \frac{2h}{B} \quad \text{und} \quad \gamma_1^2 < \frac{2h}{C},$$

das heißt,

$$(59) \qquad \beta_1 > b \quad \text{und} \quad \gamma_1 < c;$$

ferner

$$\alpha_3^2 < \frac{2h}{A} \quad \text{und} \quad \beta_3^2 < \frac{2h}{B},$$

also

$$(60) \qquad \alpha_3 < a \quad \text{und} \quad \beta_3 < b.$$

Hieraus folgt: Solange der Abstand $\delta$ des Drehpunktes von der Herpolhodieebene *kleiner* bleibt als die mittlere Halbaxe $b$ des Ellipsoids der lebendigen Kraft, ist die Projektion der Polhodiekurve auf die $yz$-Ebene ein *Ellipsenbogen*, welcher durch die $z$-Axe halbiert wird, ihre Projektion auf die $xy$-Ebene aber eine *volle Ellipse*. *Die Polhodiekurve umschließt also in diesem Falle die $z$-Axe*, und dasselbe gilt dann auch von dem *Polhodiekegel* (vgl. Fig. 3).

Man kann den Hauptinhalt der gewonnenen Ergebnisse in dem Satze zusammenfassen:

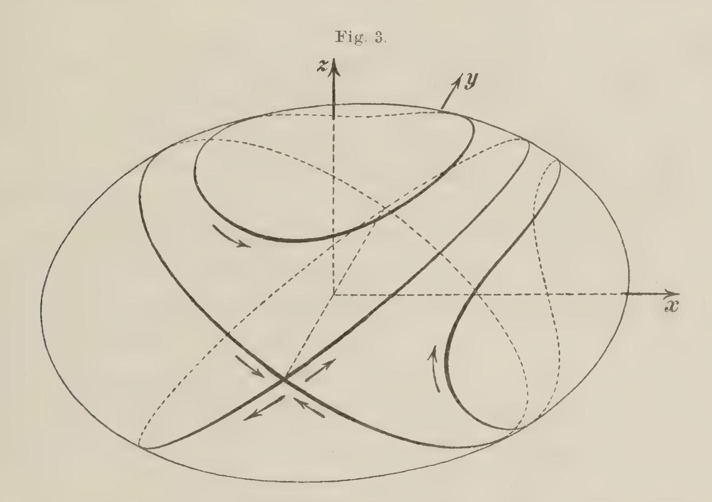
Bei der Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt umschließt der Polhodiekegel eine größte oder kleinste Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft,

je nachdem der Abstand des Drehpunktes von der Herpolhodieebene gröſser oder kleiner ist als die mittlere Halbaxe dieses Ellipsoids.

### b) Das zweifach unendliche System aller Polhodiekurven.

Um endlich eine Übersicht über *sämtliche* Polhodiekurven eines um einen festen Punkt drehbaren Körpers zu gewinnen, hat man in den Gleichungen (1) und (11) nicht nur die Stärke $G$ des Impulsmomentes, sondern auch die lebendige Kraft $h$ als veränderlich anzusehen. Dann stellen diese Gleichungen ein *Bündel von Raumkurven vierter Ordnung*

Fig. 3.




*der ersten Art* dar[1]), deren Zweige das gewünschte System aller Polhodiekurven bilden. Von jenem Raumkurvenbündel aber kann man sich leicht eine Vorstellung verschaffen.

Die Gleichung (1) ist nämlich bei veränderlichem $h$ die Gleichung eines Büschels ähnlicher und koaxialer Ellipsoide; und dieses Büschel hat die Eigenschaft, daſs durch jeden Punkt des Raumes *eine und nur eine* Fläche des Büschels hindurchgeht, denn die Gleichung (1) bestimmt bei gegebenem $p$, $q$, $r$ den Parameter $h$ der Fläche eindeutig. Die Gleichung (11) aber war, wie wir im vierten Abschnitt gezeigt haben, die Gleichung des dort betrachteten Büschels von Polhodiekegeln, das heiſst, ebenfalls die Gleichung eines Büschels von Flächen zweiter Ord-

1) Unter einem *Bündel von Raumkurven vierter Ordnung der ersten Art* verstehen wir dabei das zweifach unendliche System von Raumkurven, in welchem die Flächen eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung von den Flächen eines zweiten solchen Büschels geschnitten werden (vgl. S. 345).

nung. Und da auch von den Flächen dieses Kegelbüschels durch jeden Punkt des Raumes *stets eine* und, abgesehen vom Punkte $O$, auch *nur eine* Fläche hindurchgeht, der Punkt $O$ aber in dem Büschel ähnlicher und koaxialer Ellipsoide eine Fläche für sich bildet, *so geht auch durch jeden Punkt des Raumes eine, aber auch nur eine Kurve des durch die Gleichungen (1) und (11) dargestellten Bündels von Raumkurven vierter Ordnung hindurch.* Dieselbe Eigenschaft kommt endlich auch dem System aller *Polhodiekurven* zu, welche die Zweige dieses Kurvenbündels bilden, wenigstens wenn man die Punkte der Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes ausnimmt, welche als Doppelpunkte der zerfallenden Raumkurven vierter Ordnung immer *zwei* Polhodiekurven angehören.

Man kann hieran noch die Bemerkung knüpfen, daſs, wenn bei einem kraftfreien, um einen festen Punkt drehbaren starren Körper für irgend einen Augenblick die Lage des Körpers und überdies die Lage seines instantanen Drehpols gegeben ist, damit seine Bewegung in jedem Falle eindeutig bestimmt ist. Denn durch die Lage des Drehpols für irgend einen Augenblick ist, abgesehen von dem Ausnahmefall, wo der Drehpol auf die Axe des mittleren Trägheitsmomentes fällt, die zugehörige Polhodiekurve eindeutig festgelegt, auſserdem aber auch die Lage der dieser Polhodiekurve entsprechenden Herpolhodieebene. In der That ist diese ja nichts anderes als die Tangentialebene, die man im anfänglichen Drehpol des Körpers an das durch ihn bestimmte Ellipsoid der lebendigen Kraft legen kann. Und da, wie unten gezeigt werden wird (vgl. S. 362), auch in dem genannten Ausnahmefall, wo der Drehpol der Axe des mittleren Trägheitsmomentes angehört, durch Angabe seiner Lage auf dieser Axe die Bewegung des Körpers unzweideutig vorgeschrieben ist, so hat man den Satz:

Kennt man bei einem kraftfreien, um einen festen Punkt drehbaren starren Körper für irgend einen Augenblick auſser der Lage des Körpers noch die Lage des instantanen Drehpols, so ist dadurch die Bewegung des Körpers eindeutig bestimmt.

### c) Der Durchlaufungssinn der Polhodiekurven.

Um über den Sinn der Fortbewegung des Drehpols auf der Polhodiekurve Aufschluſs zu erhalten[1]), benutzt man am besten eine von den drei *Eulerschen Differentialgleichungen*, welche lauten:

---

1) Vgl. hierzu Routh, Bd. II. S. 106.

$$(61)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B - C)\,qr \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C - A)\,rp \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A - B)\,pq. \end{cases}$$

In der mittleren von diesen Gleichungen ist mit Rücksicht auf die Ungleichung (6) der in der Klammer auftretende Faktor $C - A$ positiv. Die Gleichung zeigt daher, dafs das Vorzeichen des Differentialquotienten $\frac{dq}{dt}$ mit dem des Produktes $rp$ übereinstimmt, dafs sich also der Drehpol in denjenigen vier Oktanten des beweglichen Koordinatensystems, für welche das Produkt $rp$ positiv ist, im Sinne der positiven $y$-Axe bewegt, in den anderen vier Oktanten in entgegengesetztem Sinne (vgl. Fig. 3).

Umschliefst also die Polhodiekurve die positive (oder negative) Seite der $x$-Axe, so wird die Polhodiekurve und also auch der zugehörige Polhodiekegel für einen vom Scheitel des Kegels aus die Kegelaxe entlang blickenden Beschauer in negativem Sinne durchlaufen (vgl. S. 331). Umschliefst dagegen die Polhodiekurve die positive (oder negative) Seite der $z$-Axe, so erfolgt diese Durchlaufung in positivem Sinne. Man hat also den Satz:

Bei der Bewegung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt wird der Polhodiekegel von der instantanen Axe für einen vom Scheitel des Kegels die Kegelaxe entlang blickenden Beschauer in negativem oder in positivem Sinne durchlaufen, je nachdem diese Axe mit der Axe des kleinsten oder gröfsten Trägheitsmomentes zusammenfällt.

Die Halbellipsen der trennenden Polhodie endlich werden für einen vom Drehpunkte aus die Axe des kleinsten (gröfsten) Trägheitsmomentes entlang blickenden Beschauer in negativem (positivem) Sinne durchlaufen.

## Sechster Abschnitt.

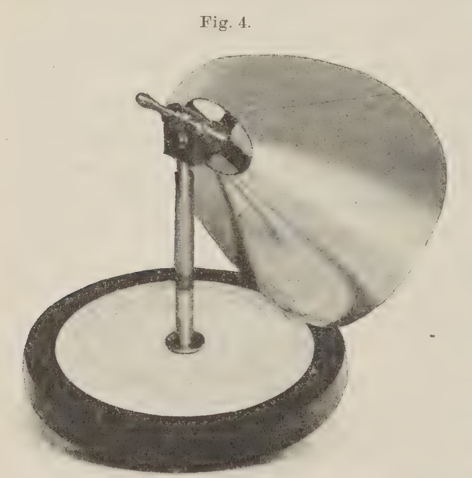
### Die Erzeugung der Herpolhodiekurve mittelst der drei Apparate.

Die drei Apparate, durch welche in den beiden oben behandelten Hauptfällen und in dem Grenzfalle der trennenden Polhodie die Bewegung des kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt nachgeahmt und zugleich die Herpolhodiekurve beschrieben werden soll, beruhen auf dem Gedanken, dafs man anstatt des Ellipsoids der lebendigen Kraft *auch diejenige Kurve auf der Herpolhodieebene rollen lassen*

*kann, welche durch die aufeinanderfolgenden Berührungspunkte des Ellipsoids der lebendigen Kraft mit der Herpolhodieebene auf diesem Ellipsoide gebildet wird.* Dabei ist vorausgesetzt, dafs man diese Kurve, welche nach dem Obigen mit der Polhodiekurve identisch ist, mit dem „Trägheitskreuz des Drehpunktes“ in feste Verbindung bringt, den Drehpunkt in der gehörigen Entfernung von der Herpolhodieebene festhält und die Berührung der Polhodiekurve mit der Herpolhodieebene durch passende Aufhängung der Polhodiekurve so regelt, dafs bei positiver Drehung des Körpers um den Leitstrahl des Berührungspunktes die Polhodiekurve von ihrem Berührungspunkte in dem auf S. 357 angegebenen Sinne durchlaufen wird (vgl. die Figuren 4 und 5).

Wie weiter unten gezeigt werden wird, ist dazu in den beiden oben betrachteten Hauptfällen einer nicht zerfallenden Polhodiekurve erforderlich, dafs die Impulsaxe, das heifst, das vom Drehpunkte des Körpers auf die Herpolhodieebene gefällte Lot, von der Polhodiekurve umschlossen wird oder nicht, je nachdem der Abstand des Drehpunktes von der Herpolhodieebene kleiner oder gröfser ist als die mittlere Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft.

Fig. 4.



Als feste Verbindung der Polhodie*kurve* mit dem Trägheitskreuz des Drehpunktes wird man am besten den Polhodie*kegel* benutzen. Man läfst also den längs der Polhodiekurve abgeschnittenen Polhodiekegel mit seiner Randkurve unter Ausschlufs des Gleitens auf der Herpolhodieebene abrollen, während man seinen Scheitel in der zu der Polhodiekurve gehörigen Entfernung von der Herpolhodieebene festhält und dabei die Aufhängung in der oben angegebenen Weise regelt. Der geometrische Ort der Berührungspunkte der Herpolhodieebene mit der Randkurve des Polhodiekegels ist dann die Herpolhodiekurve.

Eine solche Anordnung der Apparate gewährt noch den Vorteil, dafs sie die Bewegung des Poinsotschen Polhodiekegels wieder mehr in den Vordergrund der Betrachtung rückt. Allerdings ist ja die oben gegebene, ebenfalls von Poinsot herrührende Veranschaulichung der Drehung des kraftfreien starren Körpers durch das Abrollen eines

Ellipsoids auf einer Ebene äufserst übersichtlich und besitzt überdies den wichtigen Vorzug, dafs die Modellierung eines einzigen Ellipsoids ausreichen würde, um alle möglichen Formen der Drehung eines gegebenen Körpers nachzuahmen; denn sieht man von den Unterschieden ab, welche lediglich durch die Gröfse der lebendigen Kraft der Bewegung bedingt werden, so würden sich die verschiedenen Bewegungsformen des Körpers durch blofse Veränderung des Abstandes der Herpolhodieebene vom Mittelpunkte des Ellipsoids ergeben müssen.

Andererseits aber leidet diese Methode der Veranschaulichung an dem Mangel, dafs bei ihr die Form des Herpolhodiekegels und die Art der Bewegung des Polhodiekegels nicht deutlich genug erkennbar ist. In diesen beiden Beziehungen aber läfst die von uns gewählte Methode, bei der die Polhodiekurve als Randkurve des Polhodiekegels auf der zugehörigen festen Ebene abrollt, nichts zu wünschen übrig; aufserdem ermöglicht sie eine bessere Vergleichung der Bewegung des kraftfreien starren Körpers mit der Bewegung eines Körpers, der von Kräften beeinflufst wird. Endlich gestattet die beschriebene Einrichtung der Apparate, mittelst derselben die Herpolhodiekurve auf einem Papierblatt zu verzeichnen, so dafs also die Apparate nicht nur die Bewegung des kraftfreien starren Körpers nachahmen, sondern zugleich als Herpolhodiezirkel dienen können. Befestigt man nämlich ein Papierblatt mit einem Stück aufgelegten Blaupapiers auf der Fufsplatte der Apparate und läfst den Polhodiekegel ohne Anwendung von Druck unter gelegentlicher sanfter Nachhülfe durch die Hand auf seiner Unterlage abrollen, so ruft der Kegel durch sein blofses Gewicht die Herpolhodiekurve mit hinreichender Deutlichkeit auf dem Papierblatt hervor. Eine genaue Einhaltung der Entfernung des Drehpunktes von der Herpolhodieebene erzielt man dabei, wenn man nach Lösung der Schrauben, mittelst deren die Stütze des Drehpunktes auf der Fufsplatte befestigt ist, die beiden Papierstücke zwischen der Stütze und der Fufsplatte einklemmt.

Fig. 5.



## Siebenter Abschnitt.

## Die Gestalt der Herpolhodiekurve.

Die Gestalt und die Eigenschaften der Herpolhodiekurve lassen sich nicht mehr in so elementarer Weise entwickeln, wie dies bei der Polhodiekurve möglich war. Die Gleichung der Herpolhodiekurve wird nämlich im allgemeinen transscendent, und ihre Ableitung und Diskussion erfordert bereits umfangreichere Rechnungen, welche den für diese Blätter zur Verfügung stehenden Raum überschreiten würden. Es möge daher auf eine eingehende Behandlung der Herpolhodiekurve verzichtet werden, was um so mehr erlaubt scheint, als die vorliegende Abhandlung ja wesentlich den Zweck verfolgt, das Verständnis für die drei Apparate und die durch sie dargestellte Bewegung zu vermitteln und namentlich einen Überblick über die verschiedenen Bewegungsformen zu gewähren, welche bei der Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt eintreten können, wozu eine genauere Diskussion der Herpolhodiekurve nicht unbedingt erforderlich ist. Doch sollen wenigstens historisch die wichtigsten Eigenschaften der Herpolhodiekurve mitgeteilt werden; hinsichtlich ihrer Begründung aber möge, soweit dieselbe gröfsere Rechnungen nötig machen würde, auf die einschlägige Litteratur verwiesen werden.

### a) Die Herpolhodiekurve in den beiden Hauptfällen.

Der Leitstrahl der Polhodiekurve, vom Drehpunkte des Körpers aus gezogen, variiert in den beiden von uns oben betrachteten Hauptfällen, auf die wir zunächst eingehen wollen, zwischen einem gröfsten Werte, den er für die beiden in der $xz$-Ebene gelegenen Scheitel der Kurve erreicht, und einem kleinsten Werte, den er für die beiden anderen Scheitel annimmt.[1]) Fällt man ferner vom Drehpunkte $O$ des Körpers das Lot $OM$ auf die Herpolhodieebene und bezeichnet die Verbindungslinien seines Fufspunktes $M$ mit den Punkten der Herpolhodiekurve als die Leitstrahlen der Herpolhodiekurve, so bildet jeder Leitstrahl der Herpolhodiekurve die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse der zugehörige Leitstrahl der Polhodiekurve ist, während die andere Kathete durch das Lot $OM$, das heifst, durch ein Stück der Impulsaxe dargestellt wird. Und dieses Lot ist wenigstens in den beiden von uns jetzt betrachteten Hauptfällen *kleiner*

1) Vgl. Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Journ. de math. Serie 1. Bd. 16 (1851). S. 108, in der von Schellbach besorgten deutschen Übersetzung (Berlin 1851) S. 43. Siehe ferner die obige Figur 3.

als der kleinste Leitstrahl der Polhodiekurve.[1]) Folglich schwankt auch der Leitstrahl der Herpolhodiekurve in den beiden Hauptfällen zwischen einem gröfsten und einem kleinsten, *von Null verschiedenen* Werte hin und her.

Die Herpolhodiekurve ist also zwischen zwei konzentrische Kreise, ihre „*Grenzkreise*“, eingeschlossen, welche den Fufspunkt $M$ jenes Lotes zum Mittelpunkt haben, und welche abwechselnd von der Herpolhodiekurve berührt werden.

Man kann daher den Punkt $M$ als den Mittelpunkt der Herpolhodiekurve bezeichnen und die Impulsaxe, welche im Mittelpunkte $M$ der Herpolhodiekurve auf deren Ebene senkrecht steht und zugleich durch den Scheitel $O$ des Herpolhodiekegels hindurchgeht, die Axe des Herpolhodiekegels nennen.

Von dem Verlaufe der Herpolhodiekurve zwischen den beiden Grenzkreisen hatte sich Poinsot eine unrichtige Vorstellung gebildet, in so fern er annahm, dafs sich die Kurve nach Art einer Wellenlinie zwischen den beiden Kreisen hinziehe und also zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Berührungspunkten mit diesen Kreisen einen Wendepunkt besitze.[2])

Im Jahre 1880 zeigte indes W. Hefs, indem er sich dabei auf die nach dem Obigen zwischen den Hauptträgheitsmomenten eines Körpers herrschende Ungleichung

$$A + B \geqq C \tag{7}$$

stützte, dafs die Herpolhodiekurve keine Wendepunkte aufweisen könne[3]), sondern überall ihrem Mittelpunkte die konkave Seite zukehren müsse, ein Ergebnis, das dann später von verschiedenen Autoren bestätigt worden ist.[4]) In dieser Beziehung

1) Dies folgt z. B. aus den von Poinsot in derselben Abhandlung auf S. 111 (in der Übersetzung auf S. 45) unter der Nr. 62 angegebenen Formeln.

2) Vgl. dieselbe Abhandlung S. 93f. (Übersetzung S. 35f.). Auf dieser irrigen Anschauung beruhte auch die von Poinsot ebenda S. 102 eingeführte Bezeichnung Herpolhodie (= Schlängelweg).

3) Hefs, Dissertation S. 29—32.

4) Zuerst von De Sparre in den Arbeiten: Sur l'erpolodie de Poinsot. Comptes rendus des séances de l'ac. Paris Bd. 99 (1884 Okt.—Dez.). S. 906. Sur l'herpolhodie dans le cas d'une surface du second degré quelconque. Ebenda. Bd. 101 (1885 Juli—Sept). S. 370. Sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe et sur le pendule conique. Ann. de la soc. scient. de Bruxelles. Bd. 9 (1885) B. S. 49. Besonders geeignet zur Orientierung über den Gegenstand sind die beiden Arbeiten von Resal: Développements sur un point de la théorie de la rotation des corps solides. Journ. de l'éc. polyt. Heft 53 (1883), S. 17 und

gleicht also die Herpolhodiekurve der senkrechten Projektion der Bahn des sphärischen Pendels auf eine horizontale Ebene, mit der sie übrigens auch die Eigenschaft gemein hat, dafs sie im allgemeinen *eine transscendente Kurve ist, die sich in unendlich vielen miteinander kongruenten Windungen zwischen den beiden Grenzkreisen hinschlingt, ohne jemals in sich zurückzukehren.*

**b) Die Herpolhodiekurve in dem Grenzfall der trennenden Polhodie.**

In dem Grenzfalle der trennenden Polhodie, zu dem wir nunmehr übergehen wollen, gehört einem jeden Ellipsenquadranten der Polhodiekurve ein spiralförmig gewundenes Stück der Herpolhodiekurve zu, das sich *in unendlich vielen Spiralwindungen* um den Schnittpunkt der Impulsaxe mit der invariablen Ebene herumzieht.[1]) Der starre Körper bewegt sich dann in der Weise, dafs die Polhodieebene an diesen Spiralwindungen der Herpolhodiekurve abrollt, und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche für jeden Augenblick durch die Länge des Leitstrahls der Polhodiekurve dargestellt wird. Und da diese Winkelgeschwindigkeit stets endlich bleibt, die Anzahl der Spiralwindungen aber unendlich grofs ist, und bei Durchlaufung jeder Spiralwindung eine volle Umdrehung des Körpers stattfindet, so wird der instantane Drehpol des Körpers den Mittelpunkt der Spirale in endlicher Zeit überhaupt nicht erreichen können.

Dies Ergebnis läfst sich auch dadurch bestätigen, dafs man direkt die Zeit bestimmt, welche der Drehpol zur Durchlaufung einer ganzen Herpolhodiespirale gebrauchen würde, wodurch sich für diese Zeit ein unendlich grofser Wert ergiebt.[2])

Umgekehrt wird ein kraftfreier starrer Körper, der für einen Augenblick um die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes rotiert, in jeder noch so langen endlichen Zeit in seiner Rotation um diese Axe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit beharren; und zwar bleibt dann diese Axe sowohl im Körper wie im Raume fest.

Die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes ist also ebenso wie die beiden anderen Hauptträgheitsaxen eine „permanente“ („natürliche“, „freie“) Drehaxe des Körpers.

---

Note sur la courbure de l'herpolhodie. Ebenda. Heft 55 (1885), S. 275, von denen die zweite den betreffenden Nachweis enthält. Vgl. ferner die Arbeit von A. Petrus: Beiträge zur Theorie der Herpolhodie Poinsots. Halle. Inauguraldissertation. 1902, in der sich auch weitere Litteraturangaben finden.

1) Vgl. die bereits mehrfach zitierte Arbeit von Poinsot, S. 95 ff. und 116 ff. (Übersetzung S. 36 f. und 47 f.)

2) Ebenda S. 299.

## Achter Abschnitt.

### Die Stabilität der Drehung um die drei Hauptträgheitsaxen.

Indessen besteht zwischen der Drehung um die Axe des mittleren und um die Axen der beiden extremen Hauptträgheitsmomente ein wichtiger Unterschied hinsichtlich der Stabilität der Drehung. Wird nämlich die Drehaxe des Körpers durch eine momentan wirkende äufsere Kraft in dem Körper auch nur unendlich wenig aus der Lage einer der drei Hauptträgheitsaxen verschoben, und dann der Körper wieder sich selbst überlassen, so beschreibt die instantane Axe denjenigen Kegel aus dem von uns oben betrachteten Büschel von Polhodiekegeln, welcher durch die neue Lage der Drehaxe bestimmt wird. *Die Form dieses Polhodiekegels aber ist gänzlich verschieden, je nachdem die permanente Drehaxe durch die Axe des mittleren oder durch die Axe eines der beiden extremen Hauptträgheitsmomente gebildet wurde.*

Bei der Axe des gröfsten oder kleinsten Trägheitsmomentes nämlich ist der Polhodiekegel ein Kegel *von sehr kleinen Öffnungswinkeln.* Trotz der Störung durch den Anstofs hält sich daher die Drehaxe sowohl im Körper wie im Raume in umittelbarer Nähe der ursprünglichen permanenten Drehaxe. Die Drehung des Körpers um die Axe des gröfsten oder kleinsten Trägheitsmoments heifst daher stabil.[1])

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei einer Drehung um die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes.

Sieht man zunächst von dem Falle ab, wo die Drehaxe auch nach der Einwirkung des äufseren Anstofses in einer der beiden Ebenen der trennenden Polhodie verbleibt, so wird die Drehaxe nach Aufhebung der störenden Kraft einen nicht zerfallenden Polhodiekegel beschreiben, welcher sich eng an die Ebenen der trennenden Polhodie anschmiegt und in einem der vier keilförmigen Räume liegt, die durch das Ebenenpaar der trennenden Polhodie gebildet werden (vgl. Fig. 3), *welcher also nicht die Axe des mittleren Hauptträgheitsmoments, sondern entweder die des kleinsten oder die des gröfsten Trägheitsmomentes umschliefsen wird.* Die gröfste und kleinste Öffnung eines solchen Kegels kann dabei nur wenig von den Werten $\pi$ und $2\lambda$ oder $\pi$ und $\pi - 2\lambda$ abweichen, vorausgesetzt, dafs wir wie oben (auf S. 344 ff.) unter $\lambda$ den

---

1) Vgl. hierzu Klein-Sommerfeld S. 128 ff.; ferner Fricke, Kurzgefafste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-funktionentheoretischer Teil. Leipzig. 1900. S. 335 ff. und Appell, Traité de mécanique rationelle. Bd. II. Paris. 1896. S. 219 ff.

Winkel verstehen, den die Ebenen der trennenden Polhodie mit der $xy$-Ebene einschliefsen. Infolgedessen wird sich die instantane Drehaxe in hinreichend langer, aber jedenfalls endlicher Zeit sehr stark von der Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes entfernen[1]), und zwar sowohl in dem Körper wie im Raume.

Aber selbst in dem bisher ausgeschlossenen Falle, wo die Störung der Bewegung eine Verschiebung der instantanen Drehaxe innerhalb einer der beiden Ebenen der trennenden Polhodie zur Folge hat, wird mit Rücksicht auf den Durchlaufungssinn der Polhodiekurven (vgl. Fig. 3) wenigstens für *zwei* von den vier möglichen Verschiebungen ebenfalls bereits in endlicher Zeit eine starke Verlegung der Drehaxe stattfinden, während bei den *beiden anderen* Verschiebungen allerdings die instantane Drehaxe wieder ihrer ursprünglichen Lage zustreben wird.

Die Drehung des Körpers um die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes besitzt also die Eigenschaft, dafs eine noch so kleine Störung dieser Drehung im allgemeinen eine Veränderung in der Bewegung hervorrufen wird, bei welcher nach endlicher Zeit die instantane Drehaxe eine von der ursprünglichen Lage der Axe sehr stark abweichende Richtung annimmt. Aus diesem Grunde nennt man die Drehung um die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes labil.

## Neunter Abschnitt.

### Die Art des Abrollens des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel.

Schon oben wurde auf den Unterschied hingewiesen, der in der Art des Abrollens des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel hervortritt und zu einer verschiedenen Aufhängung der Polhodiekegel bei den Apparaten Veranlassung giebt (vgl. Fig. 4 und 5).

Ersetzt man eine *ganz beliebige Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt* durch die Abwickelung eines beweglichen Kegels auf einem festen Kegel, so können *drei* verschiedene Bewegungsformen auftreten, welche man entsprechend den drei beim Rollen eines beweglichen Kreises auf einem festen Kreise vorkommenden Bewegungsformen als epicykloidisch, hypocykloidisch und pericykloidisch bezeichnen kann.

Sobald nämlich die beiden Kegel sich längs ihrer instantanen Berührungslinie ihre konvexe Seite zukehren, wollen wir das Abrollen

---

1) Jede nicht zerfallende Polhodiekurve wird von der instantanen Achse in endlicher Zeit durchlaufen. Vgl. z. B. das soeben erwähnte Werk von Fricke S. 333.

des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel für den betreffenden Augenblick epicykloidisch nennen. Wenn dagegen die konvexen Seiten beider Kegel längs ihrer Berührungslinie nach derselben Seite gewendet sind, soll die Bewegung als hypocykloidisch oder pericykloidisch bezeichnet werden, je nachdem der Polhodiekegel von dem Herpolhodiekegel längs der Berührungslinie umschlossen wird, oder selbst den Herpolhodiekegel längs dieser Linie umschliefst.

Ein *Übergang* aus der epicykloidischen in die hypocykloidische oder pericykloidische Bewegungsform oder der umgekehrte Übergang findet statt, wenn die Berührungslinie der beiden Kegel, das heifst, die instantane Drehachse des Körpers in eine „*Wendelinie*" eines der beiden Kegel zu liegen kommt. Dagegen tritt ein Übergang aus der hypocykloidischen in die pericykloidische Bewegungsform oder der umgekehrte Übergang ein, wenn die beiden Kegel oder, was auf dasselbe hinauskommt, die beiden Kurven eines senkrecht zu ihrer Berührungslinie gelegten Normalschnitts mit einander eine *Berührung gerader Ordnung* haben.

Bei dem von uns betrachteten besonderen Fall eines kraftfreien Körpers sind indes von diesen drei Arten des Abrollens nur die epicykloidische und die pericykloidische Bewegungsform möglich, während eine hypocykloidische Bewegung überhaupt ausgeschlossen ist.

Das kann man sich auf folgende Weise klar machen: Rein kinematisch betrachtet wären für eine hypocykloidische Bewegung zwei Formen denkbar. In der That könnten die beiden Kegel entweder gleichzeitig der Axe des Herpolhodiekegels ihre konvexe Seite zukehren, oder aber beide zugleich ihre konkave Seite. Bei der Bewegung eines kraftfreien starren Körpers indes ist der erstere von diesen beiden Fällen von vornherein ausgeschlossen, weil nach dem Hefsschen Satze (vgl. S. 361) *der Herpolhodiekegel seiner Axe stets die konkave Seite zuwendet.* Man überzeugt sich aber leicht, dafs ebenso auch die andere rein kinematisch denkbare Art hypocykloidischen Abrollens, eine hypocykloidische Bewegung nämlich, bei der beide Kegel längs ihrer Berührungslinie der Axe des Herpolhodiekegels ihre konkave Seite zukehren, bei einem kraftfreien Körper kinetisch unmöglich ist. Denn da sich beim kraftfreien starren Körper die Bewegung in der Weise vollzieht, dafs das Ellipsoïd der lebendigen Kraft auf einer festen Ebene, der Herpolhodieebene, abrollt, und die Polhodiekurve den geometrischen Ort derjenigen Punkte dieses Ellipsoids bildet, welche während der Bewegung mit der Herpolhodieebene in Berührung treten, so liegt für jeden Augenblick der Bewegung die Polhodiekurve *auf derselben Seite der*

*Herpolhodieebene wie der Mittelpunkt des Ellipsoids, das heifst, wie der Drehpunkt des Körpers.* Würde sich aber der Polhodiekegel mit seiner Polhodiekurve auf hypocykloidische Art auf dem Herpolhodiekegel und der Herpolhodiekurve abwickeln und zugleich der Axe des Herpolhodiekegels seine konkave Seite zuwenden, so müfste gerade im Gegenteil die Polhodiekurve in der Umgebung ihres Berührungspunktes mit der Herpolhodiekurve von dem gemeinsamen Scheitel der beiden Kegel, das heifst, *vom Drehpunkte des Körpers, durch die Herpolhodieebene getrennt sein.* Denn in dem Falle einer hypocykloidischen Bewegung müfste sich der Polhodiekegel mit seiner Polhodiekurve aus dem ihn umfassenden Herpolhodiekegel und seiner Herpolhodiekurve in der Umgebung der Berührungslinie beider Kegel durch Zusammenbiegen des Herpolhodiekegels unter Festhaltung der Berührungslinie samt ihrer Tangentialebene erzeugen lassen. Nun ist aber beim kraftfreien starren Körper die Herpolhodiekurve eine ebene Kurve. Und bei weiterem Zusammenbiegen des Herpolhodiekegels, der ja seiner Axe die konkave Seite zukehrt, würde die Herpolhodie*kurve* aus ihrer Ebene heraustreten und auf diejenige Seite dieser Ebene gelangen müssen, welche von dem Drehpunkte des Körpers durch diese Ebene getrennt ist. Da aber eine solche Lage der Polhodiekurve nach dem Obigen ausgeschlossen ist, so ist für einen kraftfreien starren Körper eine hypocykloidische Bewegung überhaupt unmöglich. Es kann also die Bewegung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt nur entweder epicykloidisch oder pericykloidisch sein. Hieraus folgt zum Beispiel, dafs eine Bewegung von der Art der Präzessionsbewegung der Erde, welche bekanntlich hypocykloidisch ist, bei einem kraftfreien starren Körper nicht vorkommen kann.

Andererseits kann aber die Bewegung eines kraftfreien starren Körpers auch nicht abwechselnd epicykloidisch und pericykloidisch sein, sondern sie mufs während ihres ganzen Verlaufes ihren Charakter bewahren; denn weder der Polhodiekegel, welcher ja von der zweiten Ordnung ist, noch auch der Herpolhodiekegel (vgl. S. 361) weist eine Wendelinie auf. Das Auftreten einer Wendelinie bei einem der beiden Kegel war aber nach dem Obigen (vgl. S. 365) die Voraussetzung für einen solchen Übergang.

Ob nun endlich die epicykloidische oder die pericykloidische Bewegungsform eintritt, läfst sich ziemlich leicht entscheiden. Schon die Betrachtung der Bewegung des auf der Herpolhodieebene rollenden Ellipsoids der lebendigen Kraft läfst erraten, dafs das Abrollen des Polhodiekegels epicykloidisch oder pericykloidisch sein wird, je nachdem der Polhodiekegel die gröfste oder kleinste Axe dieses Ellipsoids umschliefst.

Mit völliger Sicherheit aber entnimmt man dies aus dem Durchlaufungssinn des Polhodiekegels. Da nämlich nach unserer Vereinbarung (vgl. S. 331) die *„Drehstrecke“*, das heifst die Strecke vom Drehpunkt nach dem Drehpol, immer nach derjenigen Seite der instantanen Axe hin abgetragen wird, um welche herum die Drehung in positivem Sinne erfolgt, so gilt ganz allgemein der Satz:

*Bei epicykloidischem oder hypocykloidischem Abrollen eines Polhodiekegels auf seinem Herpolhodiekegel wird für einen Beschauer, dessen Auge im Scheitel der beiden Kegel liegt, der Polhodiekegel von der instantanen Axe in negativem Sinne durchlaufen, bei pericykloidischem Abrollen in positivem Sinne.*[1])

Für einen kraftfreien starren Körper, bei welchem, wie wir gezeigt haben, die hypocykloidische Bewegungsform ausgeschlossen ist, kann man diesem Satze auch die Fassung geben:

*Bei einem kraftfreien starren Körper ist die Bewegung des Polhodiekegels epicykloidisch oder pericykloidisch, je nachdem für einen vom Scheitel des Polhodiekegels die Kegelaxe entlang blickenden Beschauer der Kegel von der instantanen Axe in negativem oder positivem Sinne durchlaufen wird.*

Hierfür aber kann man nach dem auf S. 357 entwickelten Satze auch sagen:

Bei der Drehung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt ist das Abrollen des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel epicykloidisch oder pericykloidisch, je nachdem seine Axe mit der Axe des kleinsten oder gröfsten Trägheitsmomentes zusammenfällt, oder, was nach dem Satze auf S. 354 f. dasselbe ist, je nachdem der Abstand des Drehpunktes von der Herpolhodieebene gröfser oder kleiner ist als die mittlere Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft.

## Zehnter Abschnitt.

### Fortsetzung: Der Impulskegel.

In engem Zusammenhang mit der Art des Abrollens des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel steht *die Frage, ob die Impulsaxe der Bewegung*, welche zugleich die Axe des Herpolhodiekegels bildet, *aufserhalb oder innerhalb des Polhodiekegels liegt.*

---

1) Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, braucht man sich nur zwei Kreiskegel vorzustellen, von denen der eine auf dem andern auf epicykloidische, hypocykloidische oder pericykloidische Art abrollt.

Um diese Frage allgemein zu entscheiden, betrachte man die relative Bewegung der Impulsaxe in Bezug auf das mit dem Körper fest verbundene Koordinatensystem. Die Koordinaten $L, M, N$ des Impulspols in Bezug auf das bewegliche System sind nach S. 338 mit den Koordinaten $p, q, r$ des instantanen Drehpols durch die Gleichungen verknüpft

$$(62) \qquad L = Ap, \quad M = Bq, \quad N = Cr.$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs der Impulspol relativ zu dem in Bewegung begriffenen Körper eine Kurve beschreiben wird, welche zu der Polhodiekurve in dem Verwandtschaftsverhältnis der *Affinität* steht, und dafs diese Affinität die drei Koordinatenaxen des beweglichen Systems, dafs heifst, die drei Hauptaxen der Polhodiekurve zu *Doppellinien* hat. Hieraus folgt, dafs die von dem Impulspol in dem drehbaren Körper beschriebene Kurve, wir wollen sie nach dem Vorgange von Klein und Sommerfeld[1]) als die Impulskurve bezeichnen, ebenso wie die Polhodiekurve einen Zweig einer *Raumkurve vierter Ordnung* bildet, welche die Koordinatenebenen des beweglichen Systems zu Symmetrieebenen hat, und dafs sie ferner *in zwei ebene Kurven zerfällt*, deren Ebenen durch die Axe des mittleren Hauptträgheitsmoments hindurchgehen, sobald dies bei der zugehörigen Polhodiekurve eintritt.

Die Gleichungen der Impulskurve erhält man, wenn man in den Gleichungen (1) und (9) der Polhodiekurve für die Koordinaten $p, q, r$ des Drehpols ihre Werte

$$(63) \qquad p = \frac{L}{A}, \quad q = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{N}{C},$$

ausgedrückt in den Koordinaten $L, M, N$ des Impulspols, substituiert, wodurch sich die Gleichungen ergeben:

$$(64) \qquad \frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C} = 2h$$

und

$$(65) \qquad L^2 + M^2 + N^2 = G^2,$$

welche zeigen, dafs die Impulskurve eine sphärische Kurve ist, die aus der Kugel (65) durch das mit ihr konzentrische Ellipsoid (64)

---

1) Klein-Sommerfeld S. 123. Vgl. ferner: Maxwell, On a Dynamical Top, for exhibiting the phenomena of the motion of a system of invariable form about a fixed point, with some suggestions as to the Earth's motion. Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. 21. Part. IV. 1857. (Scientific Papers. Vol. 1. Cambridge. 1890. S. 248.)

ausgeschnitten wird. Hieraus ergiebt sich insbesondere, dafs *die beiden ebenen Kurven, aus denen sich die zerfallende Impulskurve zusammensetzt, zwei gröfste Halbkreise der Kugel (65) sind.*

Für den vorliegenden Zweck genügt es, den „*Impulskegel*", das heifst, den Kegel zu betrachten, der die Impulskurve zur Leitkurve und den Drehpunkt des Körpers zum Scheitel hat, und welcher also den geometrischen Ort der Impulsaxe bildet. Seine Gleichung findet man, wenn man aus den Gleichungen (64) und (65) der Impulskurve durch lineare Verknüpfung eine in $L$, $M$, $N$ *homogene* quadratische Gleichung ableitet. Dadurch ergiebt sich für den Impulskegel die Gleichung:

$$(66)\qquad \frac{1}{A}\left(\frac{G^2}{2h} - A\right)L^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{G^2}{2h} - B\right)M^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{G^2}{2h} - C\right)N^2 = 0.$$

Sie zeigt, dafs der Impulskegel ebenso wie der Polhodiekegel ein Kegel zweiter Ordnung ist, woraus noch folgt, dafs die Impulskurve als ein sphärischer Kegelschnitt bezeichnet werden darf.

Um die Lage des Impulskegels gegen den Polhodiekegel zu ermitteln, dessen Gleichung lautete:

$$(11)\qquad A\left(\frac{G^2}{2h} - A\right)p^2 + B\left(\frac{G^2}{2h} - B\right)q^2 + C\left(\frac{G^2}{2h} - C\right)r^2 = 0,$$

hat man wieder die beiden oben behandelten Hauptfälle (a) und (b) und den Grenzfall der trennenden Polhodie von einander zu unterscheiden. Die beiden Hauptfälle (a) und (b) waren dadurch charakterisiert, dafs in dem einen Falle

$$(a)\qquad A < \frac{G^2}{2h} < B < C \quad \text{und} \quad \delta > b,$$

in dem andern Falle dagegen

$$(b)\qquad A < B < \frac{G^2}{2h} < C \quad \text{und} \quad \delta < b \quad \text{war.}$$

In dem ersteren Falle (a), in welchem, wie oben (vgl. S. 354 f.) gezeigt ist, der Polhodiekegel die $x$-Axe umschliefst, schneide man die beiden Kegel mit einer zur $yz$-Ebene parallelen Ebene, welche von dieser den Abstand 1 hat, deren Gleichung also lautet:

$$(67)\qquad L = 1 \quad \text{oder} \quad p = 1.$$

Die Koordinaten $M$, $N$ und $q$, $r$ der beiden Schnittkurven genügen dann den Gleichungen:

$$(68)\qquad \frac{1}{A}\left(\frac{G^2}{2h} - A\right) = \frac{1}{B}\left(B - \frac{G^2}{2h}\right)M^2 + \frac{1}{C}\left(C - \frac{G^2}{2h}\right)N^2 \qquad \text{und}$$

$$(69)\qquad A\left(\frac{G^2}{2h} - A\right) = B\left(B - \frac{G^2}{2h}\right)q^2 + C\left(C - \frac{G^2}{2h}\right)r^2.$$

*Die Ebene (67) schneidet also den Impulskegel sowohl wie den Polhodiekegel in einer Ellipse;* und zwar besitzen deren Halbaxen $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ und $\mathfrak{b}_p$, $\mathfrak{c}_p$ die Werte:

$$\mathfrak{b}_i = \sqrt{\frac{B}{A}\,\frac{\frac{G^2}{2h} - A}{B - \frac{G^2}{2h}}}, \qquad \mathfrak{c}_i = \sqrt{\frac{C}{A}\,\frac{\frac{G^2}{2h} - A}{C - \frac{G^2}{2h}}}$$

und

$$\mathfrak{b}_p = \sqrt{\frac{A}{B}\,\frac{\frac{G^2}{2h} - A}{B - \frac{G^2}{2h}}}, \qquad \mathfrak{c}_p = \sqrt{\frac{A}{C}\,\frac{\frac{G^2}{2h} - A}{C - \frac{G^2}{2h}}}.$$

Zwischen den entsprechenden Halbaxen der beiden Ellipsen bestehen daher die Beziehungen:

$$\mathfrak{b}_i = \frac{B}{A}\,\mathfrak{b}_p, \qquad \mathfrak{c}_i = \frac{C}{A}\,\mathfrak{c}_p,$$

aus denen wegen $A < B < C$ die Ungleichungen folgen:

$$\mathfrak{b}_i > \mathfrak{b}_p, \qquad \mathfrak{c}_i > \mathfrak{c}_p. \tag{70}$$

Diese aber liefern das Ergebnis:

*In dem Falle* (a) *umschliefst der Impulskegel den Polhodiekegel. Es liegt also die Impulsaxe, das heifst, die Axe des Herpolhodiekegels während der ganzen Bewegung des Körpers aufserhalb des Polhodiekegels.*

Da nun aber ferner nach S. 367 dem Falle (a) ein epicykloidisches Abrollen des Polhodiekegels entspricht, und andererseits die epicykloidische Bewegungsform auch *nur* in dem Falle (a) auftritt, so kann man noch hinzufügen:

Beim kraftfreien starren Körper ist das epicykloidische Abrollen des Polhodiekegels auf dem Herpolhodiekegel stets von solcher Art, dafs die Axe des Herpolhodiekegels, einschliefslich ihrer Verlängerung über den Drehpunkt des Körpers hinaus, ganz aufserhalb des Polhodiekegels liegt[1]).

In dem zweiten Falle (b), in welchem, wie oben (vgl. S. 354 f.) gezeigt ist, der Polhodiekegel die $z$-Axe umschliefst, schneide man die beiden Kegel durch eine zur $xy$-Ebene parallele Ebene, welche von dieser den Abstand 1 hat, deren Gleichung also lautet:

$$N = 1 \quad \text{oder} \quad r = 1. \tag{71}$$

---

1) Danach wäre z. B. eine Bewegungsform, wie sie in dem Buche von Klein und Sommerfeld auf S. 53 durch die Figur 9 veranschaulicht wird, *für den Fall eines kraftfreien starren Körpers ausgeschlossen.*

Die Koordineten $L$, $M$ und $p$, $q$ der beiden Schnittkurven genügen dann den Gleichungen

$$(72)\qquad \frac{1}{A}\left(\frac{G^2}{2h} - A\right)L^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{G^2}{2h} - B\right)M^2 = \frac{1}{C}\left(C - \frac{G^2}{2h}\right) \quad \text{und}$$

$$(73)\qquad A\left(\frac{G^2}{2h} - A\right)p^2 + B\left(\frac{G^2}{2h} - C\right)\, q^2 = C\left(C - \frac{G^2}{2h}\right).$$

*Die Ebene (71) schneidet also wiederum sowohl den Impulskegel wie den Polhodiekegel in einer Ellipse*; und zwar besitzen die Halbaxen dieser beiden Ellipsen, sie mögen heifsen $\alpha_i$, $\beta_i$ und $\alpha_p$, $\beta_p$, die Werte:

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{A}{C}\,\frac{C - \frac{G^2}{2h}}{\frac{G^2}{2h} - A}}, \quad \beta_i = \sqrt{\frac{B}{C}\,\frac{C - \frac{G^2}{2h}}{\frac{G^2}{2h} - B}}$$

und

$$\alpha_p = \sqrt{\frac{C}{A}\,\frac{C - \frac{G^2}{2h}}{\frac{G^2}{2h} - A}}, \quad \beta_p = \sqrt{\frac{C}{B}\,\frac{C - \frac{G^2}{2h}}{\frac{G^2}{2h} - B}}.$$

Zwischen den entsprechenden Halbaxen der beiden Ellipsen herrschen daher die Beziehungen:

$$\alpha_i = \frac{A}{C}\alpha_p, \quad \beta_i = \frac{B}{C}\beta_p,$$

aus denen wegen $A < B < C$ die Ungleichungen folgen:

$$(74)\qquad \alpha_i < \alpha_p, \qquad \beta_i < \beta_p.$$

Diese aber liefern das Ergebnis:

*In dem Falle* (b) *wird der Impulskegel von dem Polhodiekegel umschlossen. Die Impulsaxe, das heifst die Axe des Herpolhodiekegels, liegt somit während der ganzen Bewegung des Körpers innerhalb des Polhodiekegels.*

Schliefslich bleibt noch die Bewegung in dem Grenzfall der trennenden Polhodie zu untersuchen. Für diesen Fall war nach S. 344 ff.

$$(19)\quad \frac{G^2}{2h} = B \qquad \text{und} \qquad (30)\quad \delta = b;$$

die Gleichung (66) des Impulskegels verwandelt sich daher in:

$$\frac{1}{A}(B - A)L^2 + \frac{1}{C}(B - C)N^2 = 0,$$

wofür man wegen $A < B < C$ besser schreiben wird:

(75) $$\frac{1}{A}(B - A)L^2 - \frac{1}{C}(C - B)N^2 = 0 \quad \text{oder}$$

(76) $$\frac{N}{L} = \pm \sqrt{\frac{C}{A}\frac{B - A}{C - B}}.$$

Der Impulskegel zerfällt also, wie oben schon angedeutet wurde, in ein reelles Ebenenpaar, dessen Ebenen durch die Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes hindurchgehen und mit der $xy$-Ebene, das heifst, mit der Ebene des kleinsten und mittleren Hauptträgheitsmomentes, zwei entgegengesetzt gleiche Neigungswinkel einschliefsen, die sich aus der Gleichung

(77) $$\operatorname{tg} \nu = \pm \sqrt{\frac{C}{A}\frac{B - A}{C - B}}$$

ergeben. Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung

(32) $$\operatorname{tg} \lambda = \pm \sqrt{\frac{A}{C}\frac{B - A}{C - B}}$$

für die Neigungswinkel $\lambda$, welche die Ebenen der trennenden Polhodie mit der $xy$-Ebene bilden, so ergiebt sich zwischen den Neigungswinkeln $\lambda$ und $\nu$, welche die Ebenenpaare des zerfallenden Polhodie- und Impulskegels mit der Ebene des kleinsten und mittleren Hauptträgheitsmomentes bilden, die Beziehung

(77) $$\operatorname{tg} \nu = \frac{C}{A} \operatorname{tg} \lambda,$$

oder wegen (27)

(78) $$\operatorname{tg} \nu = \frac{a^2}{c^2} \operatorname{tg} \lambda,$$

die man auch durch die Proportion ersetzen kann:

(79) $$\operatorname{tg} \nu : \operatorname{tg} \lambda = a^2 : c^2;$$

und multipliziert man diese Proportion mit der Proportion (36):

(36) $$\operatorname{tg} \lambda : \operatorname{tg} \mu = c : a,$$

so erhält man die neue Proportion

(80) $$\operatorname{tg} \nu : \operatorname{tg} \mu = a : c,$$

welche zeigt, *dafs die Neigungswinkel $\nu$, welche die Ebenen des zerfallenden Impulskegels mit der $xy$-Ebene bilden zu den Neigungswinkeln $\mu$, unter denen die Kreisschnitte des Ellipsoids der lebendigen Kraft gegen diese Ebene geneigt sind, in derselben Beziehung stehen, wie die Winkel $\mu$ zu den Neigungswinkeln $\lambda$, welche die Ebenen des*

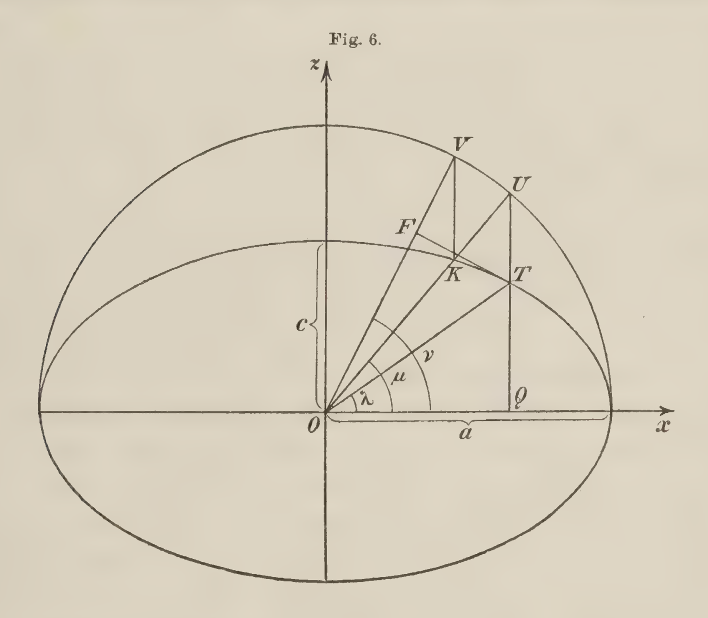
*zerfallenden Polhodiekegels mit der xy-Ebene einschliefsen* (vgl. S. 346 ff.). Man erhält daher den folgenden Satz:

Verzeichnet man in der Ebene der gröfsten oder kleinsten Halbaxe des Ellipsoids der lebendigen Kraft aufser der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{37}$$

welche diese Ebene aus dem Ellipsoide ausschneidet, die Spuren der beiden Ebenen des zerfallenden Impulskegels, so sind die Winkel, die diese Spuren mit der grofsen Axe

Fig. 6.




jener Ellipse einschliefsen, die exzentrischen Anomalieen der Punkte, in denen die Ellipse von den beiden Hauptkreisschnitten des Ellipsoids getroffen wird.

Ist also wieder $K$ einer der vier Punkte, welche die beiden Hauptkreisschnitte aus der Ellipse (37) ausschneiden (vgl. Fig. 6), und zieht man durch $K$ die Parallele zur kleinen Axe der Ellipse bis zum Schnittpunkt $V$ mit demjenigen Kreise, welcher diese Ellipse in den Endpunkten der grofsen Axe berührt, so ist $OV$ die Spur einer von den beiden Ebenen des zerfallenden Impulskegels.

Hat man bereits den Punkt $T$ konstruiert, in dem die Ellipse (37) von der Ebene der trennenden Polhodie geschnitten wird, die jener Ebene des Impulskegels entspricht, so kann man natürlich die Spur jener Ebene des zerfallenden Impulskegels auch dadurch finden, dafs

man im Punkte $T$ an die Ellipse die Tangente legt und auf diese vom Punkte $O$ aus das Lot $OF$ fällt. Dann mufs dieses Lot $OF$ der Geraden $OV$ angehören.

Aus der Lage der „Impulsebenen" gegen die „Polhodieebenen" kann man insbesondere die Folgerung ziehen:

Beim Abrollen einer Halbellipse der trennenden Polhodie auf der Herpolhodieebene liegt die Axe des Herpolhodiekegels stets in demjenigen von den vier Winkelräumen des zerfallenden Polhodiekegels, welcher die Axe des gröfsten Trägheitsmomentes enthält und zugleich der rollenden Halbellipse anliegt.

Berührt die Halbellipse schliefslich mit einem Endpunkte ihrer kleinen Axe die Herpolhodieebene, so fällt die Axe des Herpolhodiekegels mit dieser Axe der Halbellipse, das heifst, mit der Doppellinie des zerfallenden Polhodiekegels, zusammen.

Mit ein paar Worten möge hier endlich noch der bisher von der Betrachtung ausgeschlossene Fall gestreift werden, wo zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, wo also *das Trägheitsellipsoid und somit auch das Ellipsoid der lebendigen Kraft ein abgeplattetes oder ein gestrecktes Rotationsellipsoid ist.*

Denkt man sich *für den Fall eines abgeplatteten Rotationsellipsoids,* dessen Figurenaxe durch die $z$-Axe gebildet werden mag, in einer Meridianebene des Ellipsoids der lebendigen Kraft, etwa in der $zx$-Ebene, die Konstruktion der Spuren des Ebenenpaares der trennenden Polhodie wirklich ausgeführt (vgl. die Konstruktion auf S. 347 f. und die Figur 2), so fällt der Punkt $T$ auf den Punkt $A$; die beiden Ebenen des Ebenenpaares der trennenden Polhodie fallen also mit der Äquatorebene des abgeplatteten Rotationsellipsoids zusammen. Hieraus folgt:

Die Bewegung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt ist stets pericykloidisch, sobald sein Trägheitsellipsoid ein abgeplattetes Rotationsellipsoid ist.

Denn auch der Fall, wo die Bewegung um eine natürliche Drehaxe des Körpers erfolgt, nämlich entweder um die Figurenaxe oder um einen Durchmesser des Äquatorkreises, kann noch als Grenzfall einer pericykloidischen Bewegung aufgefafst werden.

Führt man andererseits *für den Fall eines gestreckten Rotationsellipsoids,* dessen Figurenaxe mit der $x$-Axe zusammenfällt, innerhalb einer Meridianebene des Ellipsoids der lebendigen Kraft, etwa in der $xz$-Ebene, die Konstruktion der Spuren des Ebenenpaares der

trennenden Polhodie wirklich aus (vgl. Fig. 2), so kommt der Punkt $T$ auf den Punkt $C$ zu liegen; die beiden Ebenen des Ebenenpaares der trennenden Polhodie fallen also wieder mit der Äquatorebene des Rotationsellipsoids zusammen. Da aber diese Ebene in diesem Falle die Ebene der beiden kleinsten Halbaxen ist, so hat man den Satz:

Die Bewegung eines kraftfreien starren Körpers um einen festen Punkt ist stets epicykloidisch, sobald sein Trägheitsellipsoid ein gestrecktes Rotationsellipsoid ist.

Denn auch hier kann die Bewegung um eine natürliche Drehaxe noch als Grenzfall einer epicykloidischen Bewegung angesehen werden.[1])

## Elfter Abschnitt.

### Die Konstanten der drei Apparate.

Betrachtet man in den Gleichungen (1) und (9) für das Ellipsoid der lebendigen Kraft und der Flächen die Hauptträgheitsmomente $A$, $B$, $C$ als unbenannte Gröfsen, denkt sich aber die Koordinaten $p$, $q$, $r$ des Drehpols in cm ausgedrückt, so hat man sich den konstanten Wert $h$ der lebendigen Kraft in qcm und die Stärke $G$ des Impulsmomentes in cm gegeben zu denken.

Nun gehören alle drei Apparate einem und demselben Trägheitsellipsoide zu, welches den Hauptträgheitsmomenten

$$A = \frac{1}{0{,}04}, \quad B = \frac{1}{0{,}0196}, \quad C = \frac{1}{0{,}0144} \tag{81}$$

entspricht. Aber auch die lebendige Kraft ist für alle drei Apparate gleich grofs angenommen und besitzt den Wert

$$h = 5000 \text{ qcm}. \tag{82}$$

Infolgedessen *liegen die drei Polhodiekurven auch auf demselben Ellipsoide der lebendigen Kraft*, auf dem Ellipsoide nämlich, dessen Halbaxen den Gleichungen (26) zufolge die Werte aufweisen:

$$a = \sqrt{\frac{2h}{A}} = 20 \text{ cm}, \quad b = \sqrt{\frac{2h}{B}} = 14 \text{ cm}, \quad c = \sqrt{\frac{2h}{C}} = 12 \text{ cm}. \tag{83}$$

---

1) Es mag an dieser Stelle noch bemerkt werden, dafs die in den Vorlesungen über Dynamik von H. v. Helmholtz gegebene Darstellung der Drehung eines kraftfreien starren Körpers eine Verwechselung von Impulspol und Drehpol enthält, infolge deren die sonst schöne Behandlung des Gegenstandes zu falschen Ergebnissen geführt hat. Vgl. H. v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. I, Abt. 2, Die Dynamik diskreter Massenpunkte, herausgegeben von Krigar-Menzel. Leipzig, 1898. S. 327 f. Auch die auf S. 326 gegebenen Figuren bedürfen einer Berichtigung.

Die Bewegungen, welche durch die drei Apparate dargestellt werden, unterscheiden sich also von einander nur durch den Wert der Stärke $G$ des Impulsmomentes.

Bei dem Apparat für die *epicykloidische Bewegung des Polhodiekegels* (Apparat 1) ist das Quadrat des Impulsmomentes

$$G^2 = 435\,600 \text{ qcm}$$

gewählt, sodaſs der Abstand $\delta$ des Drehpunktes von der Herpolhodieebene mit Rücksicht auf (16)

$$\delta = \frac{2h}{G} = 15{,}1515 \text{ cm} \tag{85}$$

wird.

Bei dem Apparat für die *pericykloidische Bewegung des Polhodiekegels* (Apparat 2) ist

$$G^2 = 595\,240 \text{ qcm} \tag{86}$$

angenommen.[1]) Es wird somit hier

$$\delta = \frac{2h}{G} = 12{,}961 \text{ cm.} \tag{87}$$

Für die *Bewegung der trennenden Polhodie* (Apparat 3) endlich ist das Quadrat des Impulsmomentes

$$G^2 = 2h \cdot B = 510\,204 \text{ qcm.} \tag{88}$$

Also wird in diesem Falle

$$\delta = \frac{2h}{G} = \frac{2h}{\sqrt{2h \cdot B}} = \sqrt{\frac{2h}{B}} = b = 14 \text{ cm.} \tag{89}$$

Die Maſse der vier Figuren 1, 2, 3 und 6 entsprechen genau denen der drei Apparate; nur sind alle Längen im Verhältnis 187 : 1000 verkleinert. Bei den Figuren 1 und 3 sind ferner die zur Zeichenebene senkrechten Geraden in der Verkürzung 1 : 2 und mit der Neigung $\frac{\pi}{3}$ gegen die von rechts nach links laufende Gerade dargestellt.

---

1) Es ist derjenige Wert von $G$ gewählt, für welchen bei der pericykloidischen Bewegung des Polhodiekegels der kleinste Leitstrahl der Herpolhodiekurve sein Maximum hat. Dies tritt nach W. Heſs (Dissertation, S. 16) ein, wenn

$$\frac{G^2}{2h} = \sqrt{BC}$$

ist.

# Kontinuierliche Parabelträger.

Von Baurat ADOLF FRANCKE in Herzberg a. H.

Mit 28 Figuren auf einer Doppeltafel in Lithographie.

Wir setzen für den aus einzelnen Bogenträgern zusammengesetzten, über den Stützen gekuppelten, kontinuierlichen Träger unverschiebliche Stützpunkte voraus, betrachten also insbesondere die Mittelstützen als in jeder Richtung unverrückbare Gelenkpunkte, um welche also die beiden, über der Mittelstütze mit einander festverbundenen, Einzelbögen bei elastischer Erregung des kontinuierlichen Gesamtträgers eine gemeinsame elastische Drehung auszuführen gezwungen sind.

Auf Grund eben dieses Zwanges gemeinsamer Drehung der Bogenenden über den Mittelstützen können, in ganz analoger Weise wie für den geraden kontinuierlichen Balken, die allgemeinen Bestimmungsgleichungen für die über den Stützen erzeugten Biegungsmomente aufgestellt werden.

Es bezeichne $\zeta$ den $E$fachen Wert der elastischen Drehung $\varphi$, welche ein an dem einen Ende eines Einzelbogens mit zwei Kämpfergelenken angreifendes Kämpfermoment $M = 1$ an dieser seiner Angriffsstelle erzeugt, $\theta$ aber den $E$fachen Wert derjenigen elastischen Drehung $\varphi'$, welche dieses Kämpfermoment $M = 1$ am entgegengesetzten Kämpfer erzeugt, $\varkappa$, oder im Sonderfalle $\varkappa'$, $\varkappa_q$, $\varkappa_P$, aber bedeute allgemein den $E$fachen Wert derjenigen elastischen Kämpferdrehung, welche irgendwelche, etwa auf dem Bogen aufstehende Belastung $P = 1$, $q = 1$ am Einzelbogen mit zwei, freien, Kämpfergelenkpunkten hervorruft, und es sollen im folgenden diese Werte $\zeta$, $\theta$, $\varkappa$ als positiv gelten, wenn die elastische Drehung, vom Kämpferdrehpunkte ab gerechnet, nach innen gerichtet ist.

Alsdann gilt, Abb. 1, zwischen je drei sich folgenden Stützenmomenten $M_1$, $M_2$, $M_3$ die Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad M_1\theta_2 + M_2(\zeta_2 + \zeta_3) + M_3\theta_3 = -\Sigma P\varkappa,$$

wobei der Index 2, 3 von $\theta$, $\zeta$ denjenigen Bogen anzeigen soll, auf welchen sich die Werte $\theta$, $\zeta$ beziehen.

Diese Gleichungen (I) folgen aus dem Zwange gemeinsamer Drehung im Stützpunkte $M_2$, da die elastische Drehung $\varphi_2$ des Bogens II:

$$\varphi_2 E = M_1\theta_2 + P_2\varkappa_2' + M_2\zeta$$

entgegengesetzt gleich sein mufs der entsprechenden Drehung des Bogens III:

$$\varphi_3 E = M_2 \zeta_3 + M_3 \theta_3 + P_3 \varkappa_3$$

und sind allgemein sinngemäfs gültig für beliebige Bogenformen, insbesondere also auch für Kreisbogen- und für Parabelträger.

Um die Gleichungen (I) anwenden zu können, ist eine allgemeine Darstellung der Werte $\zeta$, $\theta$, $\varkappa$ erforderlich, nnd leiten wir daher im folgenden diese Werte zunächst für die Kreisbogenform, und daraus für die Parabel ab.

### 1. Angriff eines Kämpfermomentes.

Bei zur Mittellinie des Bogens symmetrischer Ausbildung desselben, wird der Wert $(\zeta + \theta)$ stets am einfachsten gefunden durch Betrachtung des symmetrischen Angriffes je eines Kämpfermomentes $M = +1$ an jedem Kämpfer, und die Betrachtung dieses symmetrischen Belastungsfalles liefert zugleich, in einfachster Herleitung, den doppelten Wert des von einem Kämpfermoment $M = 1$ erzeugten, in Richtung der Schlufssehne wirkenden, Bogenschubes $H = \eta \frac{M}{r}$.

Für den Kreisbogenträger des unveränderlichen Querschnittes vom Trägheitsmomente $J$ gelten für den symmetrischen Angriff zweier Kämpfermomente $M = 1$ die Gleichungen Abb. 2; für die in Richtung des Halbmessers gemessene elastische Durchbiegung $z$:

$$\frac{EJ}{Mr^2}\frac{d^2 z}{d\omega^2} = 2\eta(\cos\omega - \cos\beta) - 1$$

$$\frac{EJ}{Mr^2}\frac{dz}{d\omega} = 2\eta(\sin\omega - \omega\cos\beta) - \omega$$

$$\frac{EJ}{Mr^2} z = 2\eta\left(\cos\beta - \cos\omega - \frac{(\omega^2-\beta^2)\cos\beta}{2}\right) - \frac{(\omega^2-\beta^2)}{2}$$

$$\frac{EJ}{Mr^2} w = 2\eta\left(\omega\cos\beta - \sin\omega - \left(\frac{\omega^3}{6} - \frac{\omega\beta^2}{2}\right)\cos\beta\right) - \frac{\omega^3}{6} + \frac{\omega\beta^2}{2}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, da $w = 0$ für $\omega = \beta$, der Wert $\eta$ des von einem Kämpfermoment $M = 1$ erzeugten Bogenschubes:

$$2\eta = \frac{\beta^3}{3[\beta]},$$

wenn $[\beta] = \sin\beta - \left(\beta + \frac{\beta^3}{3}\right)\cos\beta$ gesetzt wird.

Aus $\frac{EJ}{Mr^2}\frac{dz}{d\omega}_{\omega=\beta} = 2\eta(\sin\beta - \beta\cos\beta) - \beta$ aber ergibt sich der Wert:

$$\frac{J}{Mr}(\xi + \theta) = \beta - 2\eta(\sin\beta - \beta\cos\beta) = \beta - \frac{\beta^3(\sin\beta - \beta\cos\beta)}{3[\beta]}.$$

Beim antisymmetrischen Angriff zweier Kämpfermomente $M = \pm 1$, sind alle Scheitelwerte symmetrischer Ordnung $M$, $H$, $z = 0$, und es gelten, Abb. 3, die Gleichungen:

$$\frac{EJ}{r^3}\frac{d^3z}{d\omega^3} = Q_0\cos\omega; \quad Q_0 = \frac{M}{r\sin\beta} = \frac{1}{r\sin\beta}$$

$$\frac{EJ}{r^2}\frac{d^2z}{d\omega^2} = \frac{\sin\omega}{\sin\beta}$$

$$\frac{EJ}{r^2}\frac{dz}{d\omega} = c - \frac{\cos\omega}{\sin\beta} = \frac{\lambda}{\beta} - \frac{\cos\omega}{\sin\beta}$$

$$\frac{EJ}{r^2}z = \frac{\omega}{\beta} - \frac{\sin\omega}{\sin\beta},$$

woraus, aus $\frac{EJ}{r^2}\frac{dz}{d\omega}$ für $\omega = \beta$, der Wert folgt:

$$\frac{J}{Mr}(\xi - \theta) = \frac{1}{\beta} - \operatorname{cotang}\beta.$$

Wir beziehen nun im folgenden die für die Kreisbogenform, also für Kurven der Scheitelgleichung $x^2 = 2ry - y^2$, abgeleiteten Formeln in der Weise auf die Parabel, dafs wir zunächst die für sehr flache Kreisbogen gültigen Näherungs- und Rechnungsformeln dadurch darstellen, dafs wir die Winkelfunktionen durch ihre Reihen uns ersetzt denken und nur die niedrigsten Potenzen berücksichtigen, die Werte $r\beta$ mit den Bogenlängen $s$ vertauschen, dann aber diese Formeln, weil die Kreisgleichung für genügend grofse Werte $r$ in die Parabelgleichung übergeht, als rechnungsmäfsige Annäherungsformeln auf den Parabelträger anwenden, bei der Beziehung $x^2 = 2ry$, $l^2 = 2rh$, $r = \frac{l^2}{2h}$.

Wir erhalten auf diesem Wege für den Angriff eines Kämpfermomentes $M = 1$ an dem Parabelbogen, Abb. 4, die Werte:

$$H = \frac{5}{8}\frac{l^2 M}{s^2 h}$$

$$J(\xi + \theta) = \frac{s}{6}M$$

$$J(\xi - \theta) = \frac{s}{3}M$$

oder, anders geschrieben:

$$J\xi = \frac{s}{4}; \quad J\theta = -\frac{s}{12}.$$

## 2. Belastung durch lotrechte Einzellasten.

Eine im Bogenpunkte $\alpha$ des Kreisbogenträgers, Abb. 5, hängende lotrechte Einzellast $P = 1$ erzeugt den Bogenschub $H = \eta P$ mit dem Werte:

$$\eta = \frac{\cos\beta + \left(\beta + \frac{\beta^3}{3}\right)\sin\beta - \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3}\right)\sin\alpha - \cos\alpha - \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}\right)(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha)}{2[\beta]}$$

und erzeugt am linken Kämpfer die elastische Drehung $\varphi = \frac{\varkappa}{E}$, am rechten $\varphi' = \frac{\varkappa'}{E}$ mit den Werten:

$$\frac{J}{r^2}(\varkappa + \varkappa') = \beta\sin\beta + \cos\beta - \alpha\sin\alpha - \cos\alpha - 2\eta(\sin\beta - \beta\cos\beta)$$

$$\frac{J}{r^2}(\varkappa - \varkappa') = -\sin\alpha\left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} + \operatorname{ctg}\beta\right) + \frac{\alpha}{\beta}\cos\alpha.$$

Die Werte $\eta$, $(\varkappa + \varkappa')$ werden auch hier am einfachsten bei Betrachtung des symmetrischen Belastungsfalles aus der Gleichung:

$$\frac{EJ}{Pr^2}\frac{d^3 z}{d\omega^3} = -2\eta\sin\omega, \quad +\cos\omega$$

und deren Integralen abgeleitet, während der Wert $\varkappa - \varkappa'$ zweckmäfsig aus dem antisymmetrischen Belastungsfall auf Grund der Gleichung:

$$\frac{EJ}{Pr^3}\frac{d^2 z}{d\omega^2} = \sin\omega\frac{(\sin\alpha - \sin\beta)}{\sin\beta}, \quad +\sin\omega - \sin\alpha$$

ermittelt werden kann.

Für die Parabelform leiten wir daraus die Werte ab, Abb. 6:

$$\eta = \frac{H}{P} = \frac{5l^2(s^2 - a^2)(5s^2 - a^2)}{64hs^5}$$

$$J(\varkappa + \varkappa') = \frac{(s^2 - a^2)(5a^2 - s^2)}{48s^2}$$

$$J(\varkappa - \varkappa') = \frac{-a(s^2 - a^2)}{6s}$$

oder anders geschrieben:

$$J\varkappa = \frac{(s^2 - a^2)(5a^2 - s^2 - 8as)}{96s^2}$$

$$J\varkappa' = \frac{(s^2 - a^2)(5a^2 - s^2 + 8as)}{96s^2}.$$

Durch Vertauschung von $a$ mit $-a$ gehen die Formeln für $\varkappa$ und $\varkappa'$, die eine in die andere über und gilt stets für diejenige Bogenhälfte, auf welcher $P$ steht, die hier niedergeschriebene Formel $J\varkappa'$ mit positivem Zahlwerte $+8as$ im Zähler.

Seien beispielsweise, Abb. 7, zwei gleiche Parabelträger, des gleichen Querschnittes, mit einander gekuppelt, so kann das über der Mittelstütze, durch eine im Bogen I hängende lotrechte Last $P$ erzeugte Biegungsmoment $M$ berechnet werden nach der, aus der allgemeinen Gleichung (I) hervorgehenden Gleichung:

$$2M\zeta = -\varkappa P,$$

welche für die im Bogenpunkte $a$ hängende Einzellast $P$ die Sonderform annimmt:

$$M = \frac{-(s^2 - a^2)(5a^2 - s^2 \pm 8as)}{48s^3} P,$$

wobei in $\pm 8as$ das Vorzeichen $+$ zu wählen ist, wenn $P$, wie in der Abb. gezeichnet, rechts vom Scheitel steht, das Vorzeichen $-$, wenn $P$ links steht.

Für Scheitelstellung, $a = 0$, ergiebt sich mithin der Wert: $M = +\frac{sP}{48}$ und man erkennt, daſs hierbei der Bogen II, in Folge des Angriffs des Kämpfermomentes $M = \frac{sP}{48}$ einen Bogenschub

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{5}{8}\frac{l^2 M}{s^2 h} = \frac{5}{384}\frac{l^2}{sh} P$$

zu tragen haben würde, während der Bogenschub $H_{\mathrm{I}}$ des Bogens I betragen würde $H_{\mathrm{I}} = \left(\frac{25}{64} + \frac{5}{384}\right)\frac{l^2 P}{sh}$, mithin, verglichen mit dem entsprechenden Schub $H$ des freien, ungekuppelten, Einzelbogens um den Wert $\frac{5}{384}\frac{l^2 P}{sh}$ anwachsen würde.

Um zu entscheiden, welche Strecken des Bogens I mit lotrechten Lasten zu besetzen sind, damit hierdurch im Bogen II die höchstmöglichen Wirkungen hervorgerufen werden, betrachten wir die Wurzeln der Gleichung:

$$a^2 + \frac{8}{5}as - \frac{s^2}{5} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} &= -0{,}8 + \sqrt{0{,}64 + 0{,}2} \\ &= -0{,}8 + \sqrt{0{,}84} \\ &= -0{,}8 + 0{,}9165 = 0{,}1165 \end{aligned}$$

und ersehen, daſs, Abb. 8, für $a_1 = 0{,}1165s$, die Strecke $AB$ belastet sein muſs, um im Bogen II den gröſsten positiven Schub $H$, sowie das gröſste Kämpfermoment $M$ zu erzeugen. Würde aber die Strecke $BC$ des Bogens I mit möglichst vielen Lasten besetzt werden, so würde

im Bogen II der gröſste negative Bogenschub $H_{II}$ und über der Mittelstütze das gröſste negative Biegungsmoment erzeugt werden, deren absoluter Zahlenwert den entsprechenden, bei Belastung der Strecke $AB$ erzeugten positiven Werten genau gleich sein würde, wenn für die Strecken $BC$, $AB$ gleichmäſsige Streckenbelastung $q$ angenommen wird.

Zieht man auch die mögliche eigene Belastung des Bogens II in Betracht, so erkennt man, daſs der gröſste positive Bogenschub im Bogen II entstehen wird, wenn dieser Bogen voll belastet wird und auf dem Bogen I die Strecke $AB$ mit möglichst vielen Lasten besetzt wird, die Strecke $BC$ dieses Bogens aber unbelastet bleibt.

Um nun die Wirkung solcher, auf einzelne Strecken verteilter lotrechter Belastungen $q$ am einfachsten den Zahlenwerten nach feststellen zu können, betrachten wir im folgenden den Einzelbogen unter der Wirkung beliebig verteilter Streckenbelastung.

### 3. Wirkung streckenweiser lotrechter Belastung.

Für volle Belastung, Abb. 9, des Parabel-Einzelträgers gelten die Werte:

$$H = \frac{q l^2}{2h}, \quad \varkappa = 0, \quad \varkappa^1 = 0.$$

Daher ein, in einen kontinuierlichen Träger eingeschalteter Parabelträger bei voller gleichmäſsiger Belastung $q$ keinerlei Kräfte oder Beanspruchungen auf die anschlieſsenden Bogenträger überträgt.

Für Belastung einer Hälfte des Parabelträgers, Abb. 10, gelten die Werte:

$$H = q \frac{l^2}{4h}$$

$$J\varkappa = -J\varkappa^1 = -\frac{s^3}{48},$$

wobei der positive Wert stets auf die belastete, der negative auf die unbelastete Bogenseite zu beziehen ist.

Für Belastung der Parabel auf der, vom Scheitelpunkt ab gezählten Bogenstrecke $a$, Abb. 11, gelten die Werte:

$$\frac{H}{q} = \frac{l^2 a (25 s^4 - 10 a^2 s^2 + a^4)}{64 h s^5} \tag{1}$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} J\varkappa' &= \frac{+ 2 a^2 s (2 \beta^2 - a^2) - a (s^2 - a^2)^2}{96 h s^5} \\ J\varkappa &= \frac{- 2 a^2 s (2 s^2 - a^2) - a (s^2 - a^2)^2}{96 s^2}, \end{aligned}$$

wie aus den entsprechenden für die Kreisform, am einfachsten durch Betrachtung des symmetrischen, sowie antisymmetrischen Belastungsfalles zu gewinnenden Gleichungen hergeleitet werden kann.

Von den Formeln (2) gilt der Wert $J\varkappa'$ stets für die belastete, $J\varkappa$ für die unbelastete Bogenseite. Diese Formeln (1) und (2) sind in Bezug auf die Symmetrieachse des Bogens als einseitig gültige Gleichungen, für absolute, positive Längen $a$ anzusehen. Eine Vertauschung von $a$ mit $-a$ verwandelt die Werte $\varkappa$ und $\varkappa'$, den einen in den andern mit Umkehrung des Vorzeichens.

Die Wirkungen nicht am Scheitelpunkt beginnender Belastungen können sinngemäfs aus den Summen oder Unterschieden der Wirkungen am Scheitel beginnender Belastungen dargestellt werden.

Insbesondere gilt beispielsweise für den Belastungsfall der Abb. 12:

$$(1) \qquad \frac{H}{q} = \frac{l^2 a(25 s^4 - 10 a^2 s^2 + a^4)}{32 h s^5}$$

$$(2) \qquad J\varkappa = J\varkappa' = \frac{-a(s^2 - a^2)^2}{48 s^2},$$

während für den, die Belastung der Abb. 12 zur vollen Belastung ergänzenden Belastungsfall der Abb. 13 gilt:

$$(1) \qquad \frac{H}{q} = \frac{l^2(16 s^5 + 10 a^3 s^2 - 25 a s^4 - a^5)}{32 h s^5}$$

$$(2) \qquad J\varkappa = J\varkappa' = \frac{+a(s^2 - a^2)^2}{48 s^2}.$$

Für den, Abb. 14 dargestellten Belastungsfall gelten die Werte:

$$(1) \qquad \frac{H}{q} = \frac{l^2 \{16 s^5 + 25 a s^4 - 10 a^3 s^2 + a^5\}}{64 h s^5}$$

$$(2) \qquad \frac{J\varkappa}{q} = \frac{2 s^5 - a(s^2 - a^2)^2 - 2 a^2 s(2 s^2 - a^2)}{96 s^2}$$

$$\frac{J\varkappa'}{q} = \frac{2 a^2 s(2 s^2 - a^2) - 2 s^5 - a(s^2 - a^2)^2}{96 s^2},$$

während für die, diesen Belastungsfall der Abb. 14 ergänzende, Belastung der Abb. 15 die Formeln anzuwenden sind:

$$(1) \qquad \frac{H}{q} = \frac{l^2 \{16 s^5 - 25 a s^4 + 10 a^3 s^2 - a^5\}}{64 h s^5}$$

$$(2) \qquad \frac{J\varkappa}{q} = \frac{2 a^2 s(2 s^2 - a^2) + a(s^2 - a^2) - 2 s^5}{96 s^2}$$

$$\frac{J\varkappa'}{q} = \frac{2 s^5 + a(s^2 - a^2)^2 - 2 a^2 s(2 s^2 - a^2)}{96 s^2}.$$

Um daher für den gekuppelten Parabelträger der Abb. 8 das gröfste Biegungsmoment über der Mittelstütze auszurechnen, haben wir entweder, Abb. 16, die beiden Strecken $AB$, für $a = 0{,}1165\,s$, voll zu belasten, oder Abb. 17, die Ergänzungsstrecke $BB$ dieser beiden Strecken.

Die Belastung der Abb. 26 ergiebt das gröfste positive Moment $M_m$, diejenige der Abb. 17 das gröfste negative Moment vom gleichen absoluten Zahlenwert.

Setzt man den Zahlenwert $a = 0{,}1165 s$ ein in die betreffenden Gleichungen, so erhält man in runder Rechnung:

$$M_m = \frac{0{,}7\,s^2 q}{16}.$$

Die Stützpunkte kontinuierlicher Bogenträger liegen häufig, z. B. bei Gefällen oder Steigungen der Bahnen, in verschiedenen Höhen. Namentlich pflegen auch an und für sich die Schlufsbogen, Abb. 18, als Ausleger mit höher liegender Schlufsstütze angeordnet zu werden. Für solche Fälle, sowie auch allgemein dann, wenn seitliche Beanspruchung durch Wind- oder Bremswirkung in Frage kommen sollte, genügt keineswegs die Betrachtung lotrechter, gegen die Bogenschlufssehne rechtwinkelig gerichteter Belastungskräfte, vielmehr wird alsdann auch die Wirkung parallel zur Schlufssehne gerichteter Seitenkräfte zu beachten sein.

## 4. Wirkung einer parallel zur Schlufssehne gerichteten Kraft auf den Parabelbogen mit zwei Kämpfergelenken.

Die den Parabelbogen der Abb. 19 im Bogenpunkte $a$ angreifende, wagerechte Einzelkraft $S = 1$ erzeugt im Bogen die beiden wagerechten Kämpferschübe:

$$H = \frac{1}{2} - \frac{a^3(5s^2 - a^2)}{8s^5}$$

$$H' = -\frac{1}{2} - \frac{a^3(5s^2 - a^2)}{8s^5}$$

und verbiegt den Bogen mit den für die elastischen Drehungen an den Kämpfern gültigen Werten:

$$J(\varkappa' + \varkappa) = \frac{h a^3 (s^2 - a^2)}{6 l^2 s^2}$$

$$J(\varkappa' - \varkappa) = \frac{h (s^2 - a^2)(s^2 + 3a^2)}{12 l^2 s}$$

oder anders geschrieben:

$$J\varkappa' = \frac{h(s^2 - a^2)(s^3 + 3a^2s + 2a^3)}{24l^2s^2}$$

$$J\varkappa = \frac{h(s^2 - a^2)(2a^3 - 3a^2s - s^3)}{24l^2s^2}.$$

Der Abschlufs eines kontinuierlichen Bogenträgers wird häufig durch ein Widerlager mit fester Einmauerung bewirkt. Es wird daher im folgenden betrachtet:

### 5. Der Bogenträger mit einseitig fester Einmauerung.

Die Kräfteverteilung in einem solchen Bogen, Abb. 20, dessen eines Widerlager $A$ einen, unverschieblichen, Gelenkpunkt bildet, während das zweite Widerlager $B$ undrehbar und unverschiebbar eingemauert ist, kann zwar, für jede beliebige Belastung oder Inanspruchnahme des Bogens, stets für sich auf Grund der für die in Frage kommende Belastung gültigen Gleichungen der elastischen Bewegung des Bogens unvermittelt festgestellt werden.

Zur Vermeidung jedoch derartiger, sich im allgemeinen nicht besonders einfach gestaltender Rechnungsausführungen, empfiehlt es sich, die Kräfteverteilung in einem solchen Bogenträger festzustellen auf Grund der einfachen Überlegung, dafs man einen solchen Bogen mit festem undrehbaren Widerlager $B$ betrachten und behandeln kann, wie einen Bogen mit Kämpfergelenk $B$, an welchem ein Kämpfermoment angreift, so zwar, dafs bei $B$ die elastische Drehung $\varphi = 0$ erreicht wird, Abb. 21.

Die Kräfteverteilung kann daher durch einfache Anwendung der bereits bekannten, für den Bogen mit zwei Kämpfergelenken gültigen Formeln ermittelt werden unter Erfüllung der Bedingung für den undrehbaren Kämpferpunkt: $\varphi = 0$ oder $M\zeta + \Sigma P\varkappa = 0$.

Wir fanden beispielsweise für den Parabelbogen den Wert $J\zeta = \frac{s}{4}$, und es entspricht dem Angriffe einer lotrechten Scheitellast $P$ der Wert der elastischen Kämpferdrehung $J\varkappa = -\frac{s^2}{96}$, daher im Parabelbogen der Abb. 20 durch die Scheitellast $P$ am undrehbaren Kämpfer $B$ das innere Biegungsmoment $M = -\frac{\varkappa}{\zeta}P = \frac{sP}{24}$ erzeugt wird. Und um nun die Kräfteverteilung in dem, statisch zweifach unbestimmten Bogen der Abb. 20, allseitig festzustellen, erübrigt nur noch die Angabe des entstehenden Gesamtbogenschubes $H$, welcher sich zusammenzählt aus dem, im Bogen mit zwei Kämpfergelenken durch $P$ erzeugten Schub

$H = \frac{25 l^2 P}{64 h s}$ und dem, durch Angriff eines Kämpfermomentes $M = \frac{sP}{24}$ erzeugten Schubes $H = \frac{5 l^2 M}{8 h s^2} = \frac{5 l^2 P}{192 h s}$, so daſs mithin der Bogenschub entsteht $H = \frac{5 l^2 P}{12 h s}$. Betrachten wir den Parabelbogen mit einseitiger Einmauerung bei lotrechter Streckenbelastung $q$, so finden wir für volle Bogenbelastung das Kämpfermoment $M = 0$.

Ist eine Bogenhälfte, Abb. 22, belastet, so erhalten wir $M = \pm \frac{qs^2}{12}$, je nachdem die Bogenseite mit Kämpfergelenk, oder die Seite mit fester Einmauerung belastet wurde.

Im Belastungsfalle der Abb. 23 wird das Kämpfermoment $M$ erzeugt:

$$M = \frac{2s^5 + a(s^2 - a^2)^2 - 2a^2 s(2s^2 - a^2)}{24 s^3} q$$

und das entgegengesetzt gleiche bei Belastung der Ergänzungsstrecke.

Für $a = 0{,}1165\, s$ erhält man die höchstmöglichen Werte $M$. Für den Angriff eines Kämpfermomentes $M_1$ im Kämpfergelenke $A$ des Parabelbogens gilt die Beziehung $M_1 \theta + M_2 \zeta = 0$; $-\frac{M_1 s}{12} + \frac{M_2 s}{4} = 0$

$$M_2 = \frac{M_1}{3}.$$

Wäre daher in dem, bereits vorhin in Abb. 7 u. 8 betrachteten, gekuppelten Parabelträger das rechte Endwiderlager, Abb. 25, undrehbar eingemauert, so würden bei Belastung der ersten Öffnung durch eine lotrechte Einzellast $P$ die beiden allgemeinen Momentengleichungen gelten:

$$2 M_1 \zeta + M_2 \theta = - P \varkappa$$

$$M_1 \theta + M_2 \zeta = 0,$$

woraus die Werte der beiden Biegungsmomente $M_1$ und $M_2$ berechnet werden können.

Für Scheitelstellung einer Einzellast $P$ auf dem ersten Bogen ergeben sich z. B. die bestimmten Gleichungen:

$$M_1 \frac{s}{2} - M_2 \frac{s}{12} = \frac{Ps^2}{96}$$

$$M_2 = \frac{M_1}{3},$$

woraus folgt:

$$M_1 = \frac{3}{136} Ps; \; M_2 = \frac{Ps}{136}.$$

Stände aber die lotrechte Einzellast $P$ auf dem zweiten Bogen mit eingemauertem Widerlager, so würden die allgemeinen Gleichungen gelten:

$$2M_1\zeta + M_2\theta = -P\varkappa_2$$
$$M_1\theta + M_2\zeta = -P\varkappa_2'$$

und bei Scheitelstellung der Last $P$ würden wir daher die beiden bestimmten Zahlengleichungen erhalten:

$$\frac{M_1 s}{2} - M_2\frac{s}{12} = \frac{Ps^2}{96}$$
$$-\frac{M_1 s}{12} + \frac{M_2 s}{4} = \frac{Ps^2}{96},$$

woraus die Werte folgen:

$$M_1 = \frac{Ps}{34};\ M_2 = \frac{7}{136}Ps.$$

Wäre, Abb. 26, auch noch das linksseitige Endwiderlager undrehbar eingemauert, so würde die Konstruktion, statisch betrachtet, fünffach unbestimmt sein in Bezug auf die durch eine Last $P$ erzeugte Kräfteverteilung.

Steht nun diese Last $P$ z. B. auf der ersten Öffnung, so gelten die Gleichungen

$$M_0\zeta + M_1\theta + P\varkappa = 0$$
$$(3)\qquad M_0\theta + 2M_1\zeta + M_2\theta = -P\varkappa'$$
$$M_1\theta + M_2\zeta = 0.$$

Mit Hilfe dieser drei Gleichungen können, bei jeder Stellung der Last $P$, die drei Momente $M_0$, $M_1$, $M_2$ leicht ermittelt werden. Sind aber diese Kämpfermomente bekannt, so kann nach den gegebenen Formeln sofort auch der Bogenschub $H$ für jeden der beiden Bögen bestimmt und nach Bestimmung dieser fünf Kräftegröfsen, nämlich der drei Stützenmomente und der zwei Bögenschübe ist die fünffache statische Unbestimmtheit gehoben.

Bei Mittelstellung der Last $P$ auf Bogen I ergeben sich z. B. die bestimmten Momentengleichungen:

$$\frac{M_0}{4} - \frac{M_1}{12} = \frac{Ps}{96}$$
$$-\frac{M_0}{12} + \frac{M_1}{2} - \frac{M_2}{12} = \frac{Ps}{96}$$
$$M_2 = \frac{M_1}{3},$$

woraus die Momentenwerte folgen:

$$M_0 = \frac{5\,Ps}{96}$$

$$M_1 = \frac{Ps}{32}$$

$$M_2 = \frac{Ps}{96}.$$

Um zu entscheiden, bei welcher Lastverteilung die Einwirkung des einen Bogenträgers auf den andern eine möglichst grofse wird, stelle man fest, bei welcher Belastung des ersten Bogens das Mittelstützenmoment möglichst grofs wird. Zu dem Zwecke betrachte man, bei willkürlicher Stellung der Last $P$, also bei unbestimmt gelassenen Werten $\varkappa$, $\varkappa'$ den allgemeinen, aus den Gleichungen (3) hervorgehenden Wert $M_1$:

$$\frac{s\,M_1}{P} = -\tfrac{3}{4}(\varkappa + 3\varkappa^1)$$

und man erkennt, dafs die Gleichung

$$\varkappa + 3\varkappa^1 = 0$$

die Grenzpunkte der zu belastenden Strecken angiebt.
Da

$$J\varkappa = \frac{(s^2 - a^2)(5\,a^2 - s^2 - 8\,as)}{96\,s^2}$$

$$J\varkappa' = \frac{(s^2 - a^2)(5\,a^2 - s^2 + 8\,as)}{96\,s^2},$$

so ergeben die Wurzeln der Gleichung:

$$20a^2 + 16as - 4s^2 = 0$$

oder

$$a^2 + 0{,}8as - 0{,}2s^2 = 0$$

$$a = -0{,}4 \pm \sqrt{0{,}36}$$

$$= -0{,}4 \pm 0{,}6$$

$$a = -1, \quad a = +0{,}2$$

die Grenzpunkte für die Belastungsstrecke des Bogens I an.

Um daher das gröfste positive Moment $M_1$ durch eine Belastung des Bogens I zu erzeugen, hat man die Strecke $AB$, bis zum Bogenpunkt $a_1 = 0{,}2s$ so stark wie möglich zu belasten, während man bei Belastung der Ergänzungsstrecke das gröfste negative Moment erhalten würde mit, für gleichmäfsige Streckenbelastung, gleichem absoluten Zahlenwerte.

Um überhaupt das gröſste Biegungsmoment $M_1$ zu erhalten, hat man beide Bögen, entweder auf den beiden Strecken $AB$ oder der Ergänzungsstrecke $BB$ möglichst stark zu belasten.

Man kann das in vorhergehender Darstellung an dem einfachen Beispiele des kontinuierlichen Bogenträgers mit zwei gleichen Öffnungen vorgeführte Verfahren der Ermittelung der Kräfteverteilung, welches seinem Wesen nach darin besteht, bei gegebener Belastung zunächst sämmtliche Stützenmomente, auf Grund der allgemeinen Gleichungen (I), zu berechnen, sinngemäſs ausdehnen auf kontinuierliche Bogenträger mit beliebig vielen und untereinander verschiedenen Öffnungen.

Ist eine gröſsere Anzahl Öffnungen vorhanden, so erhält man eben eine entsprechend gröſsere Anzahl der allgemeinen Momentengleichungen (I) zur Bestimmung der gröſseren Anzahl unbekannter Momentenwerte, und sind die Spannweiten und Einzelträger untereinander verschieden, so erhält man eben ungleiche Zahlenwerte $\zeta$, für diese einzelnen Öffnungen, die Berechnung der Koeffizienten der Momente der Gleichungen (I) fällt weniger einfach aus wie bei gleichen Öffnungen und gleichen Trägern, im Wesen der Sache wird dadurch jedoch nichts geändert.

Sind sehr viele Öffnungen vorhanden, so ist, bei Durchführung des rechnerischen Verfahrens, die Auflösung sehr vieler linearer Gleichungen erforderlich, daher man für solche Fälle häufig dem zeichnerischen Verfahren den Vorzug geben wird. Dieses kann für den Bogenträger in analoger Weise, wie für den geraden Balken durchgeführt werden.

Aus der linearen Form aller Momentengleichungen (I) folgt, beispielsweise durch Differenziation nach irgend einem einzigen bestimmten Einfluſswert $\varkappa$ der rechten Seite dieser Gleichungen, für das Verhältnis der Änderungen $\frac{dM_n}{dM_{n+1}}$ irgend zweier Momentenwerte $M_n$, $M_{n+1}$ stets ein konstanter, nur von den Koefizienten $\theta$, $\zeta$ der Momentengleichungen abhängiger, Wert.

Trägt man daher die Stützenmomente in festen Geraden, naturgemäſs in den durch die Stützpunkte gezogenen Lotrechten, als Strecken auf, so drehen sich alle Momentenlinien (Verbindungsgeraden der Endpunkte der Höhen der Stützenmomente) um, in festen Lotrechten liegende, bestimmte Punkte $L$, $K$, wenn eine elastische Erregung von der einen zur anderen Seite durch den Träger läuft. Weil aber die Werte $\theta$ bei dem Bogen, im Gegensatz zum geraden Balken, negativ, den Werten $\zeta$ entgegengesetzt, ausfallen, so tritt an die Stelle der inneren Teilung der Spannweiten durch die Punkte $L$, $K$ die äuſsere

Teilung, sodafs also die Stützenmomente mit gleichbleibendem, nicht wie beim geraden Balken mit abwechselndem, Sinne verlaufen.

Auch die Bestimmung der Festpunkte $S$, in welchen behufs Darstellung des Verlaufs der Momentenlinien die Einflufsgröfsen (mit bestimmten Koeffizenten vervielfältigte Werte der rechten Seite der Momentengleichungen (I) aufgetragen werden können, erfolgt beim Bogenträger in analoger Weise, wie beim geraden Träger.

Ist also:

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 = 0 \text{ bezw.} \equiv -\varkappa$$

eine bestimmte Momentengleichung für drei sich folgende Stützenmomente $M_1$, $M_2$, $M_3$ der drei Stützen 1, 2, 3, so hat die Lage des Punktes $S$ der Bedingung zu entsprechen:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, x_s$$

wenn $x_1$, $x_2$, $x_3$ die Koordinaten der Punkte 1, 2, 3; $x_s$ die Koordinate des Punktes $S$ bedeutet, und in diesem Punkte $S$ würde wie beim geraden, so dem gebogenen Träger der Wert $\frac{\varkappa_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$ als Ordinate aufzutragen sein, wobei der ganze Unterschied zwischen dem geraden Balken und dem Parabelbogen darin besteht, dafs im Falle des geraden Balkens die Werte $\alpha_1$, $\alpha_3$ stets positiv sind, während beim Bogen die Werte $\alpha_1$, $\alpha_3$ negative Zahlen darstellen. Im übrigen kann das zeichnerische Verfahren beim Bogenträger nach den nämlichen Regeln und Grundsätzen durchgeführt werden, wie bei dem geraden Balken. —

Wir wollen uns hier darauf beschränken als ein Beispiel zur Aufstellung zahlenmäfsiger Momentengleichungen bei ungleichen Spannweiten, den Träger der Abb. 28 mit drei Öffnungen zu betrachten.

Der Bogen I habe die Abmessungen

$$l_1 = 500 \text{ cm},\ h_1 = 500 \text{ cm},\ s_1 = 739{,}5 \text{ cm}$$

und den Querschnitt vom Trägheitsmoment $J_{\mathrm{I}} = 61075 \text{ cm}^4$.

Alsdann gelten für diesen Bogen die Zahlenwerte $\zeta_{\mathrm{I}}$, $\theta_{\mathrm{II}}$, wenn wir dieselben, einfacher Schreibweise zuliebe, mit $10^5$ vervielfältigen

$$\zeta_{\mathrm{I}} = \frac{s_2}{J_1 4} \cdot 10^5 = \text{rund } 303,$$

$$\theta_{\mathrm{I}} = -\frac{\zeta_{\mathrm{I}}}{3} = -101.$$

Der Bogen II habe die Abmessungen $l_2 = 1000$ cm, $h_2 = 500$ cm, $s_2 = 1148$, und einen Querschnitt des Trägheitsmomentes:

$$J_2 = 313047 \text{ cm}^4.$$

Dann ergeben sich für diesen Bogen die entsprechenden, ebenfalls mit $10^5$ vervielfältigten, Zahlen:

$$\zeta_{II} = 90; \; \theta_{II} = -30.$$

Der Bogen III habe die Abmessungen $l_3 = 750$ cm, $h_3 = 500$ cm, $s_3 = 934$ cm und einen Querschnitt des Trägheitsmomentes $J_3 = 130^{000}$ cm$^4$.

Dann ergeben sich für diesen Bogen die entsprechenden abgerundeten Zahlen:

$$\zeta_{III} = 180; \; \theta_{III} = -60.$$

Seien nun die beiden Endwiderlager, wie auch die Mittelstützen, unverschiebliche Gelenke, so gelten die Werte $M_0 = M_3 = 0$, und wir erhalten zur Bestimmung der beiden Momente der Mittelstützen die allgemeinen Gleichungen:

$$M_1(\zeta_I + \zeta_{II}) + M_2(\theta_{II}) = -\varkappa_1,$$
$$M_1\theta_{II} + M_2(\zeta_I + \zeta_{III}) = -\varkappa_2,$$

wobei die Einflufsgröfsen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ der rechten Seiten der Gleichungen denjenigen elastischen Drehungen an der Mittelstütze 1 bezw. 2 entsprechen würden, wie solche etwaige Belastung in den betreffenden Einzelbögen mit frei drehbaren Enden hervorrufen würde.

Durch Einsetzung der Zahlen ergiebt sich:

$$393 M_1 - 30 M_2 = -\varkappa_1$$
$$-30 M_1 + 270 M_2 = = \varkappa_2.$$

Steht nun auf der ersten Öffnung eine Einzellast $P$, so ist $\varkappa_2 = 0$, und für $\varkappa_1$ der betreffende Zahlenwert, z. B. bei Scheitelstellung der Wert:

$$-\varkappa_1 = \frac{s_1^2 \cdot 10^5}{J_1 \cdot 96} = 9326 \text{ einzusetzen,}$$

wodurch also die Zahlengleichungen gefunden werden:

$$393 M_1 - 30 M_2 = 9326$$
$$-30 M_1 + 270 M_2 = 0,$$

und aus welchen sich mithin der bestimmte Wert ergiebt:

$$M_1 = \frac{9326 \cdot 270}{393 \cdot 270 - 30^2}$$

oder:

$$M_1 = P \cdot 26 \text{ cm}.$$

Steht die lotrechte Last $P$ auf der mittleren Öffnung, so sind sowohl für $\varkappa_1$, wie für $\varkappa_2$ bestimmte Zahlen einzusetzen und um z. B. die

Frage zu entscheiden, auf welchen Strecken dieser Mittelöffnung sind Lasten aufzubringen, damit der Bogen I möglichst stark hierdurch in Anspruch genommen wird, löse man die Gleichungen nach $M_1$ auf und erhält:

$$-M_1 = \frac{270\varkappa_1 + 30\varkappa_2}{393 \cdot 270 - 30 \cdot 30}$$

Hieraus ersieht man, dafs die Erfüllung der Gleichung $9\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0$ den Scheidepunkt der Belastungsstrecken angeben wird.

Wird die Bogenstellung $a$ der Last $P$ vom Scheitel nach der rechten Seite als positiv gerechnet, so ist zu setzen:

$$\frac{J_{II}\varkappa_1}{10^5} = \frac{(s_2^2 - a^2)(s a^2 - s_2^2 - 8 a s_2)}{96 s_2^2}$$

$$\frac{J_{II}\varkappa_2}{10^5} = \frac{(s_2^2 - a^2)(s a^2 - s_2^2 + 8 a s)}{96 s_2^2}$$

und führt daher die Gleichung $9\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0$ zu der quadratischen Gleichung:

$$a^2 - 1{,}28 a s - 0{,}2 s^2 = 0$$

mit den Wurzeln

$$\frac{a}{s} = 0{,}64 \pm \sqrt{0{,}6096}$$
$$= 0{,}64 \pm 0{,}78;$$

der Wert $\frac{a}{s} = -0{,}14$ zeigt mithin den Scheidepunkt der beiden Belastungsstrecken an. —

Wäre der Bogen der Abb. 28 am linksseitigen Widerlager $O$ undrehbar eingemauert, so wäre $M_0$ nicht $= 0$ zu setzen, und es würden die allgemeinen Momentengleichungen gelten:

$$M_0 \zeta_I + M_1 \theta_I = -\varkappa_0$$
$$M_0 \theta_I + M_1(\zeta_I + \zeta_{II}) + M_2 \theta_{II} = -\varkappa_1$$
$$M_1 \theta_{II} + M_2(\zeta_{II} + \zeta_{III}) = -\varkappa_2$$

oder in Zahlen:

$$303 M_0 - 101 M_1 = -\varkappa_0$$
$$-101 M_0 + 393 M_1 - 30 M_2 = -\varkappa_1$$
$$-\ 30 M_1 + 270 M_2 = -\varkappa_2$$

und bei Nichtbelastung der ersten Öffnung würde $\varkappa_0 = 0$, also $M_0 = \frac{M_1}{3}$ werden. Bei Belastung aber irgend welcher Öffnung sind die ent-

sprechenden Werte $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, wie bereits angegeben, einzusetzen, wodurch alle Werte $M$ bekannt sind.

Wäre der Bogen auch am rechtsseitigen Endwiderlager undrehbar eingemauert, so wäre auch $M_3$ verschieden von 0, und es würden die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
M_0\zeta_{\mathrm{I}} + M_1\theta_{\mathrm{I}} &= -\varkappa_0 \\
M_0\theta_{\mathrm{I}} + M_1(\zeta_{\mathrm{I}} + \zeta_{\mathrm{II}}) + M_2\theta_{\mathrm{II}} &= -\varkappa_1 \\
M_1\theta_{\mathrm{II}} + M_2(\zeta_{\mathrm{II}} + \zeta_{\mathrm{III}}) + M_3\theta_{\mathrm{III}} &= -\varkappa_2 \\
M_2\theta_{\mathrm{III}} + M_3\zeta_{\mathrm{III}} &= -\varkappa_3
\end{aligned}$$

oder in Zahlen:

$$\begin{aligned}
303\,M_0 - 101\,M_1 &= -\varkappa_0 \\
-101\,M_0 + 393\,M_1 - 30\,M_2 &= -\varkappa_1 \\
-30\,M_1 + 270\,M_2 - 60\,M_3 &= -\varkappa_2 \\
-60\,M_2 + 180\,M_3 &= -\varkappa_3.
\end{aligned}$$

---

Wir setzten in unserer Darstellung für sämtliche Einzelbögen den nämlichen Wert $E$ des Elastizitätsmaſses voraus. Gleichwohl bleiben unsere Formeln und Werte sehr leicht beziehbar auf den Fall, daſs Bögen aus verschiedenem Material, also Bögen von verschiedenen Werten $E$ zusammengekuppelt werden.

Wir brauchen für diesen Fall in unseren Zahlenwerten $\zeta$, $\theta$, $\varkappa$, nur die wirklichen, nicht wie wir der Einfachheit halber thaten, die $E$-fachen Werte der elastischen Drehungen zu verstehen, und ersehen, daſs man, für den Fall verschiedener Elastizitätsmaſse für die Einzelbögen, unsere Ausdrücke $\zeta$, $\theta$, $\varkappa$, oder bestimmte Vielfache derselben, nur je durch den entsprechenden Wert $E$ zu teilen braucht, um alle Formeln und Verhältnisse diesem Fall der ungleichen Elastizitätswerte anzupassen.

---

# Über die numerische Auflösung von partiellen Differentialgleichungen.

Von Richard Gans in Heidelberg.

Die von C. Runge[1]) angegebene Erweiterung der Simpsonschen Regel zur Integration totaler Differentialgleichungen läſst sich auch noch mit geringer Modifikation auf die numerische Integration partieller Differentialgleichungen anwenden. Da ein Mittel zur näherungsweisen Integration für die Physik und Technik von groſser Wichtigkeit ist, wenn analytische Verfahren fehlen, so möchte ich kurz den Gedankengang der Methode angeben.

Zunächst liege eine Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen vor. Wir denken uns dieselbe nach $\frac{\partial z}{dy}$ aufgelöst, also in der Form gegeben:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Diese Gleichung sei zu integrieren unter der Bedingung

$$z = z_0(x) \quad \text{für} \quad y = y_0.$$

Wir betrachten $x$ als Parameter und entwickeln $\Delta z$ nach der Taylorschen Reihe nach Potenzen von $y - y_0 = \Delta y$. Dann stellt sich der wahre Wert von $\Delta z$ folgendermaſsen dar:

$$\Delta z = f\Delta y + (f_2 + f_3 f + f_4 u)\frac{\Delta y^2}{2}$$
$$+ \left[f_{22} + 2f_{23}f + 2f_{24}u + f_{33}f^2 + 2f_{34}fu + f_{44}u^2 + f_3(f_2 + f_3 f + f_4 u) + f_4\frac{\partial u}{\partial y}\right]\frac{\Delta y^3}{6} + \cdots$$

Hierin sind die Ableitungen von $f$ in bekannter Schreibweise durch Indices bezeichnet, und es ist zur Abkürzung gesetzt

$$u = f_1 + f_3\frac{\partial z}{\partial x} + f_4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Wir bilden ferner den dem Tangententrapez in der Simpsonschen Regel entsprechenden Näherungswert für $\Delta z$

$$N_1 = f\left(x,\ y_0 + \tfrac{1}{2}\Delta y,\ z_0 + \tfrac{1}{2}f_0\Delta y,\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 + \tfrac{1}{2}u_0\Delta y\right)\Delta y;$$

1) C. Runge, Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. Math. Ann. Bd. 46, 1895.

dieser giebt, nach Potenzen von $\varDelta y$ entwickelt:

$$N_1 = f\varDelta y + (f_2 + f_3 f + f_4 u)\frac{\varDelta y^2}{2}$$
$$+ \left[f_{22} + f_{33}f^2 + f_{44}u^2 + 2f_{23}f + 2f_{24}u + 2f_{34}fu\right]\frac{\varDelta y^3}{8} + \cdots$$

Ein weiterer Näherungswert, der dem Sehnentrapez in der Simpsonschen Regel entspricht, ist durch folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$N_2 = \frac{\varDelta' z + \varDelta''' z}{2},$$

$$\varDelta' z = f\varDelta y,$$

$$\varDelta'' z = f\left(x, y_0 + \varDelta y, z_0 + \varDelta' z, \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 + u\varDelta y\right)\varDelta y,$$

$$\varDelta''' z = f\left(x, y_0 + \varDelta y, z_0 + \varDelta'' z, \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 + \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\varDelta y\right)\varDelta y\right)\varDelta y.$$

Entwickeln wir $N_2$ nach Potenzen von $\varDelta y$, so wird:

$$N_2 = f\varDelta y + (f_2 + f_3 f + f_4 u)\frac{\varDelta y^2}{2}$$
$$+ (f_{22} + f_{33}f^2 + f_{44}u^2 + 2f_{23}f + 2f_{24}u + 2f_{34}fu)\frac{\varDelta y^3}{4}$$
$$+ \left[f_3(f_2 + f_3 f + f_4 u) + f_4\frac{\partial u}{\partial y}\right]\frac{\varDelta y^3}{2} + \cdots$$

d. h. $N_1 + \frac{N_2 - N_1}{3}$ stimmt noch in den Gröfsen 3. Ordnung mit der wahren Entwickelung überein.

An einem Beispiel möge der Gang der Rechnung klar gemacht werden. Es sei

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x},$$

für $y = 1$ sei

$$z = e^x.$$

Gesucht wird $z$ für $y = 2$ und kleine Werte von $x$.

Die vorgelegte Differentialgleichung ist analytisch nach der Pfaff-Jacobischen Methode auflösbar durch Integration des Systems

$$dx : dy : dz = -x : y : 0$$

und ergiebt mit Berücksichtigung des vorgeschriebenen Anfangswertes

$$z = e^{xy},$$

d. h. für $y = 2$ und kleine Werte von $x$, wenn wir uns also auf die ersten Glieder der Entwickelung beschränken können:

$$z = 1 + 2x + 2x^2 + 1{,}333x^3.$$

Nach unserer Näherungsmethode wird

$$f = \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$u = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right).$$

Da $z$ in $f$ nicht explizite vorkommt, ist die Rechnung etwas einfacher, indem man $\Delta'' z$ nicht zu bestimmen braucht.

Dem Tangententrapez entsprechend ist:

| $y$ | $ze^{-x}$ | $\partial z/\partial x e^{-x}$ | $ue^{-x}$ | $fe^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $1+x$ | |
| $\Delta y = 0.1$ | | $u\Delta y = 0.1 + 0.1x$ | | |
| 1.1 | | $1.1 + 0.1x$ | | $x + 0.091x^2$ |
| $\Delta y = 0.2$ | $N_1 = 0{,}2x + 0.0182x^2$ | | | |
| 1.2 | | | | |

Dem Sehnentrapez entsprechend ist:

| $y$ | $ze^{-x}$ | $\partial z/\partial x e^{-x}$ | $ue^{-x}$ | $\partial u/\partial y e^{-x}$ | $fe^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $1+x$ | $2x+x^2$ | $x$ |
| $\Delta y = 0.2$ | $\Delta' z = 0.2x$ | $\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta y =$ | $\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y = 0.4x + 0.2x^2$ | | |
| 1.2 | | $0.2 + 0.28x + 0.04x^2$ | $1 + 1.4x + 0.2x^2$ | | |
| | $\Delta''' z = 0.2x + 0.0467x^2 + 0.0067x^3$ | $1.2 + 0.28x + 0.04x^2$ | | | |

$$N_2 = \frac{\Delta' z + \Delta''' z}{2} = (0.2x + 0.0234x^2 + 0.00333x^3)e^x,$$

$$\frac{N_2 - N_1}{3} = (0.0017x^2 + 0.00111x^3)e^x,$$

für $y = 1{,}2$ ist $z = (1 + 0.2x + 0.02x^2 + 0.001x^3)e^x$.

Der zweite Schritt ergiebt:

Dem Tangententrapez entsprechend:

| $y$ | $ze^{-x}$ | $\partial z/\partial x e^{-x}$ | $ue^{-x}$ | $fe^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1.2 | $1 + 0.2x + 0.02x^2 + 0.001x^3$ | $1.2 + 0.24x + 0.023x^2 + 0.001x^3$ | $1 + 1.4x + 0.257x^2 + 0.0225$ | |
| $\Delta y = 0.1$ | | $u\Delta y = 0.1 + 0.14x + 0.026x^2 + 0.002x^3$ | | |
| 1.3 | | $1.3 + 0.38x + 0.049x^2 + 0.003x^3$ | | $\frac{x}{1.3}(1.3 + 0.38x + 0.049x^2 + 0.003x^3$ |
| $\Delta y = 0.2$ | $N_1 = 0.2x + 0.0584x^2 + 0.0075x^3$ | | | |
| 1.4 | | | | |

Dem Sehnentrapez entsprechend ist:

| $y$ | $ze^{-x}$ | $\partial z/\partial x e^{-x}$ | $ue^{-x}$ | $\partial u/\partial y e^{-x}$ | $fe^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.2 | $1 + 0.2x + 0.02x^2 + 0.001x^3$ | $1.2 + 0.24x + 0.023x^2$ | $1 + 1.4x + 0.257x^2$ | $2x + 1.595x^2$ | $\frac{x}{1.2}(1.2 + 0.24x + 0.023x^2)$ |
| $\Delta y = 0.2$ | $\Delta' z = 0.2x + 0.04x^2 + 0.00383x^3$ | $\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta y =$ $0.2 + 0.36x + 0.115x^2$ | $\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y =$ $0.4x + 0.319v^2$ | | $\frac{x}{1.4}(1.4 + 0.60x + 0.138x^2)$ |
| 1.4 | $\Delta''' z = 0.2x + 0.0857x^2 + 0.0197x^3$ | $1.4 + 0.60x + 0.138x^2$ | $1 + 1.8x + 0.576x^2$ | | |

$$N_2 = \frac{\Delta' z + \Delta''' z}{2} = (0.2x + 0.0628x^2 + 0.0117x^3)e^x,$$

$$\frac{N_2 - N_1}{3} = (0.0015x^2 + 0.0014x^3)e^x,$$

für $y = 1.4$ ist $z = (1 + 0.4x + 0.080x^2 + 0.010x^3)e^x$.

Die nächsten Schritte ergeben:

| $\Delta y$ | $N_1 e^{-x}$ | $N_2 e^{-x}$ | $\frac{N_2 - N_1}{3} e^{-x}$ | $y$ | $ze^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.2 | $0.2x + 0.0987x^2 + 0.0232x^3$ | $0.2x + 0.1025x^2 + 0.0281x^3$ | $0.0013x^2 + 0.0016x^3$ | 1.6 | $1 + 0.6x + 0.18x^2 + 0.0348x^3$ |
| 0.2 | $0.2x + 0.1389x^2 + 0.0468x^3$ | $0.2x + 0.1366x^2 + 0.0523x^3$ | $-0.0008x^2 + 0.0018x^3$ | 1.8 | $1 + 0.8x + 0.3181x^2 + 0.0834x^3$ |
| 0.2 | $0.2x + 0.1784x^2 + 0.0782x^3$ | $0.2x + 0.1815x^2 + 0.0842x^3$ | $0.0010x^2 + 0.0020x^3$ | 2.0 | $1 + x + 0.498x^2 + 0.164x^3$ |

für $y = 2$ ist also

$$z = (1 + x + 0.498x^2 + 0.164x^3)(1 + x + 0.5x^2 + 0.167x^3),$$

d. h. $z = 1 + 2x + 1.998x^2 + 1.329x^3$.

Der wahre Wert ist

$$z = 1 + 2x + 2x^2 + 1.333x^3,$$

also ist der Fehler unserer Näherungsrechnung

$$-0.002x^2 - 0.004x^3.$$

Die Aufgabe ist auch unter allgemeinerer Nebenbedingung zu behandeln, wenn z. B. verlangt wird, daſs die Fläche durch eine gegebene Raumkurve doppelter Krümmung hindurchgehe.

Die Raumkurve sei in der Form gegeben:

$$z = \varphi(x),$$
$$y = \Phi(x);$$

dann ist die Tangente der Raumkurve durch die Gleichungen bestimmt:

$$z - \zeta = \varphi'(x)(x - \xi),$$
$$y - \eta = \Phi'(x)(x - \xi).$$

Ist $\lambda$ ein unbestimmter Koeffizient, so bedeutet

$$z - \zeta = [\varphi'(x) - \lambda \Phi'(x)](x - \xi) + \lambda(y - \eta)$$

den Ebenenbüschel, dessen Träger die Tangente ist; eine Ebene dieses Büschels mufs Tangentialebene der Fläche sein; d. h. an der Raumkurve ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x) - \lambda \Phi'(x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda.$$

An der Raumkurve sind also $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ durch die Beziehung verbunden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x) - \frac{\partial z}{\partial y} \Phi'(x).$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, \Phi, \varphi, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

und der soeben angegebenen Beziehung sind $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ an der Kurve zu berechnen. Die Berechnung von $u$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ macht auch keine Schwierigkeiten.

Dieselbe Methode ist auch auf partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung anwendbar; wir wollen noch für Differentialgleichungen 2. Ordnung den Weg andeuten.

Es sei

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right);$$

für $y = y_0$ sei gegeben

$$z = z_0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0.$$

Wir setzen in bekannter Bezeichnungsweise

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Dann wird:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = f(x, y, z, p, q, r, s)$$



und für $y = y_0$:

$$z = z_0,$$

$$q = q_0.$$

Wir suchen jetzt einen der Simpsonschen Regel entsprechenden Näherungswert für $\varDelta q$.

Dem Tangententrapez entsprechend ist:

$$N_1 = f\left(x, y_0 + \frac{\varDelta y}{2},\ \ z_0 + q_0 \frac{\varDelta y}{2},\ \ p_0 + \frac{d q_0}{d x}\frac{\varDelta y}{2},\ \ q_0 + f_0 \frac{\varDelta y}{2},\right.$$

$$\left. r_0 + \frac{d^2 q_0}{d x^2}\frac{\varDelta y}{2},\ \ s_0 + \frac{d f_0}{d x}\frac{\varDelta y}{2}\right)\varDelta y.$$

Dem Sehnentrapez entsprechend bilden wir folgendes System:

$$N_2 = \frac{\varDelta' q + \varDelta''' q}{2},$$

$$\varDelta' q = f \varDelta y,$$

$$\varDelta'' q = f\left(x, y + \varDelta y, z + q\varDelta y, p + \frac{\partial q}{\partial x}\varDelta y, q + f\varDelta y, \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\varDelta y, \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\varDelta y\right)\varDelta y,$$

$$\varDelta''' q = f\Big[x, y + \varDelta y, z + (q + f\varDelta y)\varDelta y, p + \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\varDelta y\right)\varDelta y, q + \varDelta'' q,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\varDelta y\right)\varDelta y, \frac{\partial q}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\varDelta y\right)\varDelta y\Big]\varDelta y.$$

Dann ist

$$\varDelta q = N_1 + \frac{N_2 - N_1}{3},$$

ein Näherungswert, der in den dritten Potenzen noch mit der wahren Entwickelung übereinstimmt; und es wird

$$z = z_0 + q_0 \varDelta y + \int_0^{\varDelta y} \varDelta q \, d\varDelta y.$$

Heidelberg, Physikalisches Institut, den 1. Mai 1902.

---

# Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen.

Von J. Horn in Clausthal.

In dem im 47. Band dieser Zeitschrift S. 400—428 erschienenen Aufsatze „Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad" habe ich mir die Aufgabe gestellt, die kleinen Schwingungen auf Grund der von der Dynamik gelieferten Differentialgleichungen exakt darzustellen, ohne die Differentialgleichungen in der üblichen Weise durch Vernachlässigung der Produkte kleiner Gröfsen auf lineare Differentialgleichungen zu reduzieren.

In der jetzigen Arbeit[1]) gehe ich zu Systemen *mit mehreren Freiheitsgraden* über; ich beschränke mich aber zunächst auf kleine *periodische Schwingungen.* Die mathematischen Untersuchungen, welche Poincaré[2]) angestellt hat, um zu den periodischen Lösungen eines speziellen Falles des Problems der drei Körper zu gelangen, sind zwar auf unsere Aufgabe nicht ohne weiteres anwendbar, sie können aber bei der Aufsuchung der periodischen Lösungen der Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen als Wegweiser dienen. Übrigens finden sich Ansätze zur Lösung unserer oder einer verwandten Aufgabe bei Poincaré[3]), Picard[4]) und Painlevé.[5]) Die erste der beiden Noten von Painlevé sollte eigentlich als Grundlage für unsere Untersuchungen dienen können; sie enthält aber an der entscheidenden Stelle eine unbegründete Behauptung, und die Folge davon ist, dafs ein Satz über periodische Lösungen von Differentialgleichungen als allgemein giltig ausgesprochen wird, der bei den dynamischen Problemen nur deshalb gilt, weil das durch das Prinzip der lebendigen Kraft gelieferte Integral vorhanden ist.

---

1) Im folgenden wird häufig auf die „Dynamik der Systeme starrer Körper" von Routh (deutsch von Schepp, Leipzig 1898) zu verweisen sein, worin die Theorie der kleinen Schwingungen unter den üblichen Vernachlässigungen eingehend behandelt ist. Hinweise auf die beiden Bände dieses Werkes werden durch Routh I. bezw. Routh II. unter Beifügung der Seitenzahl der deutschen Ausgabe gegeben.

2) Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Paris 1892—1899.

3) Mécanique céleste, Bd. I, S. 156—159.

4) Traité d'Analyse, Bd. III, S. 180—185.

5) Sur les petits mouvements périodiques des systèmes (Comptes rendus, Bd. 124, S. 1222). — Sur les petits mouvements périodiques des systèmes à longue période (Comptes rendus, Bd. 124, S. 1340),

Die Untersuchungen über periodische Lösungen gewisser Differentialgleichungssysteme in §§ 2—4 des vorliegenden Aufsatzes, welche die mathematische Grundlage für die Ermittelung der periodischen Schwingungen bilden, mufsten daher ohne Bezugnahme auf die angeführte Note von neuem durchgeführt werden. In § 1 wird ein System von $n$ Freiheitsgraden betrachtet, dessen Verbindungen von der Zeit nicht abhängen und welches eine Kräftefunktion besitzt; unter gewissen Voraussetzungen über die lebendige Kraft und die Kräftefunktion werden die Differentialgleichungen der Bewegung in der Lagrangeschen Form aufgestellt. Die in der Nähe einer Gleichgewichtslage erfolgenden periodischen Bewegungen (welche den Hauptschwingungen der Näherungstheorie entsprechen) werden unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen in § 5 dargestellt. In § 6 werden die allgemeinen Resultate auf Systeme mit einem Freiheitsgrad angewandt und mit dem früheren Aufsatz in Verbindung gebracht; als Beispiel dienen die kleinen Schwingungen rollender Cylinder, welche in Routh I., S. 394—395 in erster Annäherung und S. 454—458 in zweiter Annäherung behandelt sind. In § 7 und 8 werden zwei Beispiele mit zwei Freiheitsgraden hinsichtlich der periodischen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage untersucht (schwerer Punkt auf einer Fläche in der Nähe einer Stelle mit wagerechter Tangentialebene; Glocke und Klöppel).

Die meisten in Routh II. in erster Näherung behandelten Beispiele erfordern bei exakter Behandlung eine Modifikation der in § 3 und § 4 geführten mathematischen Untersuchungen; wir werden uns damit in einer Fortsetznng der Arbeit beschäftigen.

## § 1.

Wir betrachten ein System von $n$ Freiheitsgraden, dessen Lage durch die $n$ unabhängigen Koordinaten $x_1, \dots x_n$ bestimmt ist. Wenn die Verbindungen von der Zeit $t$ nicht abhängen, ist die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2} \sum A_{\alpha\beta}(x_1, \dots x_n)\, x'_\alpha x'_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots n)$$

eine definite positive quadratische Form von

$$x'_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dots x'_n = \frac{dx_n}{dt},$$

deren Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$ Funktionen von $x_1, \dots x_n$ sind. Wir setzen voraus, dafs eine nur von den Koordinaten abhängige Kräftefunktion $U = U(x_1, \dots x_n)$ vorhanden ist.

Dann wird die Bewegung des Systems durch die Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

dargestellt. Diese in Bezug auf

$$x_1'' = \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \ldots x_n'' = \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

linearen Gleichungen

$$A_{\alpha 1} x_1'' + \cdots + A_{\alpha n} x_n'' = \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

lassen sich nach diesen Gröfsen auflösen:

$$x_\alpha'' = F_\alpha(x_1', \ldots x_n'; x_1, \ldots x_n) + Q_\alpha(x_1, \ldots x_n); \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

dabei ist $F_\alpha$ eine quadratische Form von $x_1', \ldots x_n'$, deren Koeffizienten von $x_1, \ldots x_n$ abhängen, und

$$Q_\alpha = \frac{1}{\Delta}\left(\mathsf{A}_{\alpha 1} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \cdots + \mathsf{A}_{\alpha n} \frac{\partial U}{\partial x_n}\right);$$

die symmetrische Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

mit den Unterdeterminanten

$$\mathsf{A}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots n)$$

ist die Diskriminante der quadratischen Form $T$.

Die Lage $O$ mit den Koordinaten $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ ist eine Gleichgewichtslage, wenn in derselben

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \cdots \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$Q_1 = 0, \ldots Q_n = 0$$

ist. Wir nehmen an, $U$ sei eine in der Umgebung von $O$ reguläre analytische Funktion von $x_1, \ldots x_n$, deren Potenzreihenentwicklung mit quadratischen Gliedern beginnt:

$$U = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \cdots \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots n)$$

Die Koeffizienten $A_{\alpha\beta}$ von $T$ sollen ebenfalls in der Umgebung von $O$ reguläre analytische Funktionen sein — wir setzen $A_{\alpha\beta}(0, \ldots 0) = a_{\alpha\beta}$

— und die Diskriminante $\varDelta$ in $O$ nicht verschwinden. Dann sind auch die Koeffizienten der quadratischen Formen $F_\alpha$ von $x_1', \dots x_n'$ sowie die Funktionen $Q_\alpha$ in der Umgebung von $O$ reguläre analytische Funktionen von $x_1, \dots x_n$.

Durch eine reelle lineare Transformation der Koordinaten $x_1, \dots x_n$ lassen sich die quadratischen Formen

$$\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha' x_\beta', \quad \sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

auf die Gestalt

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha'^2, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha x_\alpha^2$$

bringen, wo $s_1, \dots s_n$ reell sind[1]); d. h. man kann

$$a_{\alpha\alpha} = 1, \quad a_{\alpha\beta} = 0 \ (\alpha \lessgtr \beta),$$

$$b_{\alpha\alpha} = s_\alpha, \quad b_{\alpha\beta} = 0 \ (\alpha \lessgtr \beta)$$

voraussetzen. Die neuen Koordinaten $x_1, \dots x_n$ werden in der Theorie der kleinen Schwingungen Hauptkoordinaten genannt. In der Lage $O$ ist nun

$$\mathsf{A}_{\alpha\alpha} = 1, \quad \mathsf{A}_{\alpha\beta} = 0 \ (\alpha \gtrless \beta), \quad \varDelta = 1,$$

und man hat

$$Q_\alpha = s_\alpha x_\alpha + G_\alpha(x_1, \dots x_n),$$

wo $G_\alpha$ nur Glieder von mindestens zweiter Dimension in $x_1, \dots x_n$ enthält.

Hiernach haben die Bewegungsgleichungen die Form

$$x_\alpha'' = s_\alpha x_\alpha + F_\alpha(x_1', \dots x_n'; x_1, \dots x_n) + G_\alpha(x_1, \dots x_n); \quad (\alpha = 1, \dots n)$$

$F_\alpha$ ist eine quadratische Form von $x_1', \dots x_n'$, deren Koeffizienten reguläre Funktionen von $x_1, \dots x_n$ sind. Das Prinzip der lebendigen Kraft liefert uns ein Integral unseres Differentialgleichungssystems:

$$T - U = \text{Const.}$$

oder

$$x_1'^2 + \cdots + x_n'^2 - s_1 x_1^2 - \cdots - s_n x_n^2 + \cdots = \text{Const.},$$

wo aufser den angegebenen quadratischen Gliedern nur Glieder von mindestens dritter Dimension in $x_1, \dots x_n, x_1', \dots x_n'$ vorkommen.

---

1) Weierstrafs, Werke, Bd. I, S. 242. — Vgl. Routh I., S. 414 ff.; II, S. 54 ff., S. 524 ff.

Wenn es sich um Bewegungen in der Nähe der Gleichgewichtslage $O$ (kleine Schwingungen) handelt[1]), vernachlässigt man in den obigen Differentialgleichungen gewöhnlich die Glieder zweiten und höheren Grades in $x_1, \dots x_n$, $x_1', \dots x_n'$, d. h. die Funktionen $F_\alpha$ und $G_\alpha$, so daſs die Bewegung durch die linearen Differentialgleichungen

$$x_\alpha'' = s_\alpha x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

dargestellt wird. Sind die Gröſsen

$$s_1 = -\lambda_1^2, \dots s_m = -\lambda_m^2$$

negativ, die Gröſsen $s_{m+1}, \dots s_n$ positiv oder gleich Null, so ergeben sich (wenn man zunächst $\lambda_1, \dots \lambda_m$ als verschieden voraussetzt) bei der üblichen angenäherten Darstellung $m$ in der Nähe der Gleichgewichtslage $O$ verlaufende periodische Bewegungen (Hauptschwingungen):

$$x_1 = c_1 \cos(\lambda_1 t + \gamma_1), \quad x_2 = 0, \quad \dots x_m = 0, \quad x_{m+1} = 0, \quad \dots x_n = 0;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$x_1 = 0, \ \dots x_{m-1} = 0, \ x_m = c_m \cos(\lambda_m t + \gamma_m), \ x_{m+1} = 0, \ \dots x_n = 0;$$

$c_1, \dots c_m$, $\gamma_1, \dots \gamma_m$ sind die Integrationskonstanten.

Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist *die exakte Untersuchung der in der Nähe der Gleichgewichtslage O verlaufenden periodischen Bewegungen ohne Vornahme von Vernachlässigungen in den Differentialgleichungen der Bewegung.* Auf die nicht periodischen Bewegungen (welche den zusammengesetzten Schwingungen der üblichen Näherungstheorie entsprechen) wird vorerst noch nicht eingegangen.

Das Lagrangesche System von $n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung läſst sich durch $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = x_\alpha',$$

$$\frac{dx_\alpha'}{dt} = s_\alpha x_\alpha + F_\alpha(x_1', \dots x_n'; x_1, \dots x_n) + G_\alpha(x_1, \dots x_n) \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

ersetzen; wir haben die in der Nähe der Stelle $x_1 = 0, \dots x_n = 0$, $x_1' = 0, \dots x_n' = 0$ verlaufenden periodischen Lösungen dieses Systems zu bestimmen.

---

1) Vgl. Routh I., S. 414 ff.

## § 2.

Wir betrachten das allgemeinere Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha(x_1, \ldots x_n) \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

wo

$$X_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n + \cdots$$

eine Potenzreihe von $x_1, \ldots x_n$ ist, welche für $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ verschwindet und für hinreichend kleine Werte von $|x_1|, \ldots |x_n|$ konvergiert. Wir fragen nach etwaigen in der Nähe der Stelle $x_1 = 0$, $\ldots x_n = 0$ verlaufenden periodischen Lösungen.

Die dem Differentialgleichungssystem genügenden, durch die Anfangsbedingungen

$$t = 0,\ x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$$

bestimmten Funktionen

$$x_\alpha = f_\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

lassen sich in Potenzreihen von $c_1, \ldots c_n$ entwickeln, welche, so lange $t$ zwischen 0 und einer irgendwie festgesetzten positiven Gröfse $t_0$ bleibt, für hinreichend kleine Werte von $|c_1|, \ldots |c_n|$ konvergieren. Es fragt sich, ob sich die Anfangswerte $c_1, \ldots c_n$ so bestimmen lassen, dafs

$$f_\alpha(t + T) = f_\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

wird, wo die Periode $T$ von $c_1, \ldots c_n$ abhängt.

Hat die charakteristische Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} - s, & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & \ldots & a_{nn} - s \end{vmatrix}$$

lauter einfache Elementarteiler[1]) $s - a_1, \ldots s - a_n$, so lassen sich die Differentialgleichungen durch eine lineare Transformation von $x_1, \ldots x_n$ auf die Form bringen:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 + \cdots, \quad \cdots \quad \frac{dx_n}{dt} = a_n x_n + \cdots .$$ [2])

---

1) Vgl. Weierstrafs, Werke Bd. II, S. 19 ff. und S. 75/76, sowie Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler.

2) Die nicht angeschriebenen Glieder sind hier wie in den folgenden Gleichungen von mindestens der zweiten Dimension in den abhängigen Veränderlichen.

Einem einfachen Elementarteiler $s - a$ entspricht nach der Transformation eine Differentialgleichung von der Form

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{dt} = ax + \cdots;$$

einem $p$-fachen Elementarteiler $(s - a)^p$ entsprechen $p$ Differentialgleichungen

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= ax' + \cdots, \\ \frac{dx''}{dt} &= ax'' + x' + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx^{(p)}}{dt} &= ax^{(p)} + x^{(p-1)} + \cdots. \end{aligned}$$

Sind $s - (\varkappa + \lambda i)$ und $s - (\varkappa - \lambda i)$ konjugiert komplexe einfache Elementarteiler, so lassen sich die beiden entsprechenden Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = (\varkappa + \lambda i)x + \cdots, \quad \frac{dy}{dt} = (\varkappa - \lambda i)y + \cdots$$

durch die Substitution

$$u = x + y, \quad u = i(x - y)$$

auf die reelle Form bringen:

$$(\gamma) \qquad \frac{du}{dt} = \varkappa u + \lambda v + \cdots, \quad \frac{dv}{dt} = - \lambda u + \varkappa v + \cdots.$$

Einem Paar konjugiert komplexer $p$-facher Elementarteiler $(s - \varkappa - \lambda i)^p$ und $(s - \varkappa + \lambda i)^p$ entsprechen die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= (\varkappa + \lambda i)x' + \cdots & \frac{dy'}{dt} &= (\varkappa - \lambda i)y' + \cdots, \\ \frac{dx''}{dt} &= (\varkappa + \lambda i)x'' + x' + \cdots, & \frac{dy''}{dt} &= (\varkappa - \lambda i)y'' + y' + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx^{(p)}}{dt} &= (\varkappa + \lambda i)x^{(p)} + x^{(p-1)} + \cdots, & \frac{dy^{(p)}}{dt} &= (\varkappa - \lambda i)y^{(p)} + y^{(p-1)} + \cdots, \end{aligned}$$

welche durch die Substitution

$$u^{(\alpha)} = x^{(\alpha)} + y^{(\alpha)}, \quad v^{(\alpha)} = i\big(x^{(\alpha)} - y^{(\alpha)}\big) \qquad (\alpha = 1, \ldots p)$$

übergehen in

$$(\delta)\quad \begin{aligned} &\frac{du'}{dt} = \varkappa u' + \lambda v' + \cdots, && \frac{dv'}{dt} = -\lambda u' + \varkappa v' + \cdots, \\ &\frac{du''}{dt} = \varkappa u'' + \lambda v'' + u' + \cdots, && \frac{dv''}{dt} = -\lambda u'' + \varkappa v'' + v' + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots \\ &\frac{du^{(p)}}{dt} = \varkappa u^{(p)} + \lambda v^{(p)} + u^{(p-1)} + \cdots, && \frac{dv^{(p)}}{dt} = -\lambda u^{(p)} + \varkappa v^{(p)} + v^{(p-1)} + \cdots. \end{aligned}$$

Setzt man

$$x_\alpha = f_\alpha(t) = c_1 f_{\alpha 1}(t) + \cdots + c_n f_{\alpha n}(t) + \cdots,$$

so stellt der auf die linearen Glieder reduzierte Ausdruck

$$x_\alpha = c_1 f_{\alpha 1}(t) + \cdots + c_n f_{\alpha n}(t)$$

die Lösung des Systems linearer Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots n)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0,\ x_1 = c_1,\ \ldots x_n = c_n$$

dar. Man hat also im Falle $(\alpha)$ bei der Anfangsbedingung $x(0) = c$

$$x = ce^{at} + \cdots {}^{1)},$$

im Falle $(\beta)$ bei den Anfangsbedingungen $x'(0) = c', \ldots x^{(p)}(0) = c^{(p)}$

$$\begin{aligned} x' &= c' e^{at} + \cdots, \\ x'' &= e^{at}(c't + c'') + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^{(p)} &= e^{at}\left(c' \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} + \cdots + c^{(p-1)} t + c^{(p)}\right) + \cdots, \end{aligned}$$

im Falle $(\gamma)$ bei den Anfangsbedingungen $u(0) = A,\ v(0) = B$

$$\begin{aligned} u &= e^{\varkappa t}(A \cos \lambda t + B \sin \lambda t) + \cdots, \\ v &= e^{\varkappa t}(B \cos \lambda t - A \sin \lambda t) + \cdots, \end{aligned}$$

---

1) In dieser und den folgenden Gleichungen sind die weggelassenen Glieder von mindestens der zweiten Dimension in Bezug auf die Integrationskonstanten, d. h. die Werte, welche die abhängigen Veränderlichen für $t = 0$ annehmen.

im Falle ($\delta$) bei den Anfangsbedingungen

$$u^{(\alpha)}(0) = A^{(\alpha)}, \quad v^{(\alpha)}(0) = B^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 1, \dots p)$$

$$\begin{aligned} u_{(\alpha)} &= e^{\varkappa t} \cos \lambda t \left( A' \frac{t^{(\alpha-1)}}{(\alpha-1)!} + \cdots + A^{(\alpha)} \right) \\ &\quad + e^{\varkappa t} \sin \lambda t \left( B' \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \cdots + B^{(\alpha)} \right) + \cdots \\ v^{(\alpha)} &= e^{\varkappa t} \cos \lambda t \left( B' \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \cdots + B^{(\alpha)} \right) \\ &\quad - e^{\varkappa t} \sin \lambda t \left( A' \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \cdots + A^{(\alpha)} \right) + \cdots. \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, \dots p)$$

Die Lösung $x_\alpha = f_\alpha(t)$ besitzt dann und nur dann die Periode $T$, wenn

$$f_\alpha(T) = f_\alpha(0) = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

ist. Man hat $n$ Gleichungen, welche in Gruppen von einer der folgenden Formen zerfallen, je nachdem es sich um den Fall ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$) oder ($\delta$) handelt:

$$(\alpha_1) \qquad c(e^{aT} - 1) + \cdots = 0;$$

$$(\beta_1) \qquad \begin{cases} c'(e^{aT} - 1) + \cdots = 0, \\ c''(e^{aT} - 1) + c'T + \cdots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c^{(p)}(e^{aT} - 1) + c' \dfrac{T^{p-1}}{(p-1)!} + \cdots + c^{(p-1)}T + \cdots = 0; \end{cases}$$

$$(\gamma_1) \qquad \begin{cases} A(e^{\varkappa T} \cos \lambda T - 1) + B e^{\varkappa T} \sin \lambda T + \cdots = 0, \\ -A e^{\varkappa T} \sin \lambda T + B(e^{\varkappa T} \cos \lambda T - 1) + \cdots = 0; \end{cases}$$

$$(\delta_1) \qquad \begin{cases} A'(e^{\varkappa T} \cos \lambda T - 1) + B' e^{\varkappa T} \sin \lambda T + \cdots = 0, \\ -A' e^{\varkappa T} \sin \lambda T + B'(e^{\varkappa T} \cos \lambda T - 1) + \cdots = 0, \\ A''(e^{\varkappa T} \cos \lambda T - 1) + B'' e^{\varkappa T} \sin \lambda T \\ \qquad + T e^{\varkappa T}(A' \cos \lambda T + B' \sin \lambda T) + \cdots = 0, \\ -A'' e^{\varkappa T} \sin \lambda T + B''(e^{\varkappa T} \cos \lambda T - 1) \\ \qquad + T e^{\varkappa T}(-A' \sin \lambda T + B' \cos \lambda T) + \cdots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Die Funktionaldeterminante der linken Seiten der sämtlichen $n$ Gleichungen nach den $n$ Gröfsen $c_1, \dots c_n$ für die Nullwerte dieser Gröfsen ist, wenn man den Wert von $T$ für $c_1 = 0, \dots c_n = 0$ mit $T^{(0)}$ bezeichnet, ein Produkt von Faktoren von der Form

$$e^{aT^{(0)}} - 1$$

oder von der Form

$$\begin{vmatrix} e^{\varkappa T^{(0)}}\cos\lambda T^{(0)}-1, & e^{\varkappa T^{(0)}}\sin\lambda T^{(0)} \\ -e^{\varkappa T^{(0)}}\sin\lambda T^{(0)}, & e^{\varkappa T^{(0)}}\cos\lambda T^{(0)}-1 \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\varkappa T^{(0)}} - 2e^{\varkappa T}\cos\lambda T^{(0)} + 1,$$

$$= (e^{\varkappa T^{(0)}}-1)^2 + 4e^{\varkappa T^{(0)}}\sin^2\frac{\lambda T^{(0)}}{2}.$$

Im allgemeinen ist keine von Null verschiedene reelle Gröfse $T^{(0)}$ so vorhanden, dafs einer dieser Faktoren verschwindet; dann besitzen die $n$ Gleichungen nur die Lösung $c_1 = 0, \ldots c_n = 0$; unser Differentialgleichungssystem hat aufser der Lösung $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$, welche als periodische Lösung mit beliebiger Periode betrachtet werden kann, keine weitere periodische Lösung.

Damit der Faktor

$$(e^{\varkappa T^{(0)}}-1)^2 + 4e^{\varkappa T^{(0)}}\sin^2\frac{\lambda T^{(0)}}{2}$$

verschwindet, mufs

$$\varkappa = 0, \quad T^{(0)} = \frac{2m\pi}{\lambda}$$

sein, wo $m$ eine ganze Zahl ist. Der Faktor $e^{a T^{(0)}} - 1$ kann, ohne dafs $T^{(0)} = 0$ ist, nur im Falle $a = 0$ verschwinden. Wenn wir den Fall verschwindender Wurzeln der charakteristischen Gleichung vorläufig ausschliefsen, *so besteht eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein periodischer Lösungen in der Existenz rein imaginärer Wurzeln* $\pm i\lambda$ *der charakteristischen Gleichung* $\Delta = 0$; *der Wert, welchen eine etwaige Periode* $T$ *für* $c_1 = 0, \ldots c_n = 0$ *annimmt, kann nur von der Form* $\frac{2m\pi}{\lambda}$ *(*$m$ *ganze Zahl) sein.*

## § 3.

Wir setzen voraus, *die charakteristische Gleichung* $\Delta = 0$ *besitze ein Paar einfacher rein imaginärer Wurzeln* $+i, -i$[1]*, aber daneben keine Wurzel* $\pm im$ *(*$m$ *ganze Zahl) und keine Wurzel* 0.

Die beiden ersten Gleichungen unseres Systems seien

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \cdots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \cdots;$$

die übrigen $n-2$ Gleichungen können von den Formen $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\delta)$ sein.

---

1) Sind die Wurzeln $+i\lambda$, $-i\lambda$ vorhanden, so machen wir $\lambda = 1$, indem wir $\lambda t$ als unabhängige Veränderliche einführen.

Wir fragen nach einer periodischen Lösung mit der Periode

$$T = 2\pi + \delta,$$

wo $\delta$ für $c_1 = 0, \cdots c_n = 0$ verschwindet.

Von den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Periodizität

$$x_1(2\pi + \delta) = c_1, \quad x_2(2\pi + \delta) = c_2, \quad \cdots x_n(2\pi + \delta) = c_n$$

scheiden wir die erste vorläufig aus; durch geeignete Wahl des Zeitanfangs erreichen wir, dafs für $t = 0$ $x_2 = 0$, also $c_2 = 0$ wird. (In der so bestimmten Lösung darf $t$ um eine Konstante vermehrt werden; wir werden künftig Lösungen, welche durch Änderung von $t$ um eine Konstante aus einander hervorgehen, nicht als verschieden ansehen.) Die $n-2$ Gleichungen

$$x_3(2\pi + \delta) - c_3 = 0, \quad \cdots x_n(2\pi + \delta) - c_n = 0$$

zerfallen in Gruppen von einer der in § 2 angegebenen Formen $(\alpha_1)$, $(\beta_1)$, $(\gamma_1)$, $(\delta_1)$, wenn man dort $T = 2\pi + \delta$ setzt. Die Funktionaldeterminante der linken Seiten dieser $n-2$ Gleichungen in Bezug auf die $n-2$ Gröfsen $c_3, \cdots c_n$ ist unter den oben gemachten Voraussetzungen für $c_1 = 0, \cdots c_n = 0$, $\delta = 0$ von Null verschieden, da keiner der Faktoren

$$e^{2\pi a} - 1$$

oder

$$(e^{2\pi\varkappa} - 1)^2 + 4e^{2\pi\varkappa}\sin^2\pi\lambda$$

verschwinden kann, weil die Fälle $a = 0$ und $\varkappa = 0$, $\lambda = m$ ausgeschlossen sind. Demnach ergeben sich aus den obigen $n-2$ Gleichungen $c_3, \cdots c_n$ als Potenzreihen von $c_1$ und $\delta$, welche durch $c_1^2$ teilbar sind, weil alle von $c_3, \cdots c_n$ freien Glieder in jenen Gleichungen, nachdem $c_2 = 0$ gesetzt ist, $c_1$ in der zweiten und in höheren Potenzen enthalten.

Man hat

$$x_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \cdots,$$

$$x_2 = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + \cdots$$

oder wegen $c_2 = 0$

$$x_1 = c_1 \cos t + c_1^2 \mathsf{A}_1(t) + \cdots, \quad x_2 = -c_1 \sin t + c_1^2 \mathsf{A}_2(t) + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von zweiter und höherer Dimension in $c_1, c_3, \cdots c_n$ sind. Die Bedingung

$$x_2(2\pi + \delta) = 0$$

schreibt sich, nachdem man für $c_3, \cdots c_n$ die oben berechneten Potenzreihen von $c_1$ und $\delta$ gesetzt hat, in der Form

$$-c_1 \sin\delta + c_1^2 \mathsf{A}_2(2\pi) + c_1^2 \mathfrak{P}(c_1, \delta) = 0,$$

wo $\mathfrak{P}(c_1, \delta) = \mathsf{A} c_1 + \cdots$ eine Potenzreihe von $c_1$, $\delta$ ohne konstantes Glied ist.

Wir zeigen, dafs $\mathsf{A}_2(2\pi) = 0$ ist. Um die Koeffizienten $\mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_1(t)$ und $\mathsf{A}_2 = \mathsf{A}_2(t)$ von $c_1^2$ in den Reihen für $x_1$ und $x_2$ zu finden, vergleichen wir in den beiden ersten Differentialgleichungen unseres Systems nach Einsetzung der Reihen für $x_1, \cdots x_n$ die Koeffizienten von $c_1^2$. Da $x_3, \cdots x_n$ kein in $c_1$ lineares Glied enthalten, so kommen auf der rechten Seite der beiden Gleichungen nur diejenigen Glieder zweiten Grades in Betracht, welche $x_3, \cdots x_n$ nicht enthalten:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 x_2 + \gamma_1 x_2^2 + \cdots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \alpha_2 x_2^2 + 2\beta_2 x_1 x_2 + \gamma_2 x_2^2 + \cdots.$$

Durch Einsetzung der Reihen

$$x_1 = c_1 \cos t + c_1^2 \mathsf{A}_1(t) + \cdots,$$

$$x_2 = -c_1 \sin t + c_1^2 \mathsf{A}_2(t) + \cdots$$

und Vergleichung der Koeffizienten von $c_1^2$ findet man für $\mathsf{A}_1$, $\mathsf{A}_2$ die Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathsf{A}_1}{dt} = \mathsf{A}_2 + \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 \cos 2t + \mathfrak{c}_1 \sin 2t,$$

$$\frac{d\mathsf{A}_2}{dt} = -\mathsf{A}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 \cos 2t + \mathfrak{c}_2 \sin 2t,$$

deren Koeffizienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sich durch die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ausdrücken. Mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $\mathsf{A}_1(0) = 0$, $\mathsf{A}_2(0) = 0$ findet man Ausdrücke von der Form

$$\mathsf{A}_1 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 \cos 2t + \mathfrak{C}_1 \sin 2t - (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1)\cos t - (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2)\sin t,$$

$$\mathsf{A}_2 = \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 \cos 2t + \mathfrak{C}_2 \sin 2t + (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1)\sin t - (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2)\cos t.$$

Demnach ist $\mathsf{A}_1(2\pi) = 0$, $\mathsf{A}_2(2\pi) = 0$, w. z. b. w.

Nach Division mit $c_1$ lautet die Gleichung $x_2(2\pi + \delta) = 0$

$$-\delta + A c_1^2 + \cdots = 0,$$

wo die weggelassenen Glieder von zweiter und höherer Dimension in $c_1$, $\delta$ sind; man erhält daraus $\delta$ als Potenzreihe von $c_1$ mit Gliedern mindestens zweiten Grades. Demnach ergeben sich auch $c_3, \cdots c_n$ als Potenzreihen von $c_1$ mit Gliedern zweiten und höheren Grades.

Wir haben somit eine Lösung $x_1, \cdots x_n$ unseres Differentialgleichungssystems in der Form dargestellt:

$$x_\alpha = c_1\varphi_{\alpha 1}(t) + c_1^2\varphi_{\alpha 2}(t) + c_1^3\varphi_{\alpha 3}(t) + \cdots \qquad (\alpha = 1, \cdots n),$$

wo

$$\varphi_{11} = \cos t, \quad \varphi_{21} = -\sin t, \quad \varphi_{31} = 0, \quad \cdots \varphi_{n1} = 0$$

ist. Diese Lösung erfüllt die Bedingungen

$$x_2(T) = x_2(0) = 0, \quad x_3(T) = x_3(0), \quad \cdots x_n(T) = x_n(0).$$

Dabei ist $c_1$, der Wert von $x_1$ für $t = 0$, eine hinreichend klein anzunehmende Konstante und $T$ eine Potenzreihe von $c_1$ von der Gestalt

$$T = 2\pi + \varepsilon_2 c_1^2 + \varepsilon_3 c_1^3 + \cdots.$$

*Die gefundene Lösung ist im allgemeinen nicht periodisch, d. h. die Bedingung*

$$x_1(T) = x_1(0) = c_1$$

*ist im allgemeinen nicht erfüllt.*

Nehmen wir etwa ein System von der Form

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + F(x_1, x_2); \quad F = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 + \cdots,$$

welches nach § 10 des Aufsatzes im 47. Bd. dieser Zeitschrift dann und nur dann periodische Lösungen besitzt, wenn unendlich viele Gröfsen $a_3, a_4, \cdots$ verschwinden, deren erste $a_3$ im allgemeinen von Null verschieden ist. So ist z. B. bei dem System

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \varrho x_2^3$$

die durch die Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x_1 = c_1, \quad x_2 = 0$$

bestimmte Lösung

$$x_1 = c_1\varphi_{11}(t) + c_1^3\varphi_{13}(t) + \cdots,$$

$$x_2 = c_1\varphi_{21}(t) + c_1^3\varphi_{23}(t) + \cdots,$$

$$\varphi_{11} = \cos t, \qquad \varphi_{13} = -\frac{\varrho}{32}(9\sin t + \sin 3t - 12\,t\cos t), \cdots,$$

$$\varphi_{21} = -\sin t, \quad \varphi_{23} = -\frac{3\varrho}{32}(-\cos t + \cos 3t + 4\,t\sin t), \cdots$$

Hier ist $a_3 = \varphi_{13}(2\pi) = \frac{3}{4}\pi\varrho$; also ist die berechnete Lösung nicht periodisch.[1])

In der in § 1 gestellten dynamischen Aufgabe kennt man das durch das Prinzip der lebendigen Kraft gelieferte Integral. Wir machen jetzt die Voraussetzung, *dafs das System*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \cdots, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \cdots, \cdots$$

*eine Integralgleichung*

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n) = \text{Const.}$$

*besitzt, wo* $\Phi$ *eine Potenzreihe von* $x_1, \cdots x_n$ *darstellt, in welcher die Glieder von geringerer als der* $p$ *ten Dimension* ($p \geqq 1$) *fehlen und der Koeffizient* $P$ *von* $x_1^p$ *von Null verschieden ist.*

Wenn wir statt $x_\alpha(T)$ kurz $x_\alpha$ schreiben, besteht die Gleichung

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n) = \Phi(c_1, 0, c_3, \cdots c_n)$$

oder, da die Bedingungen

$$x_2 = 0, \; x_3 = c_3, \cdots x_n = c_n$$

bereits erfüllt sind,

$$\Phi(x_1, 0, c_3, \cdots c_n) = \Phi(c_1, 0, c_3, \cdots c_n).$$

Setzt man darin für $c_3, \cdots c_n$ die oben gefundenen, mit $c_1^2$ beginnenden Potenzreihen von $c_1$, so erhält die Gleichung die Form

$$\Psi(x_1, c_1,) = \Psi(c_1, c_1);$$

dabei ist

$$\Psi(x_1, c_1) = Px_1^p + \Sigma Q x_1^{p'} c_1^{p''} \qquad (p' + p'' > p)$$

---

1) Wenn, wie Painlevé (Comptes rendus, Bd. 124, S. 1222 ff.) angiebt, die Potenzreihen von $\tau$, $x_1^0$, $x_2^0$, welche die linken Seiten der dortigen Gleichungen (3), (4) (der Periodizitätsbedingungen) bilden, stets einen gemeinsamen Teiler

$$\tau(1 + \cdots) - g(x_1^{02} + x_2^{02})^p + \cdots$$

besäfsen, so müfsten auch die linken Seiten unserer Periodizitätsbedingungen, die aus (3), (4) durch die Bezeichnungsänderung

$$\tau = \delta, \quad x_1^0 = c_1, \quad x_2^0 = 0$$

hervorgehen, eine Potenzreihe von $\delta$ und $c_1$ als gemeinsamen Teiler besitzen. Man sieht, dafs dies bei unserem Beispiel nicht richtig ist, wo es sich um die folgenden Bedingungen handelt:

$$-\tfrac{1}{2}\delta^2 + c_1^2\varphi_{13}(2\pi) + \cdots = 0, \quad \left(\varphi_{13}(2\pi) = \tfrac{3}{4}\pi\varrho\right),$$

$$-\delta + c_1^2\varphi_{23}(2\pi) + \cdots = 0, \quad (\varphi_{23}(2\pi) = 0).$$

eine Potenzreihe von $x_1$ und $c_1$, welche aufser dem Glied $Px_1^p$ nur Glieder von höherer als der $p$ten Dimension enthält. Wenn $x_1$ nicht gleich $c_1$ ist, geht die Gleichung

$$P(x_1^p - c_1^p) + \Sigma Q(x_1^{p'} - c_1^{p'})c_1^{p''} = 0 \qquad (p'+p'' > p,\ p'>0)$$

durch Division mit $x_1 - c_1$ über in

$$P(x_1^{p-1} + \cdots + c_1^{p-1}) + \Sigma Q(x_1^{p'-1} + \cdots)c_1^{p''} = 0.$$

Aus

$$x_1(t) = c_1 \cos t + \cdots$$

folgt

$$x_1 = x_1(2\pi + \delta) = c_1 \cos\delta + \cdots$$

oder wegen $\lim \delta = 0$ für $\lim c_1 = 0$

$$\lim_{c_1=0} \frac{x_1}{c_1} = 1.$$

Die Division der obigen Gleichung mit $c_1^{p-1}$ ergiebt

$$P\left(\left(\frac{x_1}{c_1}\right)^{p-1} + \cdots + 1\right) + \Sigma Q\left(\left(\frac{x_1}{c_1}\right)^{p'-1} + \cdots\right)c^{p'+p''-p} = 0;$$

für $\lim c_1 = 0$ ist die linke Seite dieser Gleichung gleich $pP$, also von Null verschieden; die Annahme, es sei $x_1(T)$ nicht gleich $c_1$, hat also auf einen Widerspruch geführt.

*Infolge der Integralgleichung $\Phi =$ Const. ist die Periodizitätsbedingung $x_1(T) = x_1(0)$ eine Folge der $n-1$ übrigen; die oben berechnete Lösung besitzt also die Periode $T$.*

Aus den Entwickelungen des gegenwärtigen Paragraphen geht hervor, dafs es aufser der gefundenen Lösung mit der willkürlichen Konstante $c_1$ keine weitere Lösung mit einer von $2\pi$ wenig verschiedenen Periode geben kann, welche die Bedingung $x_2(0) = 0$ erfüllt; daraus geht die allgemeinste derartige Lösung durch Änderung von $t$ um eine Konstante hervor. Nach § 2 sind möglicherweise auch periodische Lösungen mit einer von $2m\pi$ ($m$ ganze Zahl) wenig abweichenden Periode vorhanden. Wir setzen voraus, dafs die charakteristische Gleichung $\Delta = 0$ neben der Wurzel $\pm i$ Wurzeln von der Form $\pm ir$ ($r$ rationale Zahl) nicht besitzt, und wiederholen die bisherigen Betrachtungen, indem wir $T = 2m\pi + \tau$ setzen. Auch jetzt ist die Funktionaldeterminante der linken Seiten der Gleichungen

$$x_3(2m\pi + \tau) - c_3 = 0, \ \cdots\ x_n(2m\pi + \tau) - c_n = 0$$

in Bezug auf die $n-2$ Gröfsen $c_3, \cdots c_n$ für $c_1 = 0, \cdots c_n = 0$, $\tau = 0$ von Null verschieden, da die Faktoren

$$e^{2m\pi a} - 1$$

und

$$(e^{2m\pi\varkappa}-1)^2+4e^{2m\pi\varkappa}\sin^2 m\pi\lambda$$

von Null verschieden sind; denn die Fälle $a=0$ und $\varkappa=0$, $m\lambda=$ ganze Zahl sind teils durch die früheren, teils durch die oben neu hinzugefügte Voraussetzung ausgeschlossen. Es giebt demnach eine Lösung von der Periode $2m\pi+\tau$ mit einer willkürlichen Konstanten $c_1$, aber keine weitere derartige Lösung, abgesehen von der Vermehrung von $t$ um eine Konstante. Da die oben dargestellte Lösung von der Periode $2\pi+\delta$ auch als Lösung von der Periode $m(2\pi+\delta)=2m\pi+\tau$ aufgefafst werden kann, so mufs sie mit der soeben gefundenen Lösung identisch sein.

## § 4.

Eine andere analytische Darstellung der in § 3 unter gewissen Voraussetzungen nachgewiesenen periodischen Lösung unseres Differentialgleichungssystems erhalten wir durch Einführung der neuen Veränderlichen

$$u=\frac{2\pi t}{T}.$$

Unsere periodische Lösung gestattet eine für hinreichend kleine Werte von $|c|$ konvergente Entwicklung von der Form

$$x_\alpha=c\psi_{\alpha 1}(u)+c^2\psi_{\alpha 2}(u)+c^3\psi_{\alpha 3}(u)+\cdots\text{[1]}\qquad(\alpha=1,\cdots n),$$

worin $\psi_{\alpha 1}, \psi_{\alpha 2}, \psi_{\alpha 3}, \cdots$ Funktionen von $u$ mit der Periode $2\pi$ sind. Da nämlich $x_\alpha$ in Bezug auf $u$ die Periode $2\pi$ besitzt, so ist

$$x_\alpha(u+2\pi)-x_\alpha(u)=\sum_{\nu=1}^{\infty}c^\nu[\psi_{\alpha\nu}(u+2\pi)-\psi_{\alpha\nu}(u)]=0;$$

da die Potenzreihe von $c$ nur verschwinden kann, wenn alle Koeffizienten verschwinden, so ist $\psi_{\alpha\nu}(u+2\pi)=\psi_{\alpha\nu}(u)$.

Setzt man

$$\frac{2\pi}{T}=1+\eta_2c^2+\eta_3c^3+\cdots,$$

so geht unser Differentialgleichungssystem[2])

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2+\cdots,$$

$$\frac{dx_2}{dt}=-x_1+\cdots,$$

$$\frac{dx_\alpha}{dt}=a_{\alpha 3}x_3+\cdots+a_{\alpha n}x_n+\cdots\qquad(\alpha=3,\cdots n)$$

---

1) $c$ ist die in § 3 mit $c_1$ bezeichnete Gröfse.

2) Dabei sind $x_3, \cdots x_n$ entweder die in § 2 eingeführten neuen Veränderlichen oder lineare Verbindungen derselben.

über in

$$(1 + \eta_2 c^2 + \cdots)\frac{dx_1}{du} = x_2 + \cdots,$$

$$(1 + \eta_2 c^2 + \cdots)\frac{dx_2}{du} = - x_1 + \cdots,$$

$$(1 + \eta_2 c^2 + \cdots)\frac{dx_3}{du} = a_{\alpha 3} x_3 + \cdots + a_{\alpha n} x_n + \cdots \qquad (\alpha = 3, \cdots n).$$

Indem wir in Verbindung mit den Funktionen $\psi_{\alpha\nu}$ auch die Konstanten $\eta_2, \eta_3, \cdots$ berechnen, erhalten wir von neuem die Reihenentwicklung der Periode $T$.

Durch Einsetzung der Reihen für die $x_\alpha$ in die Differentialgleichungen mit der Veränderlichen $u$ und Vergleichung der Koeffizienten von $c, c^2, \cdots c^\nu, \cdots$ erhält man Differentialgleichungen für $\psi_{\alpha 1}, \psi_{\alpha 2}, \cdots \psi_{\alpha\nu}, \cdots$ Behufs Bestimmung der Integrationskonstanten beachtet man, daſs wegen $x_1 = c$, $x_2 = 0$ für $u = 0$

$$\psi_{11}(0) = 1, \quad \psi_{21}(0) = 0,$$

$$\psi_{1\nu}(0) = 0, \quad \psi_{2\nu}(0) = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \cdots)$$

sein muſs und daſs alle $\psi_{\alpha\nu}$ die Periode $2\pi$ besitzen müssen.

Zunächst hat man die Differentialgleichungen

$$\frac{d\psi_{11}}{du} = \psi_{21}, \quad \frac{d\psi_{21}}{du} = - \psi_{11},$$

$$\frac{d\psi_{\alpha 1}}{du} = a_{\alpha 3}\psi_{31} + \cdots + a_{\alpha 3}\psi_{n1} \qquad (\alpha = 3, \cdots n)$$

mit der Lösung

$$\psi_{11} = \cos u, \; \psi_{21} = - \sin u, \; \psi_{31} = 0, \cdots \psi_{n1} = 0.$$

Die Werte von $\psi_{11}$ und $\psi_{21}$ ergeben sich mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $\psi_{11}(0) = 1$, $\psi_{21}(0) = 0$; die linearen Differentialgleichungen für $\psi_{31}, \cdots \psi_{n1}$ besitzen unter den in § 3 über die Wurzeln der charakteristischen Gleichung gemachten Voraussetzungen keine andere Lösung mit der Periode $2\pi$ als $\psi_{31} = 0, \cdots \psi_{n1} = 0$.

Für $\psi_{12}, \cdots \psi_{n2}$ hat man Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d\psi_{12}}{du} = \psi_{22} + \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 \cos 2u + \mathfrak{c}_1 \sin 2u,$$

$$\frac{d\psi_{22}}{du} = - \psi_{12} + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 \cos 2u + \mathfrak{c}_2 \sin 2u,$$

$$\frac{d\psi_{\alpha 2}}{du} = a_{\alpha 3}\psi_{32} + \cdots + a_{\alpha n}\psi_{n2} + \mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{b}_\alpha \cos 2u + \mathfrak{c}_\alpha \sin 2u \qquad (\alpha = 3, \cdots n).$$

Die beiden ersten Gleichungen ergeben unter Berücksichtigung der Bedingungen $\psi_{12}(0) = 0$, $\psi_{22}(0) = 0$ Ausdrücke von der Form

$$\psi_{\alpha 2} = A^{(0)}_{\alpha 2} + A^{(1)}_{\alpha 2} \cos u + A^{(2)}_{\alpha 2} \cos 2u + B^{(1)}_{\alpha 2} \sin u + B^{(2)}_{\alpha 2} \sin 2u. \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Die $n-2$ letzten Gleichungen besitzen eine partikuläre Lösung von der Gestalt

$$\psi_{\alpha 2} = A^{(0)}_{\alpha 2} + A^{(2)}_{\alpha 2} \cos 2u + B^{(2)}_{\alpha 2} \sin 2u \qquad (\alpha = 3, \cdots n),$$

und zwar ist dies die einzige Lösung mit der Periode $2\pi$, da das System

$$\frac{d\psi_\alpha}{du} = a_{\alpha 3}\psi_3 + \cdots + a_{\alpha n}\psi_n \qquad (\alpha = 3, \cdots n)$$

keine Lösung mit der Periode $2\pi$ zuläfst.

Wir beweisen, dafs allgemein

$$\psi_{\alpha\nu} = A^{(0)}_{\alpha\nu} + A^{(1)}_{\alpha\nu} \cos u + \cdots + A^{(\nu)}_{\alpha\nu} \cos \nu u + B^{(1)}_{\alpha\nu} \sin u + \cdots + B^{(\nu)}_{\alpha\nu} \sin \nu u \qquad (\alpha = 1, \cdots n)$$

ist, wo die $A$ und $B$ konstant sind. Wir nehmen an, diese Formel sei für $\nu = 1, 2, \cdots p-1$ gültig, und zeigen, dafs sie auch für $\nu = p$ gilt; wir setzen gleichzeitig $\eta_2, \cdots \eta_{p-2}$ als berechnet voraus und berechnen $\eta_{p-1}$. Die zur Bestimmung der $\psi_{\alpha p}$ $(\alpha = 1, \cdots n)$ dienenden Differentialgleichungen sind von der Form

$$\frac{d\psi_{\alpha p}}{du} + \eta_2 \frac{d\psi_{\alpha, p-2}}{du} + \cdots + \eta_{p-1} \frac{d\psi_{\alpha 1}}{du}$$
$$= a_{\alpha 1}\psi_{1p} + \cdots + a_{\alpha n}\psi_{np} + \Sigma C \psi_{\alpha 1, p1} \cdots \psi_{\alpha \varrho, p_\varrho} \qquad (\varrho \gtreqless 2,\ p_1 + \cdots p_\varrho = p)$$

oder nach Einsetzung der Werte für die Funktionen $\psi_{\alpha 1}, \cdots \psi_{\alpha, p-1}$ und deren Ableitungen

$$\frac{d\psi_{\alpha p}}{du} = a_{\alpha 1}\psi_{1p} + \cdots + a_{\alpha n}\psi_{np} - \eta_{p-1}\frac{d\psi_{\alpha 1}}{du}$$
$$+ \mathfrak{A}^{(0)}_{\alpha p} + \mathfrak{A}^{(1)}_{\alpha p} \cos u + \cdots + \mathfrak{A}^{(p)}_{\alpha p} \cos pu$$
$$+ \mathfrak{B}^{(1)}_{\alpha p} \sin u + \cdots + \mathfrak{B}^{(p)}_{\alpha p} \sin pu.$$

Das Glied $-\eta_{p-1}\frac{d\psi_{\alpha 1}}{du}$ ist gleich $\eta_{p-1} \sin u$ für $\alpha = 1$, gleich $\eta_{p-1} \cos u$ für $\alpha = 2$, während es für $\alpha = 3, \cdots n$ verschwindet. Damit $\psi_{1p}$, $\psi_{2p}$ die Periode $2\pi$ besitzen, müssen die Glieder mit $\cos u$ und $\sin u$ auf

der rechten Seite der beiden ersten Differentialgleichungen fortfallen; man berechnet $\eta_{p-1}$ aus der Gleichung

$$\eta_{p-1} + \mathfrak{B}_{1p}^{(1)} = 0.$$

Zur Bestimmung der beiden in $\psi_{1p}$, $\psi_{2p}$ enthaltenen Integrationskonstanten dienen die Bedingungen $\psi_{1p}(0) = 0$, $\psi_{2p}(0) = 0$. Die Funktionen $\psi_{\alpha p}$ $(\alpha = 3, \cdots n)$ sind durch die $n-2$ letzten Differentialgleichungen und die Bedingung, dafs sie die Periode $2\pi$ besitzen sollen, vollständig bestimmt. Sämtliche Gröfsen $\psi_{\alpha p}$ erscheinen in der oben für $\psi_{\alpha\nu}$ angenommenen Form.

Wir fassen die Ergebnisse von §§ 2—4 in den folgenden Satz zusammen:

*Die charakteristische Gleichung*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s, & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & \cdots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0$$

*des Differentialgleichungssystems*

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha(x_1, \cdots x_n) \qquad (\alpha = 1, \cdots n),$$

*wo* $X_\alpha$ *in eine Potenzreihe von* $x_1, \cdots x_n$ *entwickelbar ist:*

$$X_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n + \cdots,$$

*habe neben den einfachen Wurzeln* $+i\lambda$, $-i\lambda$ *keine Wurzel* $\pm im\lambda$ *(m ganze Zahl) und keine verschwindende Wurzel.*

*Durch eine lineare Transformation von* $x_1, \cdots x_n$ *und durch Einführung von* $\lambda t$ *als unabhängige Veränderliche bringt man das System auf die Form*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \cdots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \cdots,$$

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = a_{\alpha 3} x_3 + \cdots + a_{\alpha n} x_n + \cdots \qquad (\alpha = 3, \cdots n).$$

*Es sei ein Integral*

$$\Phi(x_1, \cdots x_n) = \text{Const.}$$

*vorhanden, wo* $\Phi$ *eine Potenzreihe von* $x_1, \cdots x_n$ *ist, welche mit Gliedern* $p$*ter Dimension beginnt und in welcher das Glied mit* $x_1^p$ *nicht fehlt.*

*Das transformierte System besitzt eine periodische Lösung*

$$x_\alpha = c\varphi_{\alpha 1}(t) + c^2\varphi_{\alpha 2}(t) + c^3\varphi_{\alpha 3}(t) + \cdots \qquad (\alpha = 1, \cdots n)$$

*mit einer Periode von der Form*

$$T = 2\pi + \varepsilon_2 c^2 + c_3 c^3 + \cdots {}^{1)};$$

*es ist*

$$\varphi_{11} = \cos t,\ \varphi_{21} = -\sin t,\ \varphi_{31} = 0,\ \ldots \varphi_{n1} = 0.$$

*Man kann diese Lösung, indem man*

$$u = \frac{2\pi t}{T}$$

*setzt, in der Form darstellen:*

$$x_\alpha = c\psi_{\alpha 1}(u) + c^2\psi_{\alpha 2}(u) + c^3\psi_{\alpha 3}(u) + \cdots; \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

*hierin ist*

$$\psi_{11} = \cos u,\ \psi_{21} = -\sin u,\ \psi_{31} = 0,\ \ldots \psi_{n1} = 0$$

*und*

$$\psi_{\alpha\nu} = A^{(0)}_{\alpha\nu} + \sum_{\mu=1}^{\nu} A^{(\mu)}_{\alpha\nu} \cos \mu u + \sum_{\mu=1}^{\nu} B^{(\mu)}_{\alpha\nu} \sin \mu u.$$

## § 5.

Wir wenden die bisherigen Resultate auf die in § 1 aufgestellten Lagrangeschen Gleichungen für die Bewegung eines Systems von $n$ Freiheitsgraden in der Nähe einer Gleichgewichtslage an. Wir geben diesen Gleichungen unter Einführung der Hauptkoordinaten $x_1 \ldots x_n$ wie am Schlusse von § 1 die Form

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = x'_\alpha,$$

$$\frac{dx'_\alpha}{dt} = s_\alpha x_\alpha + F_\alpha(x'_1, \ldots x'_n;\ x_1, \ldots x_n) + G_\alpha(x_1, \ldots x_n). \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \begin{vmatrix} -s, & 1 \\ s_\alpha, & -s \end{vmatrix} = \prod_{\alpha=1}^{n} (s^2 - s_\alpha) = 0$$

sind

$$+\sqrt{s_\alpha},\ -\sqrt{s_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots n).$$

---

1) Dabei ist $c$ der Wert von $x_1$ für $t = 0$, während $x_2$ für $t = 0$ verschwindet. In der angegebenen Lösung kann $t$ durch $t +$ Const. ersetzt werden. Sämtliche aufgestellten Potenzreihen von $c$ sind für hinreichend kleine Werte von $|c|$ konvergent.

Um periodische Bewegungen zu erhalten, nehmen wir an, dafs eine der Gröfsen $s_\alpha$, z. B. $s_1$ negativ ist. Indem wir $\sqrt{-s_1}\cdot t$ als unabhängige Veränderliche einführen, erreichen wir, dafs $s_1 = -1$ wird, so dafs die charakteristische Gleichung die Wurzeln $\pm i$ besitzt. Wenn wir annehmen, dafs keine der Gröfsen $s_2, \ldots s_n$ gleich Null oder gleich $-m^2$ ($m$ ganze Zahl) ist, so ist keine Wurzel der charakteristischen Gleichung gleich $\pm im$ ($m$ ganze Zahl). Unser Differentialgleichungssystem besitzt das Integral

$$T - U = \text{Const.}$$

oder

$$x_1'^2 + \cdots + x_n'^2 - s_1 x_1^2 - \cdots - s_n x_n^2 + \cdots = \text{Const.}$$

wo der Koeffizient $-s_1 = 1$ von $x_1^2$ von Null verschieden ist. Es sind also die in § 3 aufgestellten hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein periodischer Bewegungen erfüllt.

Es giebt für jeden hinreichend kleinen Wert von $c$ eine periodische Bewegung

$$x_\alpha = c\varphi_{\alpha 1}(t) + c^2\varphi_{\alpha 2}(t) + c^3\varphi_{\alpha 3}(t) + \cdots, \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

$$\varphi_{11} = \cos t, \quad \varphi_{21} = 0, \quad \ldots \varphi_{n1} = 0,$$

mit einer Periode von der Form

$$T = 2\pi + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^3 + \cdots.$$

Für $t = 0$ verschwinden sämtliche Funktionen $\varphi_{1\nu}$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ und ihre Ableitungen $\varphi'_{1\nu}$, so dafs $c$ der Wert von $x_1$ für $t = 0$ ist, während $x_1'$ für $t = 0$ verschwindet. Durch Vermehrung von $t$ um eine Konstante gehen aus einer periodischen Bewegung unendlich viele andere hervor, die wir aber nicht als verschieden betrachten.

Setzt man

$$u = \frac{2\pi t}{T},$$

so erscheint die periodische Bewegung in der Form

$$x_\alpha = c\psi_{\alpha 1}(u) + c^2\psi_{\alpha 2}(u) + c^3\psi_{\alpha 3}(u) + \cdots, \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

worin

$$\psi_{11} = \cos u, \quad \psi_{21} = 0, \quad \ldots \psi_{n1} = 0$$

und

$$\psi_{\alpha\nu} = A_{\alpha\nu}^{(0)} + A_{\alpha\nu}^{(1)}\cos u + \cdots + A_{\alpha\nu}^{(\nu)}\cos \nu u \qquad (\nu > 1)$$

ist. Zur Berechnung der $\psi_{\alpha\nu}$ sowie der Koeffizienten der Potenzreihe für $T$ oder der Reihe

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = 1 + \eta_2 c^2 + \eta_3 c^3 + \cdots$$

geben wir den Bewegungsgleichungen die Form

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{d^2x_\alpha}{du^2} = s_\alpha x_\alpha + F_\alpha\left(\frac{2\pi}{T}\frac{dx_1}{du}, \cdots; x_1, \cdots\right) + G_\alpha(x_1, \ldots x_n). \qquad (\alpha=1,\ldots n)$$

Wir nehmen an, der für $\psi_{\alpha\nu}$ angegebene Ausdruck sei für $\nu = 1, 2, \ldots p-1$ giltig, und zeigen, dafs er auch für $\nu = p$ gilt; gleichzeitig berechnen wir $\eta_{p-1}$, indem wir $\eta_2, \ldots \eta_{p-2}$ als berechnet voraussetzen. Die Rechnung wird wie in § 4 geführt; es fehlen nur in den $\psi$ die Sinusglieder. Wenn $\psi_{\alpha\nu}$ nur Kosinusglieder enthält, so enthält $\frac{d\psi_{\alpha\nu}}{du}$ nur Sinusglieder; da $F_\alpha$ eine quadratische Form von $\frac{dx_1}{du}, \cdots \frac{dx_n}{du}$ ist, so enthält die rechte Seite der Differentialgleichung für $\psi_{\alpha p}$ nur Produkte je zweier Gröfsen $\frac{d\psi_{\alpha\nu}}{du}(\alpha = 1, \ldots n;\ \nu = 1, \ldots p-1)$, die sich als Kosinussummen darstellen lassen; infolgedessen treten auch in $\psi_{\alpha p}$ nur Kosinus auf.

Wir haben den Satz:

*Die Lage eines Systems von n Freiheitsgraden mit von der Zeit t unabhängigen Verbindungen sei durch die Hauptkoordinaten $x_1, \ldots x_n$ dargestellt. Es sei eine Kräftefunktion $U\ (x_1, \ldots x_n)$ vorhanden, welche in der Umgebung der Gleichgewichtslage $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ die Entwicklung zuläfst:*

$$U = \tfrac{1}{2}(s_1x_1^2 + \cdots + s_nx_n^2) + \cdots.$$

*Es sei $s_1 = -\lambda_1^2$ [1]) negativ und keiner der Quotienten $\frac{s_2}{s_1}, \cdots \frac{s_n}{s_1}$ gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl oder gleich Null.*

*Wir haben dann eine in der Nähe der Gleichgewichtslage $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ verlaufende periodische Bewegung*

$$x_\alpha = c\varphi_{\alpha1}(t) + c^2\varphi_{\alpha2}(t) + c^3\varphi_{\alpha3}(t) + \cdots, \qquad (\alpha=1,\ldots n)$$

$$\varphi_{11} = \cos\lambda_1 t,\ \varphi_{21} = 0,\ \ldots \varphi_{n1} = 0,$$

*mit einer Periode von der Form*

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + \varepsilon_2c^2 + \varepsilon_3c^3 + \cdots.\,^{2)}$$

---

1) Vorhin war $\lambda_1 t$ als unabhängige Veränderliche eingeführt; jetzt wird $t$ nicht transformiert.

2) Für $t=0$ ist $x_1 = c$, $\frac{dx_1}{dt} = 0$. Man kann $t$ um eine Konstante vermehren. Alle Potenzreihen von $c$ sind für hinreichend kleine Werte von $|\,c\,|$ konvergent.

*Man kann diese Bewegung, indem man*

$$u = \frac{2\pi t}{T}$$

*setzt, in der Form darstellen;*

$$x_\alpha = c\psi_{\alpha 1}(u) + c^2\psi_{\alpha 2}(u) + c^3\psi_{\alpha 3}(u) + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

*hierin ist*

$$\psi_{11} = \cos u, \ \psi_{21} = 0, \cdots \psi_{n1} = 0$$

*und*

$$\psi_{\alpha\nu} = A_{\alpha\nu}^{(0)} + A_{\alpha\nu}^{(1)} \cos u + \cdots + A_{\alpha\nu}^{(\nu)} \cos \nu u.$$

Wir denken uns jetzt nicht von vorn herein Hauptkoordinaten eingeführt; die Lage des Systems sei vielmehr durch beliebige Koordinaten $\xi_1, \ldots \xi_n$ dargestellt, welche in der Gleichgewichtslage verschwinden. Die Ausdrücke für die lebendige Kraft $T$ und die Kräftefunktion $U$ seien wie in § 1:

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots \xi_n) \cdot \xi'_\alpha \xi'_\beta; \quad A_{\alpha\beta}(0, \ldots 0) = a_{\alpha\beta},$$

$$(\delta, \beta = 1, \ldots n)$$

$$U = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta + \cdots.$$

*Die Wurzeln der Gleichung*

$$\begin{vmatrix} sa_{11} - b_{11}, \ldots, sa_{1n} - b_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ sa_{n1} - b_{n1}, \ldots, sa_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

*seien sämtlich negativ:*

$$s_1 = -\lambda_1^2, \ \ldots, \ s_n = -\lambda_n^2,$$

sodafs $\xi_1 = 0, \ldots \xi_n = 0$ eine *stabile Gleichgewichtslage* ist. Wir setzen ferner voraus, *dafs* $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ *verschieden und dafs keiner der Quotienten* $\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} (\alpha, \beta = 1, \ldots n)$ *eine rationale Zahl ist.*

Durch Einführung von Hauptkoordinaten $x_1 \ldots x_n$ vermittelst der Gleichungen

$$\xi_1 = h_{11}x_1 + \cdots + h_{1n}x_n,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\xi_n = h_{n1}x_1 + \cdots + h_{nn}x_n$$

gehen die quadratischen Formen

$$\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}\xi'_\alpha\xi'_\beta, \quad \sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$$

in
$$x_1'^2 + \cdots + x_n'^2, \quad -(\lambda_1^2 x_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 x_n^2)$$
über. Zur Berechnung der Substitutionskoeffizienten $h_{1\beta}, \ldots h_{n\beta}$ dienen die Gleichungen
$$(\lambda_\beta^2 a_{\alpha 1} + b_{\alpha 1}) h_{1\beta} + \cdots + (\lambda_\beta^2 a_{\alpha n} + b_{\alpha n}) h_{n\beta} = 0; \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$
es verhalten sich demnach $h_{1\beta}, \ldots h_{n\beta}$ wie die Unterdeterminanten einer Zeile der Determinante
$$\begin{vmatrix} \lambda_\beta^2 a_{11} + b_{11}, \ldots \lambda_\beta^2 a_{1n} + b_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_\beta^2 a_{n1} + b_{n1}, \ldots \lambda_\beta^2 a_{nn} + b_{nn} \end{vmatrix}.$$
Man kann etwa $h_{1\beta} = 1$ setzen, worauf $h_{2n}, \ldots h_{n\beta}$ vollständig bestimmt sind.

Wir haben *in der Nähe der Gleichgewichtslage n Scharen von periodischen Bewegungen;* der Gröfse $\lambda_\beta (\beta = 1, \ldots n)$ entspricht eine *Schar periodischer Bewegungen mit von* $\frac{2\pi}{\lambda_\beta}$ *wenig abweichender Periode.*[1]

---

1) *Kommen unter den Gröfsen $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ zwar kommensurable vor, ist aber keiner der Quotienten $\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} (\alpha, \beta = 1, \ldots n)$ eine ganze Zahl, so sind diese n Scharen von periodischen Schwingungen auch vorhanden, wir können aber nicht behaupten, dafs damit sämtliche in der Nähe der Gleichgewichtslage verlaufenden periodischen Bewegungen gefunden wären.* Denn der Gröfse $\lambda_1$ könnten nach dem letzten Absatz von § 3 aufser der gefundenen Schar von Bewegungen mit von $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ wenig abweichender Periode allenfalls noch Bewegungen mit einer von $m \frac{2\pi}{\lambda_1}$ ($m$ ganze Zahl) wenig verschiedenen Periode entsprechen, wenn eine der Gröfsen $\lambda_2, \ldots \lambda_n$ mit $\lambda_1$ kommensurabel ist. So besitzt z. B. das System linearer Differentialgleichungen
$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \lambda_1^2 x_1, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \lambda_2^2 x_2,$$
wenn $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$ ist, die allgemeine Lösung
$$x_1 = c_1 \cos(3t + \gamma_1), \; x_2 = c_2 \cos(5t + \gamma_2)$$
mit der Periode
$$2\pi = 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 5 \cdot \frac{2\pi}{5},$$
während die Lösung
$$x_1 = c_1 \cos(3t + \gamma_1), \; x_2 = 0$$
die Periode $\frac{2\pi}{3}$, die Lösung
$$x_1 = 0, \quad x_2 = c_2 \cos(5t + \gamma_2)$$
die Periode $\frac{2\pi}{5}$ besitzt.

Die Betrachtungen, welche wir im folgenden für die erste Schar anstellen, lassen sich auf die $n-1$ anderen übertragen.

In erster Annäherung haben wir die periodische Bewegung

$$x_1 = c\cos\lambda_1 t,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0,$$

wo $c$ der Wert von $x_1$ für den Wert $t = 0$ ist, für welchen $x_1'$ verschwindet.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\xi_\alpha &= ch_{\alpha 1}\cos\lambda_1 t\\ \xi_\alpha' &= -ch_{\alpha 1}\lambda_1\sin\lambda_1 t.\end{aligned}\qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

Es ist

$$\xi_\alpha = ch_{\alpha 1},\qquad \xi_\alpha' = 0 \quad \text{für} \quad t = 0,$$

$$\xi_\alpha = -ch_{\alpha 1},\quad \xi_\alpha' = 0 \quad \text{für} \quad t = \frac{\pi}{\lambda_1};$$

ferner haben wir

$$\xi_\alpha = 0,\quad \xi_\alpha' = -ch_{\alpha 1}\lambda_1 \quad \text{für} \quad t = \frac{\pi}{2\lambda_1},$$

$$\xi_\alpha = 0,\quad \xi_\alpha' = ch_{\alpha 1}\lambda_1 \qquad \text{für} \quad t = \frac{3\pi}{2\lambda_1};$$

die Periode der Bewegung ist $\frac{2\pi}{\lambda_1}\cdot$ Es erreichen bei Beschränkung auf die erste Näherung $\xi_1, \ldots \xi_n$ gleichzeitig ihre Nullwerte bezw. ihre extremen Werte.

Genau stellen sich die Koordinaten $\xi_\alpha$ und die Geschwindigkeiten $\xi_\alpha'(\alpha = 1, \ldots n)$ folgendermaßen dar:

$$\xi_\alpha = ch_{\alpha 1}\cos\lambda_1 t + c^2(h_{\alpha 1}\varphi_{12}(t) + \cdots + h_{\alpha n}\varphi_{n2}(t)) + \cdots,$$

$$\xi_\alpha' = -ch_{\alpha 1}\lambda_1\sin\lambda_1 t + c^2(h_{\alpha 1}\varphi_{12}'(t) + \cdots + h_{\alpha n}\varphi_{n2}'(t)) + \cdots;$$

es ist $\varphi_{12}(0) = 0$, $\varphi_{12}'(0) = 0$. Die Periode ist von der Form $T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + \varepsilon_2 c^2 + \cdots$. Zu den Zeiten

$$t = c\,\frac{h_{\alpha 2}\varphi_{22}'(0) + \cdots + h_{\alpha n}\varphi_{n2}'(0)}{h_{\alpha 1}\lambda_1^2} + \cdots$$

und

$$t = \frac{\pi}{\lambda_1} - c\,\frac{h_{\alpha 1}\varphi_{12}'\left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right) + \cdots + h_{\alpha n}\varphi_{n2}'\left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)}{h_{\alpha 1}\lambda_1^2} + \cdots$$

erreicht $\xi_\alpha$ den extremen Wert

$$\xi_\alpha = ch_{\alpha 1} + c^2(h_{\alpha 2}\varphi_{22}(0) + \cdots + h_{\alpha n}\varphi_{n2}(0)) + \cdots$$

bezw.

$$\xi_\alpha = -ch_{\alpha 1} + c^2\left(h_{\alpha 1}\varphi_{12}\left(\frac{}{\lambda_1}\right) + \cdots + h_{\alpha n}\varphi_{n2}\left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)\right) + \cdots.$$

Die Koordinate $\xi_\alpha$ geht durch ihren Nullwert zu den Zeiten

$$t = \frac{\pi}{2\lambda_1} + c\,\frac{h_{\alpha 1}\varphi_{12}\left(\frac{\pi}{2\lambda_1}\right) + \cdots + h_{\alpha n}\varphi_{n2}\left(\frac{\pi}{2\lambda_1}\right)}{h_{\alpha 1}\lambda_1} + \cdots$$

und

$$t = \frac{3\pi}{2\lambda_1} - c\,\frac{h_{\alpha 1}\varphi_{12}\left(\frac{3\pi}{2\lambda_1}\right) + \cdots + h_{\alpha n}\varphi_{n2}\left(\frac{3\pi}{2\lambda_1}\right)}{h_{\alpha 1}\lambda_1} + \cdots$$

mit der Geschwindigkeit

$$\xi_\alpha' = -\,c h_{\alpha 1}\lambda_1 + c_2\left(h_{\alpha 1}\varphi_{12}'\left(\frac{\pi}{2\lambda_1}\right) + \cdots + h_{\alpha n}\varphi_{n2}'\left(\frac{\pi}{2\lambda_1}\right)\right) + \cdots$$

bezw.

$$\xi_\alpha' = c h_{\alpha 1}\lambda_1 + c^2\left(h_{\alpha 1}\varphi_{12}'\left(\frac{3\pi}{2\lambda_1}\right) + \cdots + h_{\alpha n}\varphi_{n2}'\left(\frac{3\pi}{2\lambda_1}\right)\right) + \cdots.$$

## § 6.

Für ein System von einem Freiheitsgrad sei die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2} A\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

wo

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

eine positive Funktion von $x$ ist, und die Kräftefunktion

$$U = \tfrac{1}{2} b_1 x^2 + \tfrac{1}{3} b_2 x^3 + \cdots, \quad b_1 < 0,$$

so daſs $x = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage ist. Die Bewegungsgleichung lautet

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\frac{dA}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{dU}{dx}$$

oder, wenn man

$$-\frac{b_1}{a_0} = \lambda^2,$$

$$\frac{1}{A}\frac{dU}{dx} - \frac{b_1}{a_0}x = \frac{a_0 b_2 - a_1 b_1}{a_0^2}x^2 + \cdots = G(x)$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{d\log A}{dx} = F(x)$$

setzt,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = F(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + G(x).$$

Nach § 5 ist eine periodische Bewegung mit den Anfangsbedingungen $x = c$, $x' = 0$ für $t = 0$

$$x = c\cos\lambda t + c^2\varphi_2(t) + c^3\varphi_3(t) + \cdots$$

vorhanden, deren Periode von der Form ist:

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^3 + \cdots.$$

Ersetzt man $t$ durch $t +$ Const., so hat man die allgemeinste in der Nähe der Gleichgewichtslage $x = 0$ verlaufende Bewegung. Setzt man

$$u = \frac{2\pi t}{T},$$

so wird die obige Bewegung dargestellt durch

$$x = c\psi_1(u) + c^2\psi_2(u) + c^3\psi_3(u) + \cdots,$$

wo

$$\psi_1(u) = \cos u$$

und

$$\psi_\nu(u) = A_\nu^{(0)} + A_\nu^{(1)} \cos u + \cdots + A_\nu^{(\nu)} \cos \nu u$$

ist.

In § 1 des früheren Aufsatzes (Bd. 47 dieser Zeitschr.) ist die Bewegungsgleichung durch die Substitution

$$\xi = \int_0^x \sqrt{A(x)}\, dx$$

auf die Form

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi = \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \cdots$$

gebracht worden. In § 9 und § 10 wurde die allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

betrachtet, wo $F(x, x')$ eine Potenzreihe von $x$, $x'$ mit Gliedern von mindestens zweiter Dimension darstellt.[1]) Enthält $F(x, x')$ wie in unserem jetzigen Falle nur gerade Potenzen von $x'$, so sind sämtliche in der Nähe von $x = 0$ verlaufenden Bewegungen periodisch, und in dem im § 10 aufgestellten Ausdruck für $\psi_\nu(u)$ fallen die Sinusglieder fort.

Wir wenden die allgemeinen Resultate auf das folgende Beispiel an:

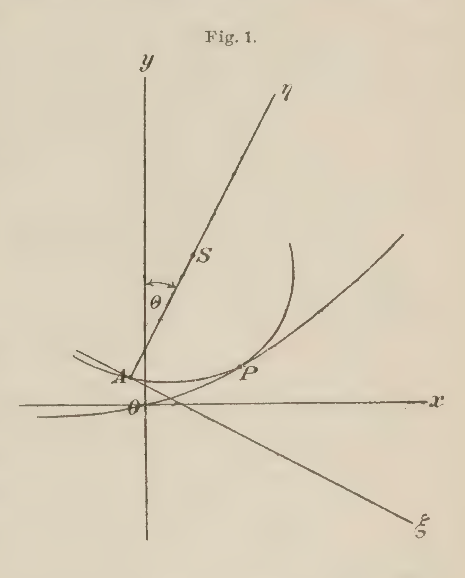
*Ein schwerer Cylinder befindet sich in stabilem Gleichgewicht auf einer vollkommen rauhen Cylinderfläche; die Erzeugenden beider Cylinder-*

---

1) Im 47. Bd. dieser Zeitschr., S. 421, Zeile 3 von oben mufs es heifsen: $\varphi_2(\pi) = \frac{2}{3}(\alpha + 2\gamma)$.

*flächen sind horizontal und parallel. Es sollen die Schwingungen des schweren Cylinders untersucht werden, wenn derselbe eine kleine Störung erfährt.*[1])

In Fig. 1 sind die Schnitte $C$ und $\Gamma$ beider Cylinder mit einer zu ihren Erzeugenden senkrechten Ebene dargestellt. $O$ sei der Punkt, in welchem die Leitkurve $C$ der festen Cylinderfläche in der Gleichgewichtslage von der Leitkurve $\Gamma$ des rollenden Cylinders berührt wird. Durch $O$ ist die $x$-Achse horizontal, die $y$-Achse vertikal aufwärts gelegt. Die Gleichung der festen Kurve $C$ sei




$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots;$$

ihre rechte Seite sei in eine für hinreichend kleine Werte von $|x|$ konvergente Potenzreihe entwickelbar. Die bewegliche Kurve $\Gamma$ ist auf mit ihr fest verbundene Achsen $\xi$, $\eta$ mit dem Anfangspunkt $A$ bezogen; in der Gleichgewichtslage fallen die Achsen $\xi$, $\eta$ mit den Achsen $x$, $y$, also der Punkt $A$ mit dem Punkt $O$ zusammen. Die Kurve $\Gamma$ habe die Gleichung

$$\eta = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \cdots.$$

Es ist $a_1 = \alpha_1$, weil sich in der Gleichgewichtslage beide Kurven in $O$ berühren. Der Schwerpunkt $S$ des rollenden Cylinders habe die Koordinaten $\xi = 0$, $\eta = h$; in der Gleichgewichtslage ist dann $x = 0$, $y = h$, $S$ liegt mit $O$ in einer Vertikalen.

Zu einer gewissen Zeit berühren sich die beiden Kurven im Punkte $P$, welcher im festen Achsenkreuz die Koordinaten $x$, $y$, im beweglichen die Koordinaten $\xi$, $\eta$ habe. Die $\eta$-Achse bilde mit der $y$-Achse den Winkel $\theta$. Setzt man den Bogen $AP$ der rollenden gleich dem Bogen $OP$ der festen Kurve, so erhält man die Gleichung

$$\sqrt{1 + a_1^2} \cdot x + \frac{a_1 a_2}{\sqrt{1 + a_1^2}} x^2 + \cdots = \sqrt{1 + \alpha_1^2} \cdot \xi + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} \xi^2 + \cdots;$$

daraus berechnet man

$$x = \xi + \frac{a_1 (\alpha_2 - a_2)}{1 + a_1^2} \xi^2 + \cdots.$$

1) Vgl. Routh I., S. 394 ff. und S. 454 ff.

Die gemeinsame Tangente beider Kurven im Berührungspunkte $P$ bilde mit der $x$-Achse den Winkel $w$, mit der $\xi$-Achse den Winkel $\tilde{\omega}$; dann ist

$$\theta = \tilde{\omega} - w, \quad \operatorname{tg} \tilde{\omega} = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad \operatorname{tg} w = \frac{dy}{dx},$$

also

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{d\eta}{d\xi}\frac{dy}{dx}}$$

oder

$$\theta + \cdots, = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 \xi + \cdots - (a_1 + 2a_2 x + \cdots)}{1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 \xi + \cdots)(a_1 + 2a_2 x + \cdots)};$$

daraus erhält man, nachdem man $x$ durch $\xi$ ausgedrückt hat, die Gleichung

$$\xi = \mu_1 \theta + \mu_2 \theta^2 + \cdots,$$

aus welcher die folgenden hervorgehen:

$$x = m_1 \theta + m_2 \theta^2 + \cdots,$$
$$\eta = \nu_1 \theta + \nu_2 \theta^2 + \cdots,$$
$$y = n_1 \theta + n_2 \theta^2 + \cdots;$$

darin ist

$$\mu_1 = m_1 = \frac{1 + a_1^2}{2(\alpha_2 - a_2)},$$

$$\nu_1 = n_1 = \frac{a_1(1 + a_1^2)}{2(\alpha_2 - a_2)},$$

$$m_2 - \mu_2 = \frac{a_1(1 + a_1^2)}{4(\alpha_2 - a_2)},$$

$$\nu_2 - n_2 = \frac{1 + a_1^2}{4(\alpha_2 - a_2)}.$$

Das Quadrat der Entfernung des Punkts $P$ vom Schwerpunkt $S$ ist

$$\xi^2 + (\eta - h)^2 = h^2 + \gamma_1 \theta + \gamma_2 \theta^2 + \cdots; \quad \gamma_1 = -\frac{h a_1 (1 + a_1^2)}{\alpha_2 - a_2}.$$

Bezeichnet man die Masse des rollenden Cylinders mit 1 und den Trägheitsradius in Bezug auf die Achse durch den Schwerpunkt mit $k$, so ist die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}(k^2 + h^2 + \gamma_1 \theta + \gamma_2 \theta^2 + \cdots)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Die Entfernung des Schwerpunktes $S$ von der $x$-Achse ist

$$y + \xi \sin \theta + (h - \eta) \cos \theta = h + \tfrac{1}{2}\delta_1 \theta^2 + \tfrac{1}{3}\delta_2 \theta^3 + \cdots;$$

demnach haben wir die Kräftefunktion

$$U = -g(h + \tfrac{1}{2}\delta_1\theta^2 + \tfrac{1}{3}\delta_2\theta^3 + \cdots);$$

darin ist

$$\delta_1 = 2(\mu_1 + n_2 - \nu_2) - h = \frac{1 + a_1^2}{2(\alpha_2 - a_2)} - h.$$ [1]

Ist $\delta_1 > 0$, so ist die Lage $\theta = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage.

Die Differentialgleichung der Bewegung lautet

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d\log(k^2 + h^2 + \gamma_1\theta + \gamma_2\theta^2 + \cdots)}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$
$$= -\frac{g(\delta_1\theta + \delta_2\theta^2 + \cdots)}{k^2 + h^2 + \gamma_1\theta + \gamma_2\theta^2 + \cdots}$$

oder, wenn die rechte Seite gleich

$$-\frac{g\delta_1}{k^2 + h^2}\theta + A_2\theta^2 + \cdots,$$

der Faktor von $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ gleich

$$-(B_2 + B_3\theta + \cdots)$$

gesetzt wird,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\delta_1}{k^2 + h^2}\theta = A_2\theta^2 + \cdots + (B_2 + \cdots)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung nach § 5 oder nach § 9 und § 10 der früheren Arbeit liefert im Falle $\delta_1 > 0$ die kleinen Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage $\theta = 0$.

## § 7.

Wir wenden die Ergebnisse des § 5 auf ein Beispiel mit zwei Freiheitsgraden an.

*Ein schwerer Massenpunkt bewege sich auf einer krummen Fläche in der Nähe einer Stelle O mit wagerechter Tangentialebene. Wir untersuchen die kleinen periodischen Schwingungen.*

---

1) Bezeichnet man mit $\tau$ den Winkel, welchen die Tangente der Kurve $C$ in $O$ mit der $x$-Achse bildet, mit $r$ den Krümmungsradius der Kurve $C$ in $O$, mit $\varrho$ den Krümmungsradius der Kurve $\Gamma$ in $A$, so ist

$$a_1 = \alpha_1 = \operatorname{tg}\tau, \quad a_2 = \frac{1}{2r\cos^3\tau}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\varrho\cos^3\tau}.$$

Wenn wir die Richtung der positiven $x$-Achse so wählen, daſs der Winkel $\tau$ spitz oder gleich Null ist, so ist $r$ (bezw. $\varrho$) positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Kurve $C$ (bezw. $\Gamma$) nach unten konvex oder konkav ist. Dann ist

$$\delta_1 = \frac{r\varrho}{r - \varrho}\cos\tau - h.$$

Wir nehmen die vertikal aufwärts gerichtete Normale der Fläche in $O$ zur $z$-Achse, die Tangenten der Krümmungslinien in $O$ zu Achsen $x$ und $y$ eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Bezeichnet man die Hauptkrümmungsradien der Fläche in $O$ mit $\varrho_1$ und $\varrho_2$, so ist die Gleichung der Fläche

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2}\right) + \cdots;$$

die rechte Seite ist eine für hinreichend kleine Werte von $|x|$ und $|y|$ konvergente Potenzreihe. Setzt man die Masse des bewegten Punktes gleich 1, so ist

$$U = -gz = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{\varrho_1} + \frac{y^2}{\varrho_2}\right) + \cdots,$$

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$= x'^2\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) + y'^2\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) + 2x'y'\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= x'^2\left(1 + \frac{x^2}{\varrho_1^2} + \cdots\right) + y'^2\left(1 + \frac{y^2}{\varrho_2^2} + \cdots\right) + 2x'y'\left(\frac{xy}{\varrho_1\varrho_2} + \cdots\right).$$

Demnach sind $x$, $y$ Hauptkoordinaten. Wir haben (§ 1 und § 5)

$$s_1 = -\frac{g}{\varrho_1}, \quad s_2 = -\frac{g}{\varrho_2}.$$

Vermittelst der angegebenen Werte von $T$ und $U$ lassen sich die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen bilden und nach $x''$, $y''$ auflösen.

Einfacher ist die direkte Herleitung der Differentialgleichungen der Bewegung. Man hat

$$x'' = -\lambda\frac{\partial z}{\partial x}, \quad y'' = -\lambda\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'' = -g + \lambda,$$

wo

$$-\lambda\frac{\partial z}{\partial x}, \quad -\lambda\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \lambda$$

die Komponenten der normalen Reaktion der Fläche sind. Zur Bestimmung von $\lambda$ ersetzt man in der zweimal nach $t$ differentiierten Flächengleichung

$$z'' = x''\frac{\partial z}{\partial x} + y''\frac{\partial z}{\partial y} + x'^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x'y'\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y'^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$x''$, $y''$, $z''$ durch die rechten Seiten der drei Differentialgleichungen.

Man erhält so für die beiden unabhängigen Koordinaten $x$, $y$ die Differentialgleichungen

$$x'' = -\frac{\partial z}{\partial x}\frac{g + x'^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x'y'\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

$$y'' = -\frac{\partial z}{\partial y}\frac{g + x'^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x'y'\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Mit Rücksicht auf

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\varrho_1} + \cdots, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\varrho_2} + \cdots$$

erhalten diese Differentialgleichungen die Form

$$x'' = -\frac{g}{\varrho_1}x + \cdots, \quad y'' = -\frac{g}{\varrho_2}y + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von mindestens zweiter Dimension in $x$, $y$, $x'$, $y'$ sind.

Ist $O$ ein elliptischer Punkt und zugleich eine tiefste Stelle der Fläche, sind also $\varrho_1$ und $\varrho_2$ beide positiv, so ist $O$ eine stabile Gleichgewichtslage. Um die Sätze in § 5 anwenden zu können, setzen wir voraus, dafs $\varrho_1$ und $\varrho_2$ verschieden sind (dafs also $O$ kein Nabelpunkt ist) und dafs weder $\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$ noch $\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}$ eine ganze Zahl ist. Dann sind zwei Scharen von periodischen Bewegungen vorhanden, deren Perioden von $2\pi\sqrt{\frac{\varrho_1}{g}}$ bezw. $2\pi\sqrt{\frac{\varrho_2}{g}}$ wenig abweichen. Wenn $\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$ irrational ist, giebt es keine weitere, in der Nähe von $O$ verlaufende periodische Bewegung.

Ist $O$ ein hyperbolischer Flächenpunkt, ist etwa $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 < 0$, so haben wir nur eine Schar von periodischen Bewegungen mit von $2\pi\sqrt{\frac{\varrho_1}{g}}$ wenig abweichender Periode.

Der Fall, dafs $O$ ein parabolischer Punkt ist ($\varrho_2 = \infty$), läfst sich mit den bisherigen Hilfsmitteln nicht erledigen; denn das Verschwinden von $s_2$ war in § 5 ausdrücklich ausgeschlossen.

Die Bewegung mit der Periode

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho_1}{g}} + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^3 + \cdots,$$

die im ersten und zweiten der drei aufgeführten Fälle vorhanden ist, wird durch die Gleichungen

$$x = c\cos\sqrt{\frac{g}{\varrho_1}}\,t + c^2\varphi_{12}(t) + \cdots,$$
$$y = \qquad\qquad c^2\varphi_{22}(t) + \cdots,$$

oder

$$x = c\cos\frac{2\pi t}{T} + c^2\psi_{12}\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \cdots,$$

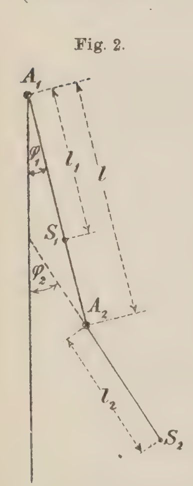
$$y = \qquad\qquad c^2\psi_{22}\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \cdots,$$

dargestellt; dabei ist $x = c$, $x' = 0$ für $t = 0$. Die Projektion der Bahnkurve auf die $xy$-Ebene ist eine geschlossene Linie, welche bei kleinem $c$ von dem Abschnitt $x = c \cdots x = -c$ der $x$-Achse wenig abweicht; zur Diskussion dieser Kurve können die Formeln am Schlusse von § 5 dienen.

## § 8.

Wir behandeln ein weiteres Beispiel mit zwei Freiheitsgraden (Glocke und Klöppel[1])).

Fig. 2.




*Der Körper $K_1$ (Glocke) sei um eine feste wagerechte Achse $A_1$ drehbar, der Körper $K_2$ (Klöppel) um eine in $K_1$ befestigte, zu $A_1$ parallele Achse $A_2$. Der Schwerpunkt $S_1$ von $K_1$ soll auf der Verbindungslinie $A_1A_2$ liegen. Wir untersuchen die kleinen periodischen Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Der Schwerpunkt von $K_2$ sei $S_2$. Die Strecken $A_1A_2 = l$, $A_1S_1 = l_1$, $A_2S_2 = l_2$ seien sämtlich positiv (gleichgerichtet).* $I_1$ sei das Trägheitsmoment von $K_1$ in Bezug auf die Drehachse $A_1$, $I_2$ das Trägheitsmoment von $K_2$ in Bezug auf die durch den Schwerpunkt $S_2$ parallel zu $A_1$ gelegte Achse; $K_1$ habe die Masse $m_1$, $K_2$ die Masse $m_2$. Zur Zeit $t$ bilde $A_1A_2$ den Winkel $\varphi_1$, $A_2S_2$ den Winkel $\varphi_2$ mit der Lotrechten (Fig. 2).

Die lebendige Kraft des Systems ist

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1 + m_2l^2)\,\varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2}(I_2 + m_2l_2^2)\,\varphi_2'^2 + m_2ll_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\cdot\varphi_1'\varphi_2'$$

und die Kräftefunktion

$$U = (m_1l_1 + m_2l)g\cos\varphi_1 + m_2l_2g\cos\varphi_2.$$

In der Nähe der stabilen Gleichgewichtslage $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ gelten die Entwicklungen

---

1) Vgl. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. IV, § 33.

$$T = \tfrac{1}{2}(a_{11}\varphi_1'^2 + 2a_{12}\varphi_1'\varphi_2' + a_{22}\varphi_2'^2) + \cdots,$$

$$U = \text{Const.} + \tfrac{1}{2}(b_{11}\varphi_1^2 + b_{22}\varphi_2^2) + \cdots;$$

es ist

$$a_{11} = I_1 + m_2 l^2, \quad a_{22} = I_2 + m_2 l_2^2, \quad a_{12} = m_2 l l_2,$$

$$b_{11} = -(m_1 l_1 + m_2 l) g, \quad b_{22} = -m_2 l_2 g.$$

An Stelle der Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2$ führen wir Hauptkoordinaten $x_1, x_2$ ein. Durch eine lineare Transformation

$$\varphi_1 = x_1 + x_2,$$

$$\varphi_2 = h_1 x_1 + h_2 x_2$$

machen wir

$$a_{11}\varphi_1'^2 + 2a_{12}\varphi_1'\varphi_2' + a_{22}\varphi_2'^2 = x_1'^2 + x_2'^2,$$

$$b_{11}\varphi_1^2 + b_{22}\varphi_2^2 = -(\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2);$$

die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} s a_{11} + b_{11}, & s a_{12} \\ s a_{21} & , s a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$s^2[I_1 I_2 + m_2(I_1 l_2^2 + I_2 l^2)] - s \cdot g[(I_1 + m_2 l^2) m_2 l_2 + (I_2 + m_2 l_2^2)(m_1 l_1 + m_2 l)]$$
$$+ g^2 \cdot m_2 l_2 (m_1 l_1 + m_2 l) = 0$$

hat die positiven und von einander verschiedenen Wurzeln $\lambda_1^2, \lambda_2^2$. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\lambda_i^2 a_{11} + b_{11}\right) + \lambda_i^2 a_{12} \cdot h_i &= 0 \\ \lambda_i^2 a_{21} + \left(\lambda_i^2 a_{22} + b_{22}\right) \cdot h_i &= 0 \end{aligned} \qquad (i = 1, 2)$$

berechnet man $h_1$ und $h_2$. Die Transformation der Lagrangeschen Gleichungen

$$(I_1 + m_2 l^2)\varphi_1'' + m_2 l l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\varphi_2''$$
$$= m_2 l l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\varphi_2'^2 - (m_1 l_1 + m_2 l) g \sin\varphi_1,$$

$$m_2 l l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\varphi_1'' + (I_2 + m_2 l_2^2)\varphi_2''$$
$$= -m_2 l l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\varphi_1'^2 - m_2 l_2 g \sin\varphi_2$$

auf die Form

$$x_1'' + \lambda_1^2 x_1 = \cdots, \quad x_2'' + \lambda_2^2 x_2 = \cdots$$

kann hiernach ausgeführt werden.

Wenn $\lambda_1$ und $\lambda_2$ inkommensurabel sind, so sind nach § 5 zwei Scharen von periodischen Bewegungen mit Perioden vorhanden, welche von $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ bezw. $\frac{2\pi}{\lambda_2}$ wenig abweichen. (Sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ kommensurabel, ist aber weder $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ noch $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ eine ganze Zahl, so sind diese beiden Scharen von periodischen Schwingungen immer noch vorhanden, durch die bisherigen Sätze ist aber das Vorhandensein weiterer periodischer Bewegungen nicht ausgeschlossen.) Betrachten wir die erste Schar mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^3 + \cdots,$$

wo $c$ den Wert von $x_1$ für den Wert $t = 0$ darstellt, für welchen $x_1' = 0$ ist; die Bewegung wird durch die Gleichungen

$$x_1 = c\cos\lambda_1 t + c^2\varphi_{12}(t) + \cdots = c\cos u + c^2\psi_{12}(u) + \cdots,$$

$$x_2 = \qquad c^2\varphi_{22}(t) + \cdots = \qquad c^2\psi_{22}(u) + \cdots$$

dargestellt, wo

$$u = \frac{2\pi t}{T}$$

ist. Daraus gehen die Gleichungen hervor:

$$\varphi_1 = c\cos\lambda_1 t + c^2(\varphi_{12}(t) + \varphi_{22}(t)) + \cdots,$$

$$\varphi_2 = ch_1\cos\lambda_1 t + c^2(h_1\varphi_{12}(t) + h_2\varphi_{22}(t)) + \cdots$$

oder

$$\varphi_1 = c\cos u + c^2(\psi_{12}(u) + \psi_{22}(u)) + \cdots,$$

$$\varphi_2 = ch_1\cos u + c^2(h_1\psi_{12}(u) + h_2\psi_{22}(u)) + \cdots.$$

Beschränkt man sich auf die erste Annäherung, d. h. vernachlässigt man die zweite und die höheren Potenzen von $c$, so nehmen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ gleichzeitig ihre Nullwerte und gleichzeitig ihre extremen Werte an. Dies ist bei genauer Darstellung der Bewegung nicht mehr der Fall. Zur Diskussion der Schwingungsbewegung dienen die allgemeinen Formeln am Schlusse von § 5.

---

# Über die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen auf graphischem Wege.

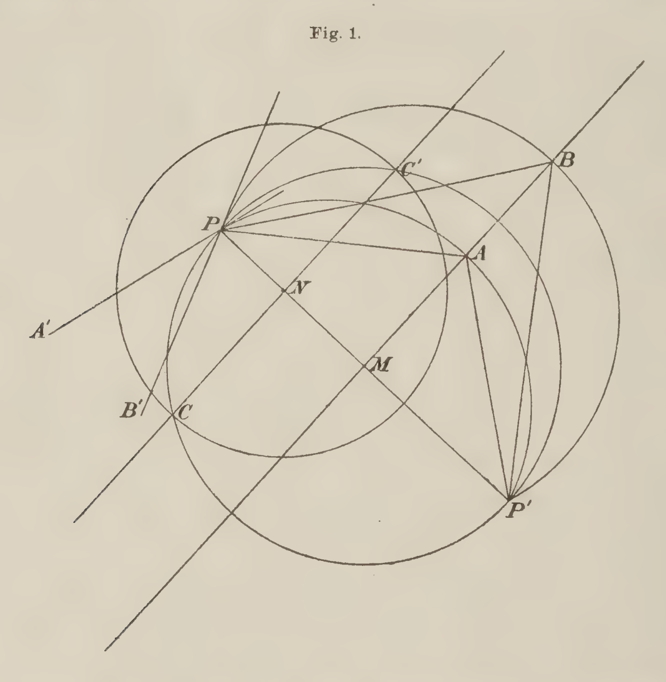
Von C. Runge in Hannover.

Wenn die Punkte einer Kugel durch stereographische Projektion auf einer Ebene dargestellt werden, so kann man durch eine sehr einfache Konstruktion zwei beliebige Drehungen um zwei beliebige Achsen zusammensetzen. Es mögen auf unsere Kugel die Ausdrücke Nordpol, Südpol, Erdachse, Äquator, Meridian in derselben Bedeutung, die sie bei der Erdkugel haben, übertragen werden. Für die stereographische Projektion, die wir „die Erdkarte“ nennen wollen, werde der Südpol als Projektionszentrum gewählt, und die Ebene des Äquators sei zur Projektionsebene gemacht. Jede Drehungsachse kann durch ihre beiden Pole dargestellt werden, von denen einer innerhalb des Äquators, der andere aufserhalb liegt. Es genügt auch, nur einen Pol anzugeben, da jeder Pol durch den andern bestimmt ist. Die Bahn, die bei der Drehung um irgend zwei Pole der ursprünglich mit dem Südpol zusammenfallende Punkt beschreibt, ist notwendig eine gerade Linie, die die Verbindungslinie der beiden Pole halbiert. Denn erstens wird in stereographischer Projektion jeder Kreis wieder als Kreis dargestellt, der in dem speziellen Fall, wo der Kreis durch den Südpol geht, in eine gerade Linie entarten mufs, weil er ja den unendlich fernen Punkt der stereographischen Projektion enthält. Zweitens schneidet der Kreis, welchen bei der Drehung um die gegebenen Pole der ursprünglich mit dem Südpol zusammenfallende Punkt beschreibt, den Meridian der beiden Drehungspole unter rechtem Winkel, folglich mufs auch in der stereographischen Projektion die ihm entsprechende gerade Linie die gerade Linie, welche den Meridian darstellt, unter rechtem Winkel schneiden. Die Bahn des ursprünglichen Südpols schneidet aber nicht nur den Meridian der beiden Pole, sondern überhaupt jeden durch die beiden Drehungspole laufenden gröfsten Kreis unter rechtem Winkel. Unter andern also auch den gröfsten Kreis, der auf dem Meridian senkrecht steht und der also in der stereographischen Projektion die Verbindungslinie der beiden Drehungspole zum Durchmesser hat. Mithin mufs die gerade Linie ein Durchmesser dieses Kreises sein und mufs deshalb die Verbindungslinie der beiden Drehungspole senkrecht halbieren.

Bei jeder Drehung um die beiden Drehungspole verschiebt sich diese gerade Linie in sich. Jeder ihrer Punkte beschreibt eine

gerade Strecke. Diese Strecken haben aber nicht die gleiche Länge, sondern ihre Länge variiert in solcher Weise, daſs sie vom Drehungspol aus gesehen unter gleichem Winkel erscheinen. Der Winkel giebt den halben Drehungswinkel an. Das ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Sei $A$ ein beliebiger Punkt der geraden Linie, der sich bei der Drehung bis nach $B$ bewegt, so konstruiere man den gröſsten Kreis, der durch $A$ und durch die beiden Drehungspole $P$, $P'$ geht. Dieser Kreis ist auf der Erdkarte durch einen Kreis dargestellt, der die Verbindungslinie $PP'$ der beiden Drehungspole zur Sehne hat.

Fig. 1.




Bei der Drehung geht dieser Kreis in einen andern Kreis über, der auf der Karte ebenfalls die Verbindungslinie der beiden Drehungspole zur Sehne hat. Die beiden Kreise schneiden sich also in den beiden Drehungspolen unter einem Winkel, der nach den Eigenschaften der stereographischen Abbildung gleich dem Winkel ist, unter dem sich die entsprechenden gröſsten Kreise auf der Kugel schneiden, d. h. gleich dem Drehungswinkel. Nun ist als Peripheriewinkel der Winkel $\sphericalangle PAP'$, unter dem von $A$ aus gesehen die Verbindungslinie der beiden Drehungspole erscheint, gleich dem Winkel $A'PP'$ den die Tangente $PA'$ im Drehungspol $P$ mit der Verbindungslinie der beiden Pole bildet. Folglich ist der Unterschied der beiden Winkel, unter denen $PP'$ von $A$ und von $B$ aus gesehen erscheint, gleich dem

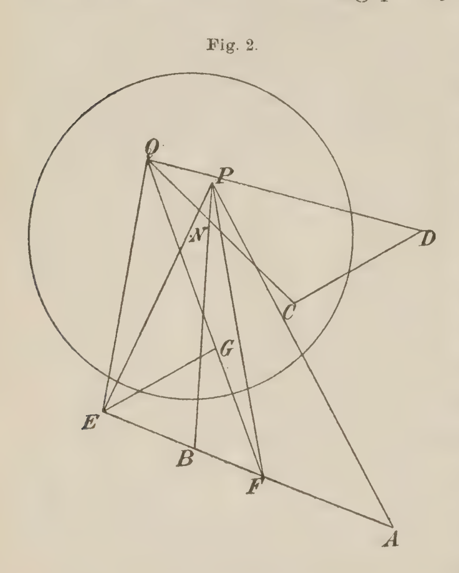
Drehungswinkel $A'PB'$. Dieser Unterschied ist aber gleich dem doppelten des Winkels $\sphericalangle BPA$ oder $BP'A$, unter dem die Strecke $AB$ von den Drehungspolen aus gesehen erscheint. Mithin ist, wie behauptet, der Winkel, unter dem $AB$ von den Drehungspolen gesehen erscheint, gleich dem halben Drehungswinkel.

Anstatt die Drehungspole und den Drehungswinkel anzugeben, genügt es auch, nur die Strecke $AB$ anzugeben. Denn aus ihr kann man sowohl die Drehungspole wie den Drehungswinkel finden. Um zunächst die Drehungspole zu konstruieren, ziehe man durch den Nordpol $N$ eine Parallele zu $AB$. Ferner fälle man vom Nordpol ein Lot $NM$ auf die Gerade $AB$ oder ihre Verlängerung. Um den Fuſspunkt $M$ dieses Lotes als Zentrum schlage man einen Kreis, mit einem solchen Radius, daſs er den Äquator in denselben Punkten $C$, $C'$ scheidet, wie jene Parallele zu $AB$. Dieser Kreis ist ein gröſster Kreis; denn er schneidet den Äquator in Antipoden $C$, $C'$. Da er auſserdem die gerade Linie $AB$ senkrecht schneidet, so ist er der Kreis, der die Verbindungslinie der beiden Drehungspole $P$, $P'$ zum Durchmesser hat. Die beiden Drehungspole liegen auf der Geraden, die den Mittelpunkt $M$ dieses Kreises mit dem Nordpol verbindet. Mit den Polen ist nun auch der Drehungswinkel gefunden; denn er ist gleich dem doppelten des Winkels $\sphericalangle BPA$, unter dem die Strecke $AB$ von den Drehungspolen aus gesehen erscheint. Jede beliebige auf der Erdkarte gezogene Strecke stellt also eine gewisse Drehung dar. Zwei verschiedene Strecken stellen Drehungen um verschiedene Drehungsachsen dar, wenn sie nicht in derselben Geraden liegen; dagegen stellen sie Drehungen um dieselbe Achse dar, wenn sie in derselben Geraden liegen. Jede Drehung kann durch eine gerade Strecke dargestellt werden, mit Ausnahme der Drehungen um die Erdachse selbst. Bei diesen ist die gerade Strecke ins Unendliche gerückt, und es ist nur der Winkel übrig geblieben, unter dem sie vom Nordpol aus gesehen erscheint. Man kann sich diesem Grenzfall beliebig genau nähern, wenn man einen der Drehungspole sehr nahe am Nordpol annimmt. Die Strecke liegt dann sehr weit entfernt, während sie vom Pol aus gesehen immer unter dem halben Drehungswinkel gesehen erscheint.

Wenn man zwei Drehungen auf diese Weise durch zwei gerade Strecken $AB$, $CD$ dargestellt hat, so kann man durch die folgende graphische Konstruktion die beiden Drehungen zu einer einzigen zusammensetzen. Man verlängere zunächst die beiden Strecken, bis sie sich schneiden. Alsdann verschiebe man die erste Strecke in ihrer Geraden, bis ihr Endpunkt in den gefundenen Schnittpunkt $E$ fällt. Der Anfangspunkt muſs dabei so verschoben werden, daſs der Winkel, unter dem die Strecke

vom Pole $P$ aus gesehen erscheint, derselbe bleibt $\sphericalangle APB = FPE$. In ähnlicher Weise verschiebt man auch die zweite Strecke; nur soll hier der Anfangspunkt mit dem Schnittpunkt $E$ der beiden Geraden zusammenfallen, während der Endpunkt $G$ so liegen muss, daſs die Strecke von ihrem Drehungspol $Q$ gesehen wieder unter dem halben Drehungswinkel erscheint $\sphericalangle CQD = EQG$. Sind die beiden Strecken auf diese Weise aneinander gelegt, so stellt die Strecke, die den Anfangspunkt $F$ der ersten mit dem Endpunkt $G$ der zweiten verbindet, die resultierende Drehung dar. Die Zusammensetzung ist also ganz ähnlich wie bei der Zusammensetzung von Kräften, nur geht die Resultierende nicht durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt. Aus diesem Grunde ist auch die Resultierende nicht unabhängig von der Reihenfolge der beiden Komponenten. Vertauscht man die Reihenfolge der beiden Drehungen, die man zusammensetzen will, so liegt die resultierende Strecke nicht mehr in derselben Geraden, und infolge dessen ist die Achse der resultierenden Drehung eine andere.

Fig. 2.




Der Beweis, daſs sich zwei Drehungen in dieser Weise zusammensetzen, liegt darin, daſs jede der beiden Geraden sich bei der betreffenden Drehung in sich selbst verschiebt. Seien $FE$ und $EG$ die beiden aneinandergelegten Strecken, und daher nach der Behauptung $FG$ die der zusammengesetzten Drehung entsprechende Strecke, so sieht man zunächst, daſs der Punkt $F$ sich durch die beiden aufeinanderfolgenden Drehungen nach $G$ begiebt. Bei der ersten Drehung gelangt der Punkt von $F$ bis $E$. Die Strecke $FG$ wird bei der ersten Drehung nicht mehr geradlinig bleiben; aber der Winkel, den sie in $F$ mit der Geraden $FE$ macht, wird derselbe bleiben. Denn auf der Kugel wird der Winkel durch die Drehung nicht geändert, folglich muſs er wegen der winkeltreuen Abbildung auch auf der Karte derselbe bleiben. Die Richtung der Linie $FG$ in ihrem Anfangspunkt wird also durch die erste Drehung nicht geändert. In derselben Weise folgt, daſs ihre Richtung auch bei der zweiten Drehung nicht geändert wird. Das Gesamtresultat besteht also darin, daſs durch die beiden Drehungen

zusammen der Anfangspunkt der Linie $FG$ von $F$ nach $G$ rückt, während ihre Anfangsrichtung vorher und nachher dieselbe ist. Wenn nun durch die resultierende Drehung der Punkt $G$ in einen Punkt $G'$ übergeht, so muſs der Kreis, der durch die drei Punkte $F$, $G$, $G'$ gelegt werden kann, bei der Drehung in sich übergehen. Da aber seine Richtung, wenn er in demselben Sinne durchlaufen wird, in $F$ und in $G$ dieselbe sein muſs, so ist dies nicht anders möglich, als wenn er in eine gerade Linie entartet, d. h. die Gerade $FG$ geht bei der resultierenden Drehung in sich selbst über. Der Winkel, unter dem die Strecke $FG$ von dem zugehörigen Pol aus gesehen erscheint, ist der halbe Drehungswinkel.

Ist die eine der beiden zusammenzusetzenden Drehungen eine Drehung um die Erdachse, so liegt der Punkt $E$ im Unendlichen. Ist die erste Drehung durch eine gewisse Strecke dargestellt, so hat man diese in ihrer Geraden so zu verschieben, daſs ihr Endpunkt $E$ ins Unendliche fällt. Zu dem Ende hat man durch den zugehörigen Drehungspol eine Parallele zu der geraden Linie zu ziehen und hieran den halben Drehungswinkel so anzulegen, daſs der eine Schenkel in die Parallele fällt, während der Scheitel im Pol liegt. Der andere Schenkel schneidet dann die gerade Linie der ersten Drehung in dem Punkte $F$, dem Anfangspunkte der die erste Drehung repräsentierenden Strecke. Die unendliche Strecke $FE$ (wo $E$ im Unendlichen liegt) ist nun um den halben Drehungswinkel der zweiten Drehung um $F$ zu drehen. Dann stellt sie die resultierende Drehung dar.

Ist die erste Drehung eine Drehung um die Erdachse, so ist der Anfangspunkt der zweiten Strecke ins Unendliche zu verlegen. Dann stellt der Endpunkt $G$ der zweiten Strecke auch den Endpunkt der resultierenden Strecke dar, deren Anfangspunkt im Unendlichen liegt, wo er durch die erste Strecke herumgeschwenkt worden ist. Die Richtung zwischen der resultierenden Strecke und der die zweite Drehung repräsentierenden ist gleich dem halben Drehungswinkel der ersten Drehung. Von dem Dreieck $FEG$ liegt also, wenn die Drehung um die Erdachse die zweite ist, die Seite $EG$ im Unendlichen; wenn dagegen die Drehung um die Erdachse die erste Drehung ist, so liegt die Seite $FE$ im Unendlichen. In beiden Fällen haben wir es mit der Schwenkung einer Strecke zu thun, von der nur ein Endpunkt im Endlichen liegt. In dem ersten Falle liegt der Anfangspunkt der Strecke im Endlichen, im zweiten Falle der Endpunkt.

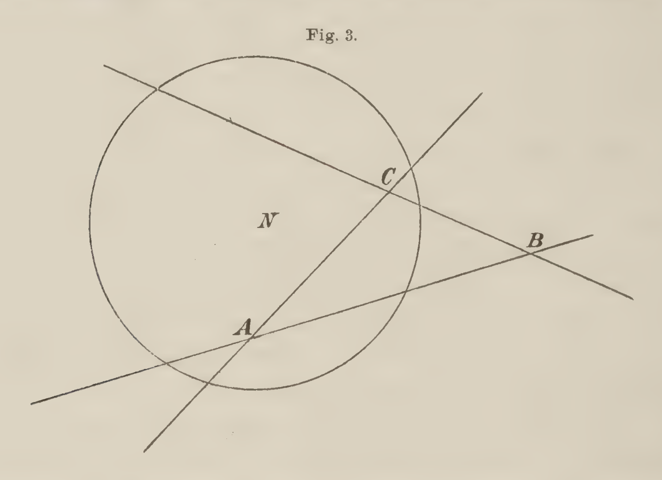
Aus dieser graphischen Zusammensetzung der Drehungen folgen mit Leichtigkeit eine Anzahl Lehrsätze.

Sind zwei beliebige von einander verschiedene Drehungsachsen

gegeben, so kann man immer zwei Drehungswinkel finden von der Art, daſs die resultierende Drehung bei vorgeschriebener Reihenfolge der beiden Drehungen um irgend eine vorgeschriebene Achse erfolgt. Die Drehungswinkel sind eindeutig bestimmt.

Der Beweis liegt unmittelbar darin, daſs man die den beiden Drehungsachsen entsprechenden beiden Geraden durch die der vorgeschriebenen dritten Achse entsprechende Gerade schneidet. Das Stück $AC$ auf dieser dritten Geraden, das von der ersten Geraden $AB$ zur zweiten $BC$ führt, stellt die gesuchte Drehung dar. Auch wenn die drei Geraden sich in einem Punkte schneiden, behält das Theorem einen Sinn. Nur hat man es dann mit unendlich kleinen Drehungen zu thun, deren Verhältnis eindeutig bestimmt ist. Schreibt man die entgegengesetzte

Fig. 3.



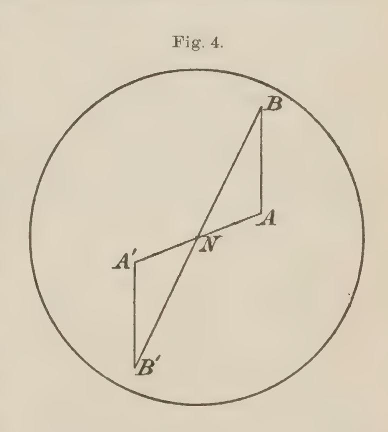

Reihenfolge vor, so bleiben die absoluten Beträge der Drehungen dieselben; nur müssen sie im entgegengesetzten Sinne genommen werden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Drehungen müssen in demselben Sinne erfolgen, aber um Winkel, die die ersten zu 360 Grad ergänzen. Bei unendlich kleinen Drehungen, bei denen nur das Verhältnis der Drehungswinkel bestimmt ist, kann die Reihenfolge der Drehungen auch vertauscht werden, ohne die Drehungen im entgegengesetzten Sinne zu nehmen. Bei endlichen Drehungen dagegen ist dies niemals der Fall. Die Vertauschung der Reihenfolge zweier Drehungen um verschiedene Achsen muſs immer eine Änderung der resultierenden Achse zur Folge haben.

Es seien auf der Karte zwei beliebige Strecken gegeben, die also, wie oben gezeigt wurde, zwei gewisse Drehungen darstellen. In welcher Beziehung steht alsdann der Schnittpunkt ihrer beiden Geraden zu den beiden Drehungsachsen? Die vier Pole der beiden Drehungen

liegen auf einem gröfsten Kreise. Auf der Karte mufs dieser Kreis seinen Mittelpunkt in dem Schnittpunkt der beiden Geraden haben. Denn jede der beiden Geraden ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die auf der Karte durch die betreffenden Pole gehen. Auf der Karte müssen daher alle vier Pole von dem Schnittpunkt der beiden Geraden gleich weit entfernt sein. Auf der Kugel entspricht dem Schnittpunkt der beiden Geraden das Spiegelbild des Südpols in Bezug auf die Ebene des gröfsten Kreises, der durch die vier Drehungspole läuft. Denn die geraden Linien der Karte entsprechen ja auf der Kugel Kreisen, die durch den Südpol laufen. Diese Kreise schneiden den gröfsten Kreis der vier Drehungspole unter rechtem Winkel. Mithin schneiden sie sich aufser im Südpol in dem Spiegelbilde des Südpols in Bezug auf die Ebene des gröfsten Kreises. Dieser Punkt entspricht daher dem Punkte, der auf der Karte durch den Schnittpunkt der beiden Geraden dargestellt wird.

Denkt man sich zwei beliebige Drehungen so gelegt, dafs der durch die vier Pole laufende gröfste Kreis in den Äquator fällt, dann schneiden sich die entsprechenden geraden Linien im Nordpol. Eine Strecke auf einer dieser Geraden, die irgend eine Drehung um den zugehörigen Drehungspol darstellt, hat alsdann dieselbe Länge, wenn man ihren Anfangspunkt oder ihren Endpunkt in den Nordpol legt ($AN = NA'$, $B'N = NB$). Denn von dem betreffenden Drehungspol aus gesehen, erscheint sie in beiden Lagen unter demselben Winkel. Wenn man nun auf beiden Geraden je eine solche Strecke konstruiert und sie in der oben beschriebenen Weise zu einer dritten Strecke zusammensetzt, so bleibt die zusammengesetzte Strecke $AB$, $B'A'$, wenn man die Reihenfolge der Drehungen vertauscht, offenbar von gleicher Richtung und von gleicher Länge, nur liegt sie in beiden Fällen nicht in derselben Geraden, das heifst, die Drehungsachse ist in beiden Fällen nicht dieselbe. Nun liegen aber, wie man leicht erkennt, die beiden Geraden $AB$, $B'A'$ gleich weit vom Nordpol entfernt, und die zugehörigen Pole der beiden resultierenden Drehungen liegen ebenfalls vom Nordpol gleich weit entfernt in entgegengesetzten Richtungen. Die beiden zusammengesetzten Strecken erscheinen von ihren Polen aus gesehen unter demselben Winkel. Mithin hat man den folgenden Satz: Bei Ver-

Fig. 4.



tauschung der Reihenfolge zweier beliebigen Drehungen bleibt der Betrag der Drehung unverändert, nur die Drehungsachse ist eine andere. Die beiden resultierenden Drehungsachsen bilden gleiche Winkel mit der Ebene, die die beiden Achsen der zusammengesetzten Drehungen enthält. Hier ist sie zur Äquatorebene gemacht. Die Ebene der beiden resultierenden Drehungsachsen steht auf der Ebene der gegebenen Achsen senkrecht. Für sehr kleine Drehungen ist der Winkel, den die resultierenden Drehungsachsen mit der Ebene der gegebenen Drehungen bilden, sehr klein. Er wird neunzig Grad, wenn die beiden gegebenen Drehungen beide 180 Grad sind. In diesem Grenzfall ist der Drehungswinkel gleich dem doppelten des Winkels, den die beiden gegebenen Achsen mit einander bilden. Bei Vertauschung der Reihenfolge der beiden gegebenen Drehungen kehrt sich hier der Sinn der resultierenden Drehung einfach um.

Diese Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit sich die graphische Konstruktion für die Zusammensetzung der Drehungen verwenden läſst. Es möge dem Leser selbst überlassen bleiben, andere Anwendungen dieses Verfahrens zu bilden. So lassen sich z. B. die Drehungen der regulären Körper darstellen, wobei aus der Figur die fundamentale Eigenschaft, daſs die Drehungen eine Gruppe bilden, (d. h. daſs irgend zwei Drehungen, die einen regulären Körper mit sich selbst zur Deckung bringen, eine resultierende Drehung geben, die dieselbe Eigenschaft hat), deutlich hervortritt.

Eine andere Aufgabe, die sich mit der graphischen Darstellung der Drehungen lösen läſst, ist die Zerlegung einer gegebenen Drehung in drei Drehungen um vorgeschriebene Achsen. Dies kann auf zwölf verschiedene Weisen geschehen, und durch graphische Konstruktion ist es nicht schwer, die verschiedenen Lösungen durch Probieren zu finden.

---

# Über die Zerlegung empirisch gegebener periodischer Funktionen in Sinuswellen.

Von C. Runge in Kirchrode bei Hannover.

Die Zerlegung empirisch gegebener periodischer Funktionen in Sinuswellen spielt auf verschiedenen Gebieten eine wichtige Rolle. Neuerdings scheint besonders bei einigen elektrotechnischen Untersuchungen Nachfrage danach zu sein, seitdem zweckmäſsige Apparate konstruiert sind, mit denen man Strom- und Spannungskurven aufzunehmen im stande ist. Nun ist die Methode der Zerlegung zwar schon seit langem bekannt. Aber einige Abkürzungen, welche ich hier vorschlagen will, sind meines Wissens neu. Ich gebe im folgenden ein Schema, nach dem man die Rechnung leicht und sicher ausführen kann.

Die Periode sei in $4n$ Teile geteilt, und es sollen $y_0 y_1 y_2 \ldots y_{4n-1}$ die zum Anfang der Periode und den $4n-1$ Teilpunkten gehörigen Ordinaten bedeuten. Die unabhängige Veränderliche $x$ denke ich mir als Winkel und zwar so, daſs der Wert $x$ einen Winkel von $90x/n$ Grad bedeutet. Das heiſst mit andern Worten $x$ miſst den Winkel in Einheiten von $90/n$ Grad.

Die Summe der zu bestimmenden Sinuswellen bezeichne ich mit $N_x$. Es ist also

$$N_x = B_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \cdots + A_r \sin rx$$
$$B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + \cdots + B_r \cos rx,$$

wo $r$ kleiner als $2n$ sein muſs, weil sonst mehr Unbekannte als Ordinaten vorhanden sind und die Unbekannten daher nicht eindeutig bestimmt wären.

Die Koeffizienten $B_0 A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots A_r B_r$ werden nun bekanntlich durch die Bedingung bestimmt, daſs die Summe aller Fehlerquadrate

$$\sum (y_\alpha - N_\alpha)^2 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, 4n-1)$$

möglichst klein werden soll. Diese Bedingung liefert die Gleichungen

$$(1) \quad 4nB_0 = \sum y_\alpha, \quad 2nA_\lambda = \sum y_\alpha \sin \alpha\lambda, \quad 2nB_\lambda = \sum y_\alpha \cos \alpha\lambda.$$
$$\begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, 4n-1 \\ \lambda = \phantom{0,} 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

$\alpha\lambda$ bedeutet dabei, wie oben schon bemerkt wurde, einen Winkel von $90\alpha\lambda/n$ Grad.

Die so berechneten Werte $A$, $B$ sind von dem gewählten Werte von $r$ unabhängig, so lange nur $r < 2n$ bleibt. Es ist für die Entwicklung der Formeln am bequemsten, wenn man $r = 2n - 1$ nimmt und noch das Glied $B_{2n} \cos 2nx$ hinzufügt, also dafs

$$N_x = B_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \cdots + A_{2n-1} \sin 2n - 1x$$
$$+ B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + \cdots + B_{2n-1} \cos 2n - 1x + B_{2n} \cos 2nx.$$

Dann hat man gerade so viel zu bestimmende Koeffizienten $A$, $B$ wie Ordinaten $y$. Dabei wird $B_{2n}$ ähnlich wie $B_0$ durch die Formel

$$4nB_{2n} = \sum_\alpha y_\alpha \cos \alpha\, 2n$$

gegeben, während bei den anderen Koeffizienten $A$, $B$ auf der linken Seite $2n$ statt $4n$ zu schreiben ist.

Es hindert natürlich nichts, von den Gröfsen $AB$ nur die ersten zu berechnen, wenn man sich mit der Annäherung begnügen will, die die ersten Wellen gewähren. Berücksichtigt man aber alle Glieder, so wird für $x = 0, 1, 2, \ldots, 4n - 1$ der Näherungswert $N_x$ mit der gegebenen Ordinate $y_x$ genau übereinstimmen.

Verwandelt man $x$ in $4n - x$, so gehen in der Formel für $N_x$ alle Sinusglieder ins Entgegengesetzte über, und es ist daher:

$$N_x - N_{4n-x} = 2 \sum A_\alpha \sin \alpha x, \qquad (\alpha = \quad 1, 2, \ldots, 2n - 1)$$
$$N_x + N_{4n-x} = 2 \sum B_\alpha \cos \alpha x \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$$

oder, wenn $\lambda$ eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots, 2n$ bedeutet

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_\lambda - y_{4n-\lambda} &= 2 \sum A_\alpha \sin \alpha\lambda, \\ y_\lambda + y_{4n-\lambda} &= 2 \sum B_\alpha \cos \alpha\lambda. \end{aligned}$$

Dabei kann man $\alpha$ und $\lambda$ alle Werte $0, 1, 2, \ldots, 2n$ durchlaufen lassen.

Wir schreiben die Ordinaten $y_0 y_1 \ldots y_{4n-1}$ in zwei Reihen, von denen die zweite von rechts nach links läuft

$$\begin{array}{llll} y_0 \; y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_{2n-1} \\ & y_{4n-1} \; y_{4n-2} & \cdots & y_{2n+1} \; y_{2n}, \end{array}$$

und bilden die Differenzen und Summen der untereinander stehenden Ordinaten

$$\begin{array}{ll} \text{Differenzen:} & a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_{2n-1}, \\ \text{Summen:} & b_1 \; b_2 \qquad b_{2n-1}. \end{array}$$

Zu den Summen fügen wir noch vorn die Gröſse $b_0 = y_0$ und hinten die Gröſse $b_{2n} = y_{2n}$ hinzu. Alsdann können die Gleichungen (2) in der Form geschrieben werden;

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_\lambda &= \sum_\alpha 2A_\alpha \sin\alpha\lambda, \\ b_\lambda &= \sum_\alpha 2B_\alpha \cos\alpha\lambda \end{aligned}$$

für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, 2n$ und $\lambda = 1, 2, \ldots, 2n-1$,

für $\lambda = 0$ und $\lambda = 2n$ dagegen ist

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2b_0 &= \sum_\alpha 2B_\alpha \cos\alpha 0, \\ 2b_{2n} &= \sum_\alpha 2B_\alpha \cos\alpha 2n. \end{aligned} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$$

Diese Formeln haben genau dieselbe Form wie die Gleichungen, die $A_\lambda$ und $B_\lambda$ durch die Gröſsen $a_\alpha$ und $b_\alpha$ ausdrücken. Denn die Gleichungen (1) lassen sich schreiben:

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} 2nA_\lambda &= \sum_\alpha a_\alpha \sin\alpha\lambda, \\ 2nB_\lambda &= \sum_\alpha b_\alpha \cos\alpha\lambda \end{aligned}$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, 2n \quad \text{und} \quad \lambda = 1, 2, \ldots, 2n-1)$$

und für $\lambda = 0$ und $\lambda = 2n$

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} 4nB_0 &= \sum_\alpha b_\alpha \cos\alpha 0, \\ 4nB_{2n} &= \sum_\alpha b_\alpha \cos\alpha 2n, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \sin(4n-\alpha)\lambda &= -\sin\alpha\lambda, \\ \cos(4n-\alpha)\lambda &= \phantom{-}\cos\alpha\lambda. \end{aligned}$$

Mit andern Worten: Genau wie die Gröſsen $a, b$ aus den Koeffizienten $2A$, $2B$ berechnet werden, genau so werden die Gröſsen $2nA$, $2nB$ aus den Gröſsen $a$, $b$ gefunden. Oder anders ausgedrückt: Die Gleichungen (2) bleiben richtig, wenn man rechts $a$, $b$ statt $2A$, $2B$ einsetzt und zugleich links $2nA$, $2nB$ statt $a$, $b$ schreibt. Da man aus $a$ und $b$ zugleich auch die Ordinaten $y$ findet, so kann man also sagen: Es ist algebraisch dieselbe Aufgabe die Wellen zusammenzusetzen und eine gegebene Funktion in Wellen zu zerlegen.

Wir betrachten hier die Zerlegung und werden von der Zusammensetzung nur als Kontrolle der Zerlegung einen Gebrauch machen.

Um die Summationen der Gleichungen (1*) auszuführen, werden die Glieder zusammengefafst, die denselben trigonometrischen Faktor besitzen.

Es ist

$$\sin(2n-\alpha)\lambda = \pm \sin\alpha\lambda \quad (- \text{ wenn } \lambda \text{ gerade}, + \text{ wenn } \lambda \text{ ungerade}),$$

$$\cos(2n-\alpha)\lambda = \mp \cos\alpha\lambda \quad (+ \text{ wenn } \lambda \text{ gerade}, - \text{ wenn } \lambda \text{ ungerade}).$$

Wir schreiben die Gröfsen $a$ und die Gröfsen $b$ in zwei Reihen, von denen die zweite von rechts nach links läuft, und bilden die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Gröfsen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | .. | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
| | $a_{2n-1}$ | $a_{2n-2}$ | $a_{n-3}$ | | $a_{n+1}$ | |
| Summe: | $\mathfrak{a}_1$ | $\mathfrak{a}_2$ | $\mathfrak{a}_3$ | | $\mathfrak{a}_{n-1}$ | $\mathfrak{a}_n$ |
| Differenz: | $\mathfrak{a}_1'$ | $\mathfrak{a}_2'$ | $\mathfrak{a}_3'$ | | $\mathfrak{a}_{n-1}'$ | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_{n-1}$ | |
| | $b_{2n}$ | $b_{2n-1}$ | $b_{2n-2}$ | | $b_{n+1}$ | $b_n$ |
| Summe: | $\mathfrak{b}_0$ | $\mathfrak{b}_1$ | $\mathfrak{b}_2$ | | $\mathfrak{b}_{n-1}$ | $\mathfrak{b}_n$ |
| Differenz: | $\mathfrak{b}_0'$ | $\mathfrak{b}_1'$ | $\mathfrak{b}_2'$ | | $\mathfrak{b}_{n-1}'$ | |

Bei den Summen werden $\mathfrak{a}_n = a_n$ und $\mathfrak{b}_n = b_n$ als letzte Glieder angefügt.

Dadurch nehmen die Gleichungen (1*) die folgende Form an

$$\lambda = 1, 3, 5 \ldots \quad \begin{cases} 2nA_\lambda = \sum \mathfrak{a}_\alpha \sin\alpha\lambda, & (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \\ 2nB_\lambda = \sum \mathfrak{b}_\alpha' \cos\alpha\lambda, & (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1) \end{cases}$$

$$(1^{**}) \quad \lambda = 2, 4, 6 \ldots \quad \begin{cases} 2nA_\lambda = \sum \mathfrak{a}_\alpha' \sin\alpha\lambda, & (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1) \\ 2nB_\lambda = \sum \mathfrak{b}_\alpha \cos\alpha\lambda, & (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

$$\lambda = 0,\ 2n \quad \begin{cases} 4nB_0 = \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{b}_n \\ 4nB_{2n} = \mathfrak{b}_0 - \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{b}_3 \cdots \pm \mathfrak{b}_n. \end{cases}$$

$A_\lambda$ und $A_{2n-\lambda}$ können am bequemsten zugleich ausgerechnet werden, ebenso $B_\lambda$ und $B_{2n-\lambda}$, indem man die Glieder der Summen für $A_\lambda$ abwechselnd in zwei verschiedene Kolonnen schreibt und die beiden Kolonnen für sich addiert. Die Summe dieser beiden Resultate giebt dann $A_\lambda$, die Differenz giebt $A_{2n-\lambda}$. Analog verhält es sich für $B_\lambda$ und $B_{2n-\lambda}$.

In dem folgenden Schema ist die ganze Rechnung für den Fall, daſs die Periode in 12 Teile geteilt ist, dargestellt:

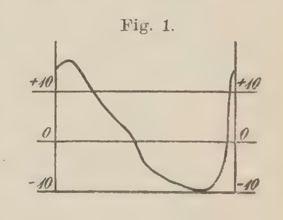
$$\begin{array}{ll}
\text{Ordinaten:} & y_0\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5 \\
 & \underline{\quad y_{11}\ y_{10}\ y_9\ y_8\ y_7\ y_6} \\
\text{Differenz:} & \quad a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \\
\text{Summe:} & b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
 & a_1\ a_2\ a_3 & & b_0\ b_1\ b_2\ b_3 & & \mathfrak{a}_1\quad \mathfrak{b}_0' & & \mathfrak{b}_0\ \mathfrak{b}_1 \\
 & \underline{a_5\ a_4\quad} & & \underline{b_6\ b_5\ b_4\quad} & & \underline{\mathfrak{a}_3}\quad \underline{\mathfrak{b}_2'} & & \underline{\mathfrak{b}_2\ \mathfrak{b}_3} \\
\text{Summe:} & \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3 & \text{Summe:} & \mathfrak{b}_0\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{b}_3 & \text{Differenz:} & \mathfrak{a}''\quad \mathfrak{b}'' & \text{Summe:} & c_0\ c_1 \\
\text{Differenz:} & \mathfrak{a}_1'\ \mathfrak{a}_2' & \text{Differenz:} & \mathfrak{b}_0'\ \mathfrak{b}_1'\ \mathfrak{b}_2' & & & &
\end{array}$$

| | Sinus-Glieder | | | Cosinus-Glieder | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\lambda = 1, 5$ | $\lambda = 2, 4$ | $\lambda = 3$ | $\lambda = 1, 5$ | $\lambda = 2, 4$ | $\lambda = 3$ | $\lambda = 0, 6$ |
| $\sin 30^0$ | $\mathfrak{a}_1$ | | | $\mathfrak{b}_2'$ | $-\mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{b}_1$ | | |
| $\sin 60^0$ | $\mathfrak{a}_2$ | $\mathfrak{a}_1' \ \mathfrak{a}_2'$ | | $\mathfrak{b}_1'$ | | | |
| $\sin 90^0$ | $\mathfrak{a}_3$ | | $\mathfrak{a}''$ | $\mathfrak{b}_0'$ | $\mathfrak{b}_0 - \mathfrak{b}_3$ | $\mathfrak{b}''$ | $c_0 \quad c_1$ |
| 1. Kolonne | — | — | | — | — | | — |
| 2. Kolonne | — | — | | — | — | | — |
| Summe: | $6A_1$ | $6A_2$ | $6A_3$ | $6B_1$ | $6B_2$ | $6B_3$ | $12B_0$ |
| Differenz: | $6A_5$ | $6A_4$ | | $6B_5$ | $6B_4$ | | $12B_6$ |

Die Tabelle des Schemas ist dabei so zu verstehen, daſs die Glieder der Reihen, vor welche $\sin 30^0$, $\sin 60^0$, $\sin 90^0$ geschrieben sind, mit diesen Werten multipliziert gedacht sind. Die Produkte sind in die Tabelle einzusetzen. Da $\sin 30^0$ den Wert $\frac{1}{2}$, $\sin 90^0$ den Wert 1 hat, so sind diese Produkte unmittelbar zu bilden. Die vier Multiplikationenmit $\sin 60^0$ bleiben dann allein auszuführen. Alles übrige sind Additionen und Subtraktionen. Für $\lambda = 0, 3, 6$ sind die Glieder noch weiter zusammengefaſst. Das ist immer möglich, wenn $\lambda$ einen Teiler mit $n$ gemein hat, also z. B. immer für $\lambda = 0, n, 2n$.

Fig. 1.




Ein numerisches Beispiel wird am besten zeigen, mit wie wenig Mühe nach diesem Schema eine Funktion zerlegt werden kann.

Es sei die periodische Funktion der Figur 1 graphisch gegeben.

Zwölf Ordinaten genügen in diesem Fall, um die Kurve einigermaſsen genau zu charakterisieren. Nach dem Schema gerechnet erhalten wir:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 14.0 | 15.8 | 12.0 | 7.7 | 4.3 | 1.4 | − 4.6 |
| | | − 6.8 | − 9.9 | − 9.3 | − 8.2 | − 6.8 | |
| Differenz: | | + 22.6 | + 21.9 | + 17.0 | + 12.5 | + 8.2 | |
| Summe: | + 14.0 | + 9.0 | + 2.1 | − 1.6 | − 3.9 | − 5.4 | − 4.6 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | + 22.6 | + 21.9 | + 17.0 | + 14.0 | + 9.0 | + 2.1 | − 1.6 |
| | + 8.2 | + 12.5 | | − 4.6 | − 5.4 | − 3.9 | |
| Summe: | + 30.8 | + 34.4 | + 17.0 | + 9.4 | + 3.6 | − 1.8 | − 1.6 |
| Differenz: | + 14.4 | + 9.4 | | + 18.6 | + 14.4 | + 6.0 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | + 30.8 | | + 18.6 | | 9.4 | + 3.6 |
| | + 17.0 | | + 6.0 | | − 1.8 | − 1.6 |
| Diff.: | 13.8 | Diff.: | 12.6 | Sum.: | + 7.6 | + 2.0 |

| | Sinus-Glieder | | | Cosinus-Glieder | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\lambda = 1, 5$ | $\lambda = 2, 4$ | $\lambda = 3$ | $\lambda = 1, 5$ | $\lambda = 2, 4$ | $\lambda = 3$ | $\lambda = 0, 6$ |
| | 15.4 | | | 3.0 | 0.9  1.8 | | |
| | 29.8 | 12.5  8.1 | | 12.5 | | | |
| | 17.0 | | 13.8 | 18.6 | 9.4  1.6 | 12.6 | 7.6  2.0 |
| 1. Kolonne | 32.4 | 12.5 | | 21.6 | 10.3 | | 7.6 |
| 2. Kolonne | 29.8 | 8.1 | | 12.5 | 3.4 | | 2.0 |
| Summe: | 62.2 | 20.6 | 13.8 | 34.1 | 13.7 | 12.6 | 9.6 |
| Differenz: | 2.6 | 4.4 | | 9.1 | 6.9 | | 5.6 |

Resultat:

$$9.6/12 + 62.2/6 \sin x + 20.6/6 \sin 2x + 13.8/6 \sin 3x + 4.4/6 \sin 4x$$
$$+ \; 2.6/6 \sin 5x$$
$$+ 34.1/6 \cos x + 13.7/6 \cos 2x + 12.6/6 \cos 3x + 6.9/6 \cos 4x$$
$$+ \; 9.1/6 \cos 5x + 5.6/12 \cos 6x.$$

Man kann die Probe machen, indem man nun umgekehrt aus den Werten $2A$, $2B$ die Gröfsen $a$, $b$ berechnet oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus $6A$, $6B$ die Gröfsen $3a$, $3b$. Dabei ist es nicht nötig, alle Gröfsen $a$, $b$ zu berechnen. Es genügt zur Kontrolle im allgemeinen die Berechnung eines Wertes $a$ und eines Wertes $b$. Wir wählen $a_1$ und $b_0$. Davon ist $b_0$ einfach die Summe der Werte $B$ oder $6b_0$ gleich der Summe der $6B$. $3a_1$ wird dagegen aus der Reihe $6A_1$, $6A_2$, $6A_3$, $6A_4$, $6A_5$ nach dem Schema genau so gefunden, wie $6A_1$ aus $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.

$$\begin{array}{r@{\quad}rrr} & 62.2 & 20.6 & 13.8 \\ & 2.6 & 4.4 & \\ \hline \text{Summe:} & 64.8 & 25.0 & 13.8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 32.4 & \\ & 21.7 \\ 13.8 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46.2 \\ 21.7 \\ \hline 67.9 \end{array}$$

sollte sein:

$$3a_1 = 3 \times 22.6 = 67.8.$$

$$\begin{array}{r} 4.8 \\ 34.1 \\ 13.7 \\ 12.6 \\ 6.9 \\ 9.1 \\ 2.8 \\ \hline 84.0 \end{array}$$

sollte sein:

$$6b_0 = 6 \times 14.0 = 84.0.$$

Dadurch sind die berechneten Werte kontrolliert. Die Abweichung zwischen 67.9 und 67.8 erklärt sich dadurch, daſs die Produkte alle auf die erste Dezimale abgekürzt sind, wodurch bei der Summenbildung die erste Dezimale nicht mehr ganz richtig zu sein braucht.

Zwölf Ordinaten werden in solchen Fällen genügen, wo die Funktion mit ausreichender Genauigkeit durch die ersten fünf Wellen wiedergegeben wird. Es ist aber die Rechnung nach unserem Verfahren auch für eine erheblich gröſsere Zahl von Ordinaten noch ganz gut zu bewältigen.

Ich gebe im folgenden das Schema für 36 Ordinaten:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{17} & y_{18} \\ & y_{35} & y_{34} & y_{33} & & y_{19} & \\ \hline \end{array}$$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sinus-Glieder. | Differenz: | | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | ... | $a_{17}$ | |
| Cosinus-Glieder. | Summe: | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | | $b_{17}$ | $b_{18}$ |

Sinus-Glieder.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\ldots$ $a_8$ | $a_9$ |
| | $a_{17}$ | $a_{16}$ | $a_{15}$ | $a_{10}$ | |
| $\lambda$ ungerade, Summe: | $\mathfrak{a}_1$ | $\mathfrak{a}_2$ | $\mathfrak{a}_3$ | $\ldots$ $\mathfrak{a}_8$ | $\mathfrak{a}_9$ |
| $\lambda$ gerade, Differenz: | $\mathfrak{a}_1'$ | $\mathfrak{a}_2'$ | $\mathfrak{a}_3'$ | $\ldots$ $\mathfrak{a}_8'$ | |

| | $\lambda = 3$ | | | | $\lambda = 9$ | | $\lambda = 6,\ 12$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\mathfrak{a}_1$ | $\mathfrak{a}_2$ | $\mathfrak{a}_3$ | | | | $\mathfrak{a}_1'$ | $\mathfrak{a}_2'$ |
| | $\mathfrak{a}_5$ | $\mathfrak{a}_4$ | | | $\mathfrak{a}_1''$ | | $-\mathfrak{a}_5'$ | $-\mathfrak{a}_4'$ |
| | $-\mathfrak{a}_7$ | $-\mathfrak{a}_8$ | $-\mathfrak{a}_9$ | | $\mathfrak{a}_3''$ | | $+\mathfrak{a}_7'$ | $+\mathfrak{a}_8'$ |
| Summe: | $\mathfrak{a}_1''$ | $\mathfrak{a}_2''$ | $\mathfrak{a}_3''$ | Differenz: | $\mathfrak{a}$ | Summe: | $\mathfrak{a}_1'''$ | $\mathfrak{a}_2'''$ |

Sinus-Glieder.

| $\lambda =$ | 1, 17 | 2, 16 | 3, 15 | 4, 14 | 5, 13 | 6, 12 | 7, 11 | 8, 10 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin 10⁰ | $\mathfrak{a}_1$ | | | | $-\mathfrak{a}_7$ | | $-\mathfrak{a}_5$ | | |
| sin 20⁰ | $\mathfrak{a}_2$ | $\mathfrak{a}_1'$ $\mathfrak{a}_8'$ | | $-\mathfrak{a}_5'$ $\mathfrak{a}_4'$ | $-\mathfrak{a}_4$ | | $-\mathfrak{a}_8$ | $-\mathfrak{a}_7'$ $\mathfrak{a}_2'$ | |
| sin 30⁰ | $\mathfrak{a}_3$ | | $\mathfrak{a}_1''$ | | $\mathfrak{a}_3$ | | $-\mathfrak{a}_3$ | | |
| sin 40⁰ | $\mathfrak{a}_4$ | $\mathfrak{a}_7'$ $\mathfrak{a}_2'$ | | $\mathfrak{a}_1'$ $-\mathfrak{a}_8'$ | $\mathfrak{a}_8$ | | $\mathfrak{a}_2$ | $\mathfrak{a}_5'$ $-\mathfrak{a}_4''$ | |
| sin 50⁰ | $\mathfrak{a}_5$ | | | | $\mathfrak{a}_1$ | | $\mathfrak{a}_7$ | | |
| sin 60⁰ | $\mathfrak{a}_6$ | $\mathfrak{a}_3'$ $\mathfrak{a}_6'$ | $\mathfrak{a}_2''$ | $\mathfrak{a}_3'$ $-\mathfrak{a}_6'$ | $-\mathfrak{a}_6$ | $\mathfrak{a}_1'''$ $\mathfrak{a}_2'''$ | $\mathfrak{a}_6$ | $-\mathfrak{a}_3'$ $\mathfrak{a}_6'$ | |
| sin 70⁰ | $\mathfrak{a}_7$ | | | | $-\mathfrak{a}_5$ | | $\mathfrak{a}_1$ | | |
| sin 80⁰ | $\mathfrak{a}_8$ | $\mathfrak{a}_5'$ $\mathfrak{a}_4'$ | | $-\mathfrak{a}_7'$ $\mathfrak{a}_2'$ | $\mathfrak{a}_2$ | | $-\mathfrak{a}_4$ | $\mathfrak{a}_1'$ $-\mathfrak{a}_8'$ | |
| sin 90⁰ | $\mathfrak{a}_9$ | | $\mathfrak{a}_3''$ | | $\mathfrak{a}_9$ | | $-\mathfrak{a}_9$ | | $\mathfrak{a}$ |
| 1. Kolonne | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 2. Kolonne | — | — | — | — | — | — | — | — | |
| Summe | $18A_1$ | $18A_2$ | $18A_3$ | $18A_4$ | $18A_5$ | $18A_6$ | $18A_7$ | $18A_8$ | $18A_9$ |
| Differenz | $18A_{17}$ | $18A_{16}$ | $18A_{15}$ | $18A_{14}$ | $18A_{13}$ | $18A_{12}$ | $18A_{11}$ | $18A_{10}$ | |

Wieder ist wie oben die Tabelle so zu verstehen, daſs z. B. in der Reihe, wo der sin 10⁰ steht, die betreffenden Glieder $\mathfrak{a}_1$, $-\mathfrak{a}_7$, $-\mathfrak{a}_5$ etc. mit sin 10⁰ multipliziert in die Tabelle einzusetzen sind.

Um die Übersicht über die Produktbildung zu erleichtern, kann man die Gröſsen $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_8$ und $\mathfrak{b}_1'\ \mathfrak{b}_2' \ldots \mathfrak{b}_8'$ in Zickzacklinien schreiben:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60⁰ | | | | | $\mathfrak{a}_6$ | | | | | $\mathfrak{b}_3'$ | | | | |
| 10⁰ 50⁰ 70⁰ | $\mathfrak{a}_1$ | | | | $\mathfrak{a}_5$ | $\mathfrak{a}_7$ | | | $\mathfrak{b}_2'$ | | $\mathfrak{b}_4'$ | | | $\mathfrak{b}_8'$ |
| 20⁰ 40⁰ 80⁰ | | $\mathfrak{a}_2$ | | $\mathfrak{a}_4$ | | | $\mathfrak{a}_8$ | $\mathfrak{b}_1'$ | | | | $\mathfrak{b}_5'$ | $\mathfrak{b}_7'$ | |
| 30⁰ | | | $\mathfrak{a}_3$ | | | | | | | | | $\mathfrak{b}_6'$ | | |

Cosinus-Glieder.

$$\begin{array}{lccccccc}
 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_8 & \\
 & b_{18} & b_{17} & b_{16} & b_{15} & & b_{10} & b_9 \\
\hline
\lambda \text{ ungerade, Differenz:} & \mathfrak{b}_0' & \mathfrak{b}_1' & \mathfrak{b}_2' & \mathfrak{b}_3' & \dots & \mathfrak{b}_8' & \\
\lambda \text{ gerade, Summe:} & \mathfrak{b}_0 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 & \dots & \mathfrak{b}_8 & \mathfrak{b}_9
\end{array}$$

$\lambda = 3$

$$\begin{array}{lccc}
 & \mathfrak{b}_0' & \mathfrak{b}_1' & \mathfrak{b}_2' \\
 & -\mathfrak{b}_6' & -\mathfrak{b}_5' & -\mathfrak{b}_4' \\
 & & -\mathfrak{b}_7' & -\mathfrak{b}_8' \\
\hline
\text{Summe:} & \mathfrak{b}_0'' & \mathfrak{b}_1'' & \mathfrak{b}_2''
\end{array}$$

$\lambda = 9$

$$\begin{array}{lc}
 & \mathfrak{b}_0'' \\
 & \mathfrak{b}_2'' \\
\hline
\text{Differenz:} & \mathfrak{b}
\end{array}$$

$\lambda = 6,\ 12$

$$\begin{array}{lcccc}
 & \mathfrak{b}_0 & \mathfrak{b}_1 & -\mathfrak{b}_2 & -\mathfrak{b}_3 \\
 & & +\mathfrak{b}_6 & +\mathfrak{b}_5 & -\mathfrak{b}_4 \\
 & & \mathfrak{b}_7 & -\mathfrak{b}_8 & -\mathfrak{b}_9 \\
\hline
\text{Summe:} & \mathfrak{b}_0''' & \mathfrak{b}_1''' & \mathfrak{b}_2''' & \mathfrak{b}_3'''
\end{array}$$

$\lambda = 0,\ 18$

$$\begin{array}{lcc}
 & \mathfrak{b}_0''' & \mathfrak{b}_1''' \\
 & \mathfrak{b}_2''' & \mathfrak{b}_3''' \\
\hline
\text{Differenz:} & c_0 & c_1
\end{array}$$

Cosinus-Glieder.

| 1, 17 | 2, 16 | 3, 15 | 4, 14 | 5, 13 | 6, 12 | 7, 11 | 8, 10 | 9 | 0, 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{b}_8'$ | $\mathfrak{b}_4 \; -\mathfrak{b}_5$ | | $\mathfrak{b}_2 \; \mathfrak{b}_7$ | $-\mathfrak{b}_2'$ | | $\mathfrak{b}_4'$ | $\mathfrak{b}_8 \; \mathfrak{b}_1$ | | |
| $\mathfrak{b}_7'$ | | | | $-\mathfrak{b}_5'$ | | $\mathfrak{b}_1'$ | | | |
| $\mathfrak{b}_6'$ | $-\mathfrak{b}_6 \; \mathfrak{b}_3$ | $\mathfrak{b}_2''$ | $-\mathfrak{b}_6 \; -\mathfrak{b}_3$ | $\mathfrak{b}_6'$ | $\mathfrak{b}_2''' \; \mathfrak{b}_1'''$ | $\mathfrak{b}_6'$ | $-\mathfrak{b}_6 \; -\mathfrak{b}_3$ | | |
| $\mathfrak{b}_5'$ | | | | $\mathfrak{b}_1'$ | | $-\mathfrak{b}_7'$ | | | |
| $\mathfrak{b}_4'$ | $\mathfrak{b}_2 \; -\mathfrak{b}_7$ | | $\mathfrak{b}_8 \; \mathfrak{b}_1$ | $\mathfrak{b}_8'$ | | $-\mathfrak{b}_2'$ | $\mathfrak{b}_4 \; \mathfrak{b}_5$ | | |
| $\mathfrak{b}_3'$ | | $\mathfrak{b}_1''$ | | $-\mathfrak{b}_3'$ | | $-\mathfrak{b}_3'$ | | | |
| $\mathfrak{b}_2'$ | $-\mathfrak{b}_8 \; \mathfrak{b}_1$ | | $-\mathfrak{b}_4 \; -\mathfrak{b}_5$ | $-\mathfrak{b}_4'$ | | $-\mathfrak{b}_8'$ | $-\mathfrak{b}_2 \; -\mathfrak{b}_7$ | | |
| $\mathfrak{b}_1'$ | | | | $\mathfrak{b}_7'$ | | $\mathfrak{b}_5'$ | | | |
| $\mathfrak{b}_0'$ | $\mathfrak{b}_0 \; -\mathfrak{b}_9$ | $\mathfrak{b}_0''$ | $\mathfrak{b}_0 \; \mathfrak{b}_9$ | $\mathfrak{b}_0'$ | $\mathfrak{b}_0''' \; \mathfrak{b}_3'''$ | $\mathfrak{b}_0'$ | $\mathfrak{b}_0 \; \mathfrak{b}_9$ | $\mathfrak{b}$ | $c_0 \; c_1$ |
| — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| $18 B_1$ | $18 B_2$ | $18 B_3$ | $18 B_4$ | $18 B_5$ | $18 B_6$ | $18 B_7$ | $18 B_8$ | $18 B_9$ | $36 B_0$ |
| $18 B_{17}$ | $18 B_{16}$ | $18 B_{15}$ | $18 B_{14}$ | $18 B_{13}$ | $18 B_{12}$ | $18 B_{11}$ | $18 B_{10}$ | | $36 B_{18}$ |

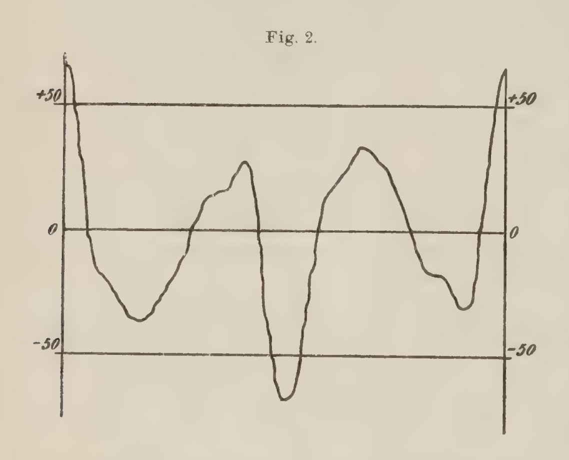
Dann enthält die erste Zeile die Gröfsen, die mit $\sin 60^0$ zu multiplizieren sind, die zweite die Gröfsen, die mit $\sin 10^0, \sin 50^0, \sin 70^0$ zu multiplizieren sind, die dritte die Gröfsen, die mit $\sin 20^0, \sin 40^0, \sin 80^0$ zu multiplizieren sind, und die vierte die Gröfsen, die mit $\sin 30^0$ zu multiplizieren sind.

In dieselben vier Zeilen kann man dann die Gröfsen $\mathfrak{a}_1'\ \mathfrak{a}_2' \dots \mathfrak{a}_8'$, $\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2 \dots \mathfrak{b}_8$ schreiben in der Form

| | |
|---|---|
| $60^0$ | $\mathfrak{a}_3' \quad \mathfrak{a}_6'$ |
| $10^0\ 50^0\ 70^0$ | $\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{b}_4\ \mathfrak{b}_5 \quad \mathfrak{b}_7\ \mathfrak{b}_8$ |
| $20^0\ 40^0\ 60_0$ | $\mathfrak{a}_1'\ \mathfrak{a}_2' \quad \mathfrak{a}_4'\ \mathfrak{a}_5' \quad \mathfrak{a}_7'\ \mathfrak{a}_8'$ |
| $30^0$ | $\mathfrak{b}_3 \quad \mathfrak{b}_6$ |

so dafs hier auch die Zeilen den Faktoren entsprechen. Die Berechnung aller Wellen bis zur 18. hin hält nicht wesentlich länger auf als die Berechnung bis zur neunten Welle. Einige Produktbildungen würden zwar bei neun Wellen erspart. Denn man könnte bei den Gliedern gerader Ordnung je zwei Glieder vor der Multiplikation zusammenziehen.

Fig. 2.




Bei der Berechnung aller Wellen hat man den Vorteil einer Rechenprobe. Man kontrolliert analog wie oben die sämtlichen Gröfsen $B$ durch ihre Summe, die gleich $y_0$ sein mufs. Die Gröfsen $A$ kontrolliert man, indem man analog wie oben irgend eine der Gröfsen $a_1\ a_2 \ldots a_{17}$ aus ihnen berechnet, in der sie alle vorkommen, z. B. $a_1$. Am leichtesten liefse sich $a_9$ ja berechnen, aber dann kommen nur die Gröfsen $A$ mit ungeradem Index vor.

Bei dieser Probe rechnet man natürlich am besten mit den 18fachen Beträgen der Gröfsen $A$ und findet nach dem Schema den 9fachen Betrag der betreffenden Gröfse $a$.

Das folgende Beispiel giebt die Zerlegung des Stromes einer Wechselstrommaschine (Fig. 2).

| | 1, 17 | 2, 16 | 3, 15 | 4, 14 | 5, 13 | 6, 12 | 7, 11 | 8, 10 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2.6 | | | | + 8.7 | | + 3.6 | | |
| | 6.5 | − 3.8 + 2.1 | | + 1.7 − 2.1 | − 2.7 | | + 22.6 | 0 − 6.5 | |
| | + 16.5 | | + 22 | | + 16.5 | | − 16.5 | | |
| | 5.2 | 0 − 12.2 | | − 7.1 − 3.9 | − 42.5 | | 12.2 | − 3.2 + 3.9 | |
| | − 16.1 | | | | + 11.5 | | − 38.3 | | |
| | − 32.1 | − 7.8 − 0.9 | + 80.6 | − 7.8 + 0.9 | + 32.1 | − 5.2 − 6.1 | − 32.1 | + 7.8 − 0.9 | |
| | − 47.1 | | | | + 19.8 | | + 14.1 | | |
| | − 65.0 | − 4.9 − 5.9 | | 0 − 18.7 | + 18.7 | | − 7.9 | − 10.8 − 5.9 | |
| | − 36 | | + 69 | | − 36 | | + 36 | | − 25 |
| 1. Kolonne | − 80.1 | − 16.5 | + 91.0 | − 13.2 | + 20.5 | − 5.2 | − 1.1 | − 6.2 | |
| 2. Kolonne | − 85.4 | − 16.9 | + 80.6 | − 23.8 | + 5.6 | − 6.1 | − 5.2 | − 9.4 | |
| Summe | − 165.5 | − 33.4 | + 171.6 | − 37.0 | + 26.1 | − 11.3 | − 6.3 | − 15.6 | − 25 |
| Differenz | + 5.3 | + 0.4 | + 10.4 | + 10.6 | + 14.9 | + 0.9 | + 4.1 | + 3.2 | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 66 | 45 | 0 | −18 | −24 | −31 | −35 | −34 | −26 | −18 | − 8 | + 8 | +14 | +16 | +24 | +29 | − 4 | − 45 | −68 |
| | 43 | 0 | −30 | −25 | −18 | −16 | − 9 | + 4 | +18 | +28 | +33 | +32 | +24 | +17 | + 8 | −23 | − 58 | |
| | 2 | 0 | +12 | + 1 | −13 | −19 | −25 | −30 | −36 | −36 | −25 | −18 | − 8 | + 7 | +21 | +19 | + 13 | |
| 66 | 88 | 0 | −48 | −49 | −49 | −51 | −43 | −22 | 0 | +20 | +41 | +46 | +40 | +41 | +37 | −27 | −103 | −68 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | 12 | 1 | − 13 | − 19 | − 25 | − 30 | − 36 |
| | + 13 | + 19 | + 21 | + 7 | − 8 | − 18 | − 25 | − 36 | |
| Summe: | 15 | 19 | 33 | 8 | − 21 | − 37 | − 50 | − 66 | − 36 |
| Differenz: | − 11 | − 19 | − 9 | − 6 | − 5 | − 1 | 0 | + 6 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 19 | 33 | | − 11 | − 19 |
| − 21 | 8 | | 44 | + 5 | + 6 |
| + 50 | + 66 | + 36 | 69 | 0 | + 6 |
| + 44 | 93 | 69 | − 25 | − 6 | − 7 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 66 | 88 | 0 | − 48 | − 49 | − 49 | − 51 | − 43 | − 22 | 0 |
| | − 68 | − 103 | − 27 | + 37 | + 41 | + 40 | + 46 | + 41 | + 20 | |
| Differenz: | 134 | 191 | 27 | − 85 | − 90 | − 89 | − 97 | − 84 | − 42 | |
| Summe: | − 2 | − 15 | − 27 | − 11 | − 8 | − 9 | − 5 | − 2 | − 2 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 134 | 191 | 27 | | − 2 | − 15 | + 27 | + 11 | | |
| 97 | 89 | 90 | 231 | − 5 | − 9 | + 8 | | − 7 | − 26 |
| | 84 | 42 | 159 | | − 2 | + 2 | 0 | 37 | + 11 |
| 231 | 364 | 159 | 72 | − 7 | − 26 | 37 | 11 | − 44 | − 37 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 60° | − 37 | − 5 | − 9  − 1 | |
| 10° 50° 70° | 15  − 21  − 50 | 27  − 90  − 42 | | − 15  − 27  − 8  − 9  − 2  − 2 |
| 20° 40° 80° | 19  8  − 66 | 191  − 89  − 84 | −11  −19  − 6  − 5  0  + 6 | |
| 30° | 33 | − 97 | | − 11  − 5 |

| 1, 17 | 2, 16 | 3, 15 | 4, 14 | 5, 13 | 6, 12 | 7, 11 | 8, 10 | 9 | 0, 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| − 7.3 | − 1.4 + 1.6 | | −4.7 − 0.3 | − 4.7 | | − 15.6 | − 0.3 − 2.6 | | |
| − 28.7 | | | | + 30.4 | | 65.2 | | | |
| − 48.5 | + 2.5 − 5.5 | 79.5 | + 2.5 + 5.5 | − 48.5 | 18.5 − 13 | − 48.5 | + 2.5 + 5.5 | | |
| − 57.3 | | | | 122.8 | | + 54.1 | | | |
| − 68.9 | − 20.6 + 1.5 | | −1.5 −11.5 | − 32.2 | | − 20.6 | − 6.1 − 6.9 | | |
| − 73.7 | | 315.2 | | + 73.7 | | + 73.7 | | | |
| + 25.4 | + 1.9 − 14.1 | | +7.5 + 8.5 | + 84.7 | | + 39.5 | + 25.4 + 1.9 | | |
| + 188.2 | | | | − 82.8 | | − 87.8 | | | |
| 134 | − 2 0 | 231 | −2 | 134 | − 7 + 11 | 134 | − 2 0 | + 72 | − 44 − 37 |
| + 34.7 | − 19.6 | 310.5 | + 1.8 | + 133.3 | + 11.5 | + 88.8 | + 19.5 | | |
| + 28.5 | − 16.5 | 315.2 | + 2.2 | + 144.1 | − 2 | + 105.2 | − 2.1 | | |
| + 63.2 | − 36.1 | + 625.7 | + 4.0 | + 277.4 | + 9.5 | + 194.0 | + 17.4 | + 72 | − 81 |
| + 6.2 | − 3.1 | − 4.7 | − 0.4 | − 10.8 | + 13.5 | − 16.4 | + 21.6 | | − 7 |

Resultat:

$$
\begin{aligned}
18f(x) = &-40.5 - 165.5\sin x - 33.4\sin 2x + 171.6\sin 3x - 37.0\sin 4x + 26.1\sin 5x - 11.3\sin 6x \\
&+ 63.2\cos x - 36.1\cos 2x + 625.7\cos 3x + 4.0\cos 4x + 277.4\cos 5x + 9.5\cos 6x \\
&- 6.3\sin 7x - 15.6\sin 8x - 25\sin 9x + 3.2\sin 10x + 4.1\sin 11x + 0.9\sin 12x + 14.9\sin 13x \\
&+ 194\cos 7x + 17.4\cos 8x + 72\cos 9x + 21.6\cos 10x - 16.4\cos 11x + 13.5\cos 12x - 10.8\cos 13x \\
&+ 10.6\sin 14x + 10.4\sin 15x + 0.4\sin 16x + 5{,}3\sin 17x. \\
&- 0.4\cos 14x - 4.7\cos 15x - 3.1\cos 16x + 6.2\cos 17x - 3.5\cos 18x.
\end{aligned}
$$

Die Dezimale in den Koeffizienten ist mit hingeschrieben, obwohl sie nicht ganz zuverlässig ist wegen der Abrundung und weil die Produkte mit dem Rechenschieber ausgeführt sind.

Zur Kontrolle des Resultats rechne man nun umgekehrt $a_1$ und $b_0$ aus den Koeffizienten aus

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (I) | −165.5 | −33.4 | +171.6 | −37.0 | +26.1 | −11.3 | −6.3 | −15.6 | −25 |
| | + 5.3 | + 0.4 | + 10.4 | +10.6 | +14.9 | + 0.9 | +4.1 | + 3.2 | |
| Summe: | −160.2 | −33.0 | +182.0 | −26.4 | +41.0 | −10.4 | −2.2 | −12.4 | −25 |

Diese Zahlen sind mit $\sin 10^0$, $\sin 20^0$, ..., $\sin 90^0$ zu multiplizieren und die Produkte sind zu addieren:

$$
\begin{array}{r}
-27.9 \\
-11.3 \\
+91.0 \\
-17.0 \\
+31.4 \\
-9.0 \\
-2.1 \\
-12.2 \\
-25.0 \\
\hline
+17.9
\end{array}
\quad \text{sollte sein } 9a_1 = 18.
$$

Ferner

$$\sum 18 B_\lambda = 1189 \quad \text{sollte sein} \quad 18 \cdot b_0 = 1188.$$

Die Übereinstimmung ist genügend in Anbetracht der Abrundungen.

Man thut gut, wenn man sicher gehen will, die Probe noch weiter zu treiben. Wenn nämlich in irgend einer der zweiten Kolonnen der Tabelle ein Fehler gemacht ist, so werden die beiden dieser Spalte entsprechenden Koeffizienten beide falsch, aber ihre Summe bleibt ungeändert gleich dem Doppelten der ersten Kolonne. Bei der Berechnung eines $a$ mit ungeradem Index oder eines $b$ mit geradem Index fällt dadurch der Fehler wieder heraus. Es ist daher gut, noch die

Berechnung eines $a$ mit geradem Index oder eines $b$ mit ungeradem Index auszuführen.

Um $a_2$ zu berechnen, sind statt der Summen in I die Differenzen zu bilden

$$-170.8 - 33.8 + 161.2 - 47.6 + 11.2 - 12.2 - 10.4 - 18.8.$$

Diese Gröfsen sind wieder mit $\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 60^0 \sin 80^0$ in der durch das Schema gegebenen Weise zu multiplizieren und dann zu addieren, wobei man, wenn $a_{16}$ nicht auch berechnet werden soll, die Zahlen erst paarweise vereinigen kann.

$$\begin{array}{rrrrr} & -170.8 & -33.8 & +161.2 & -47.6 \\ & -18.8 & -10.4 & -12.2 & +11.2 \\ \hline \text{Summe:} & -189.6 & -44.2 & +149.0 & -36.4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 64.7 \\ -\ 28.4 \\ +129.0 \\ -\ 35.8 \\ \hline +\ 0.1 \end{array} \text{ sollte sein } 9 \cdot a_2 = 0.$$

Analog werde $b_1$ berechnet

$$-37 - 57.0 - 33.0 + 630.4 + 4.4 + 288.2 - 4.0 + 210.4 - 4.2.$$

$$\begin{array}{r} -\ 37 \\ +\ 56.1 \\ -\ 31.0 \\ +545.9 \\ +\ 3.4 \\ +185.2 \\ -\ 2.0 \\ +\ 72.0 \\ -\ 0.7 \\ \hline +791.9 \end{array} \text{ sollte sein } 9 \cdot b_1 = +792.$$

Die Übereinstimmung ist in beiden Fällen genügend.

Wenn man alle die Wellen bei Seite läfst, deren Amplitude 4 Einheiten nicht übersteigt, so vereinfacht sich die Formel auf:

$$\begin{aligned} 18 f(x) = & -165.5 \sin x + 171.6 \sin 3x + 26.1 \sin 5x - 6.3 \sin 7x - 25 \sin 9x \\ & + 63.2 \cos x + 625.7 \cos 3x + 277.4 \cos 5x + 194 \cos 7x + 72 \cos 9x. \end{aligned}$$

Es bleiben nur ungerade Wellen übrig. Man sieht, dafs es nicht angeht, sich in diesem Falle für die Zerlegung auf 12 Ordinaten zu beschränken. Denn die neunte Welle hat noch eine Amplitude von

$$1/18 \sqrt{72^2 + 25^2} = 4.2,$$

und die Figur zeigt, daſs die Vernachlässigung einer solchen Gröſse kaum gerechtfertigt sein würde, weil die Ordinaten durchschnittlich wohl genauer sind.

Der mittlere Fehler dieser 6 Glieder kann nach der allgemeinen Formel für das mittlere Fehlerquadrat berechnet werden:

$$\text{Mittleres Fehlerquadrat} = \frac{1}{4n}\sum y_\lambda^2 - \left[B_0^2 + \frac{A_1^2+B_1^2}{2} + \frac{A_2^2+B_2^2}{2} + \cdots +\right]$$

Wir erhalten

$$1/36 \sum y^2 = 899,$$

$$\frac{A_1^2+B_1^2}{2} + \frac{A_3^2+B_3^2}{2} + \frac{A_5^2+B_5^2}{2} + \frac{A_7^2+B_7^2}{2} + \frac{A_9^2+B_9^2}{2} + \frac{A_{15}^2+B_{15}^2}{2} = 885.$$

Mithin

$$\text{mittleres Fehlerquadrat} = 14,$$

$$\text{mittlerer Fehler} = 3.7.$$

Das mittlere Fehlerquadrat kann man auch als Probe bei der Berechnung aller Wellen benutzen. Dann müssen alle Fehler Null sein, also:

$$\frac{1}{4n}\sum y^2 = B_0^2 + \frac{A_1^2+B_1^2}{2} + \frac{A_2^2+B_2^2}{2} + \cdots + \frac{A_{2n-1}^2+B_{2n-1}^2}{2} + B_{2n}^2.$$

Es ist im allgemeinen zweckmäſsig, diese Probe in zwei Teilen auszuführen. Es ist nämlich:

$$y_\lambda^2 = \frac{a_\lambda^2 + b_\lambda^2}{2} \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots, 2n-1$$

$$\text{und } y_0^2 = b_0^2, \quad y_{2n}^2 = b_{2n}^2.$$

Daher

$$b_0^2 + \frac{a_1^2+b_1^2}{2} + \frac{a_2^2+b_2^2}{2} + \cdots + \frac{a_{2n-1}^2+b_{2n-1}^2}{2} + b_{2n}^2$$

$$= 4n\left[B_0^2 + \frac{A_1^2+B_1^2}{2} + \cdots + \frac{A_{2n-1}^2+B_{2n-1}^2}{2} + B_{2n}^2\right].$$

Und da die Gröſsen $A$ nur von den Gröſsen $a$, die Gröſsen $B$ nur von den Gröſsen $b$ abhängig sind, so kann man die Gleichung in die beiden Teile spalten:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2n-1}^2 = 4n[A_2^2 + A_2^2 + \cdots + A_{2n-1}^2],$$

$$2b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{2n-1}^2 + 2b_{2n}^2 = 4n[2B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 + \cdots + B_{2n-1}^2 + 2B_{2n}^2].$$

Dies hat bei der Probe den Vorzug, daſs man erkennen kann, ob ein Fehler in den Gröſsen $A$ oder in den Gröſsen $B$ steckt.

Um übrigens diese Probe zu einer genauen zu machen, müssen die Gröſsen $A$, $B$ sehr genau berechnet werden. Man wird sich, um dies zu vermeiden, im allgemeinen mit einer genäherten Probe begnügen.

---

# Höherstellige Logarithmen-Tafeln.

Von O. Dietrichkeit in Berlin.

Bei den höherstelligen Logarithmen-Tafeln machen sich zwei Unbequemlichkeiten geltend: Einerseits das erforderliche gröſsere Format, und andererseits die Umständlichkeit der Interpolations-Rechnung.

So ist z. B. das Folio-Format des 10-stelligen „Thesaurus“ von Vega zweifellos unbequem, und die Interpolation — namentlich zu Anfang der Tafel, wo noch die zweiten Differenzen zu berücksichtigen sind — ist umständlich.

Nachdem es mir nun gelungen ist, die Interpolations-Rechnung etwas zu vereinfachen, hat es die hiesige Verlagsbuchhandlung J. Springer unternommen, durch Versuche die Schwierigkeiten des Formats zu überwinden. Mit folgender Satz-Anordnung

$$000\,000^{00}_{00}$$

dürfte die Aufgabe für die 10-stellige Tafel gelöst sein: Die ersten sechs Ziffern sind groſs, die letzten vier Ziffern klein und derart gedruckt, daſs die neunte und zehnte Ziffer unter der siebenten und achten Ziffer stehen. In Format und Umfang würde sich eine derartige 10-stellige Tafel mit den jetzigen siebenstelligen Tafeln decken, trotzdem die einzelnen 10-stelligen Zahlen vollständig ausgeschrieben und nicht aus zwei verschiedenen Kolumnen zusammenzusuchen sind.

Bereits im Druck erschienen ist die analoge kleinere, für 4- bis 7-stellige Rechnung bestimmte Tafel, welche die siebenstelligen Logarithmen der vierstelligen Zahlen 1000 — 9999 und die siebenstelligen Antilogarithmen (Numeri) der vierstelligen Mantissen 0000 — 9999 in folgender Satz-Anordnung enthält

$$000\,00_{00}$$

Ein Rand-Index ermöglicht es, von jeder beliebigen Seite der Tafel aus jeden beliebigen Logarithmus und Antilogarithmus (Numerus) mit einem Griff aufzuschlagen.

Die Tafel ist nach Art der 4-stelligen Tafel von Hannyngton zunächst für 4-stelliges Schnell-Rechnen ohne Interpolation bestimmt. Hierbei werden nur die fünf ersten, groſs gedruckten Ziffern berücksichtigt, und die Schluſsergebnisse werden auf 4 Stellen abgerundet. Durch eine einfache Interpolations-Rechnung läſst sich scharfe siebenstellige Genauigkeit erzielen.

Die analoge, ebenfalls mit Antilogarithmen und Rand-Index geplante 10-stellige Tafel soll ev. später im Druck erscheinen.

Dieselbe könnte zunächst für fünfstelliges Schnell-Rechnen ohne Interpolation benützt werden, indem man nur die sechs ersten, grofs gedruckten Ziffern berücksichtigt und die Resultate auf 5 Stellen abrundet. Durch einfache Interpolations-Rechnung liefse sich im Bedarfsfalle 10-stellige Genauigkeit erzielen.

Die zweiten Differenzen lassen sich umgehen, indem man die bezüglichen Logarithmen in der Antilogarithmen-Tafel, und umgekehrt, aufschlägt; denn Logarithmen- und Antilogarithmen-Tafel ergänzen sich hierin in der glücklichsten Weise.

Die vereinfachte Interpolations-Methode stützt sich auf eine charakteristische Eigenschaft der Antilogarithmen.

Eine $n$-stellige Mantisse $L$ kann man als eine Summe von Einheiten der $n^{\text{ten}}$ Stelle ansehen

$$L = 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ (}L\text{ mal)}$$

Hiernach ist der Numerus (Antilogarithmus) von $L$ ein Produkt von $n$ Faktoren, deren Logarithmus eine 1 der $n^{\text{ten}}$ Stelle ist.

Sei nun der Numerus einer 1 der $n^{\text{ten}}$ Stelle

$$\text{Num } (000\ldots 1) = 10^{\frac{1}{10^n}} = 1 + a,$$

$$\log\,(1 + a) = \frac{1}{10^n} = 0.000\ldots 1,$$

so ist

$$\text{Num } (L) = (1 + a)^L. \tag{1}$$

Es ist aber (s. Vega, Thesaurus)

$$(1 + a)^x = 1 + ax + \frac{x(x-1)}{2} a^2 + \ldots$$
$$= 1 + mx + \tfrac{1}{2}(mx)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}(mx)^3 + \ldots$$

wo

$$m = a - \tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{3} a^3 - \tfrac{1}{4} a^4 \ldots$$
$$= \log \text{ nat. } (1 + a)$$
$$= \frac{1}{M} \cdot \log\,(1 + a),$$

und $M$ der Modul des briggischen Systems.

Also

$$(1 + a)^x = 1 + \frac{x \cdot \log\,(1 + a)}{M} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x \cdot \log\,(1 + a)}{M}\right)^2 + \ldots \tag{2}$$

Allgemein:

$$V^x = 1 + x\frac{\log V}{M} + \tfrac{1}{2}\left(x\frac{\log V}{M}\right)^2 + \ldots$$

Speziell:

$$10^x = 1 + \frac{x}{M} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{M}\right)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{x}{M}\right)^3 + \ldots$$

Setzt man:

$$\frac{1}{M} = u_1;\ \frac{1}{2M^2} = u_2;\ \frac{1}{2\cdot 3\cdot M^3} = u_3;\ \ldots$$

so ist:

$$10^x = 1 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots$$

Mit Rücksicht auf Gl. (1) u. (2) ist somit:

$$\text{Num}\,(L) = (1+a)^L = 1 + L\frac{\log(1+a)}{M} + \tfrac{1}{2}\left(L\frac{\log(1+a)}{M}\right)^2 + \ldots$$

Da nun

$$\log(1+a) = 0.000\ldots 1 = \frac{1}{10^n},$$

so ist:

$$(3)\qquad \text{Num}\,(L) = 1 + u_1\frac{L}{10^n} + u_2\frac{L^2}{10^{2n}} + u_3\frac{L^3}{10^{3n}} + \ldots$$

Ferner folgt:

$$\text{Num}\,(L+l) = (1+a)^{L+l} = (1+a)^L\cdot(1+a)^l = \text{Num}\,(L)\cdot(1+a)^l.$$

$$(4)\qquad \text{Num}\,(L+l) = \text{Num}\,(L)\left\{1 + u_1\frac{l}{10^n} + u_2\frac{l^2}{10^{2n}} + \ldots\right\}$$

$$(5)\qquad \text{Num}\,(L+1) = \text{Num}\,(L)\left\{1 + \frac{u_1}{10^n} + \frac{u_2}{10^{2n}} + \frac{u_3}{10^{3n}} + \ldots\right\}$$

$$(6)\qquad \text{Num}\,(L+1) = \text{Num}\,(L)\cdot(1+a),$$

was auch schon aus den Beziehungen:

$$\begin{aligned}\text{Num}\,(L) &= (1+a)^L\\ \text{Num}\,(L+1) &= (1+a)^{L+1}\\ &= (1+a)^L\cdot(1+a)\\ &= \text{Num}\,(L)\cdot(1+a)\end{aligned}$$

hervorgeht.

Setzt man:

$$D = \text{Num}\,(L+1) - \text{Num}\,(L),$$

so ist gemäfs Gl. (6).

$$D = a\,\text{Num}\,(L)$$

$$\log D = \log a + \log \text{Num}\,(L)$$

$$(7)\qquad \log D = \log a + L.$$

Nach Gl. 7 kann man den Logarithmus von $D$ (d. h. den Logarithmus der Differenz zwischen Num $(L)$ und Num $(L+1)$) finden, *ohne die Differenz selber zu bilden.*

Die Gröfse $a$ ist für sämtliche $n$-stelligen Mantissen konstant. Für fünfstellige Mantissen ist z. B.

$$\log(1+a) = 0.00001$$

$$1 + a = 1{,}000023026116027,$$

$$a = 0{,}000023026116027.$$

Um also den Logarithmus der Differenz zwischen Num $(L+1)$ und Num $(L)$ zu finden, hat man nur zu der bekannten, konstanten Gröfse $\log a$ die Zahl $L$ zu addieren.

Die Differenz $D$ und deren Logarithmus spielen nun aber bei der höherstelligen Interpolations-Rechnung eine wichtige Rolle.

Hat man z. B. den Numerus der 10-stelligen Mantisse

$$3345610481$$

zu bestimmen, so findet man in der Tafel der Antilogarithmen die 10-stelligen Numeri der 5-stelligen Mantissen 33456 und 33457. Das gesuchte Resultat liegt zwischen den beiden Tabellen-Zahlen und wird durch Interpolation nach der Formel gefunden:

$$\text{Num}\,(.3345610481) = \text{Num}\,(.334456) + D \cdot \tfrac{10481}{100000},$$

wo $D$ die Differenz zwischen Num (.33457) nur Num (.33456). Den Interpolations-Ausdruck wird man, da $D$ eine 5—6-stellige Zahl ist, am besten logarithmisch berechnen: Man schlägt den Logarithmus von 10481 auf, addiert dazu den Logarithmus von $D$, und sucht zu der gefundenen Zahl in der Antilogarithmen-Tafel den Numerus.

Da nun gemäfs Gl. 7

$$\log D = \log a + .33456,$$

so gestaltet sich die ganze Interpolations-Rechnung in obigem Falle folgendermafsen: Man schlägt den Logarithmus der fünf letzten Stellen (10481) auf, addiert dazu die konstante Gröfse $\log a$, (welche auf jeder Seite der Tafel oben angeführt ist), ferner die fünf ersten Ziffern (.33456) der gegebenen Mantisse, und sucht zu dem gefundenen Resultat in der Antilogarithmen-Tafel den Numerus.

Durch diese Bemerkung ist die Interpolations-Rechnung für die Antilogarithmen-Tafel sehr vereinfacht.

Es fragt sich, ob eine ähnliche Vereinfachung auch bei der Logarithmen-Tafel erreicht werden kann.

Folgende beiden Formeln liefern nun analoge, wenn auch nicht ganz so einfache Resultate:

$$(8) \qquad \log(N+1) = \log N + M \cdot \left\{\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{N^3} + \dots\right\}$$

$$(9) \qquad \log(N+1) = \log N + M \cdot \left\{\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^3 + \dots\right\}$$

oder mit Vernachlässigung höherer Potenzen:

$$(10) \qquad D = \frac{M}{N};\ \log D = \log M - \log N$$

$$(11) \qquad D = \frac{2M}{2N+1};\ \log D = \log(2M) - \log(2N+1),$$

wo $M$ der Modul des briggischen Systems und $D$ die Differenz zwischen $\log(N+1)$ und $\log N$.

Die Formel (10) liefert Resultate, welche bei einer Logarithmen-Tafel der vierstelligen Zahlen bereits in der 7ten Stelle und bei einer Logarithmen-Tafel der 5-stelligen Zahlen bereits in der neunten Stelle um etwa zwei Einheiten fehlerhaft sein können. Und Gl. (11) ist unbequem, weil man $\log(2N+1)$ noch besonders aufschlagen müſste. Etwas einfacher wird die Formel (11) wenn man schreibt:

$$D = \frac{M}{N+\frac{1}{2}};\ \log D = \log M - \log(N+\tfrac{1}{2})$$

$$(12) \qquad \log D = \log \mathrm{M} - \frac{\log N + \log(N+1)}{2}.$$

Hier ist $\log M$ für die ganze Tafel konstant, und die Zahlen $\log N$ und $\log(N+1)$ hat man sofort zur Hand.

Zu einem wesentlich einfacheren Resultat gelangt man jedoch, wenn man in Gl. (10) statt der Konstanten $M$ eine Variable $V$ setzt, also

$$(13) \qquad V = \log D + \log N,$$

und den Wert von $V$ für verschiedene Stellen der Tafel empirisch bestimmt. Der Versuch zeigt, daſs der Wert von $V$ zwar schwankt, daſs aber bei einer 7-stelligen Logarithmen-Tafel der vierstelligen Zahlen und bei einer 10-stelligen Logarithmen-Tafel der 5-stelligen Zahlen die Schwankung *für eine Seite* der Tafel nur geringfügig ist. Man kann also hinreichend scharfe Werte für $\log D$ erhalten, wenn man $V$ nach Formel (13) für die Mitte einer jeden Tafel-Seite berechnet und die gefundene Zahl als Interpolations-Konstante auf jeder Seite oben anführt. Dann erhält man den Logarithmus der für die Interpolations-Rechnung in Frage kommenden Differenz, indem man von der am Kopfe der betreffenden Seite angegebenen Interpolations-Konstanten den $\log N$ abzieht.

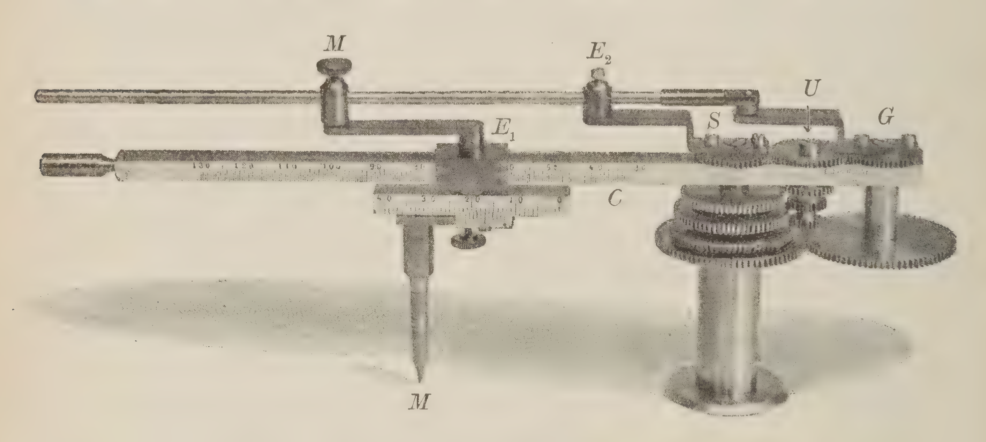
Auf diese Weise ergiebt sich auch für die höherstellige Logarithmen-Tafel eine praktisch brauchbare, vereinfachte Interpolations-Rechnung.

---

# Über ein kinematisches Modell.

Von Theodor Schmid in Wien.

Herr Markus Kriss, ein Hörer der hiesigen technischen Hochschule, konstruierte vor etwa Jahresfrist nach eigenen Überlegungen einen sogenannten Ellipsenzirkel und erhielt hierfür auch ein Patent. Herr Kriss zeigte mir vor etwa 2 Monaten das Instrument und ersuchte mich um ein Gutachten. Ich sah sofort, dafs das Instrument auf der Entstehung der Ellipse als spezieller cyklischer Kurve beruhe; daher machte ich Herrn Kriss aufmerksam, dafs man auf gleiche Weise auch jede andere cyklische Kurve zeichnen könne. Nach meinen




Angaben wurde dann ein Instrument hergestellt, welches die vier einfachsten Gruppen von algebraischen Trochoiden zeichnet. Dasselbe beruht auf jener Erzeugung der cyklischen Kurven, welche Herr Friedrich Schilling in seiner Abhandlung „Über neue kinematische Modelle“[1]) als *erste* kinematische Erzeugung bezeichnet[2]), und bildet sohin eine passende Ergänzung zu der bereits veröffentlichten Serie von Modellen, bei welchen unmittelbar das Abrollen von Kreisen veranschaulicht wird.

---

1) Diese Zeitschrift, 44. Band, 1899, S. 214. Im folgenden ist die Bezeichnung so wie in dieser Abhandlung.

2) Die „penna geometrica“ des conte Suardi (1752) beruhte auf der *zweiten* kinematischen Erzeugung. [Katalog mathematischer Modelle usw. von Walther Dyck, S. 82.]

Die Tafel zeigt eine Abbildung des Modelles in ungefähr halber Gröfse. Um eine Achse $S$ ist ein Stab mit einer (beliebigen) Winkelgeschwindigkeit $\omega$ drehbar. In einem Schlitze dieses Stabes ist eine Achse $E_1$ verschiebbar, so dafs die Strecke $C = SE_1$ innerhalb gewisser Grenzen (36 und 136 mm) veränderlich ist. Über dem Stabe sind zwei gleich lange Arme $c = SE_2 = E_1 M$ angebracht, die wieder durch einen Stab zu einem Gelenkparallelogramm ergänzt werden. Damit auch die Strecke $c$ veränderlich wird, ist unter dem ersten Stabe an der Achse $E_1$ ein kürzerer Mafsstab angebracht, welcher einen verschiebbaren Bleistift trägt, der den Punkt $M$ vorstellt. Der Abstand $c = E_1 M$ ist auf diesem Mafsstabe (0 bis 36 mm) durch jenen Noniusstrich abzulesen, welcher durch einen Punkt gekennzeichnet ist. Der Arm $SE_2$ besitzt bei $S$ ein Zahnrad, in welches ein ebensogrofses Rad $U$ eingreift, dessen Achse auf dem Stabe $C$ angebracht ist. An dieser Achse befindet sich unter $C$ ein Zahnrad mit dem Radius $r$, welches an einem auf der Achse $S$ feststehenden Rade mit dem Radius $R$ rollt. Der Arm $SE_2$ macht dann eine ungleichlaufende Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = -\frac{m}{n}\omega$, wenn $\frac{r}{R} = \frac{n}{m+n}$ ist. Das Rad $U$ besitzt nämlich eine gleichsinnige Winkelgeschwindigkeit $\frac{m+n}{n}\omega$ in Bezug auf den Stab $C$, das Rad $S$ eine ebenso grofse ungleichsinnige Geschwindigkeit. In Bezug auf die Zeichenebene ist dann eine Geschwindigkeit $\Omega = -\frac{m}{n}\omega$ vorhanden. In das Rad $U$ greift noch ein gleich grofses Rad $G$ ein[1]), dessen Achse auf dem Stabe $C$ befestigt ist und unter $C$ wieder ein Zahnrad mit dem Radius $r$ trägt. Durch Rollen dieses Rades an einem auf der Achse $S$ feststehenden Rade mit dem Radius $R$ erlangt der Arm $SE_2$ eine gleichlaufende Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \frac{m}{n}\omega$, wenn $\frac{r}{R} = \frac{n}{m-n}$ ist. Das Rad $G$ hat nämlich eine gleichsinnige Winkelgeschwindigkeit $\frac{m-n}{n}\omega$ in Bezug auf den Stab $C$, welche durch zweimalige Übertragung auf das Rad $S$ übergeht. In Bezug auf die Zeichenebene ist dann die Geschwindigkeit $\Omega = \frac{m}{n}\omega$ vorhanden.

Die an der Achse $S$ befindlichen vier Räder können durch Verschieben zum Eingriff gebracht werden, und zwar die oberen drei mit $U$, das untere mit $G$. Man erhält so:

---

1) Dieses Rad wird auch zur besseren Führung des Parallelogrammes benützt.

I. Für $\frac{r}{R} = \frac{n}{m+n}$, $\frac{\omega}{\Omega} = -\frac{n}{m}$, $\frac{c}{C} \gtreqless \frac{n}{m}$ verschl. / gesp. / gestr. } Hypotrochoide

1. $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$, $\frac{\omega}{\Omega} = -1$, $\frac{c}{C} = 1$ Strecke

$< 1$ Ellipse $\begin{cases} a = C + c \\ b = C - c \end{cases}$

2. $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$, $\frac{\omega}{\Omega} = -\frac{1}{2}$, $\frac{c}{C} = \frac{1}{2}$ Steiners Hypocykloide

3. $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$, $\frac{\omega}{\Omega} = -\frac{1}{3}$, $\frac{c}{C} = \frac{1}{3}$ Astroide.

II. Für $\frac{r}{R} = \frac{n}{m-n}$, $\frac{\omega}{\Omega} = \frac{n}{m}$, $\frac{c}{C} \gtreqless \frac{n}{m}$ verschl. / gesp. / gestr. } Epitrochoide

$\frac{r}{R} = 1$, $\frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{2}$, $\frac{c}{C} \gtrless \frac{1}{2}$ Pascals Linie

$= \frac{1}{2}$ Cardioide.[1])

Für das Zeichnen mit der Reifsfeder ist es notwendig, dafs die Schneide der Feder die Richtung der Tangente beibehält, was leicht herbeigeführt werden kann. Die Normale des Punktes $M$ geht nämlich stets durch das Momentanzentrum $P_1$ des Gelenkes $E_1 M$, welches auf dem Stabe $SE_1$ liegt, so dafs

$$\frac{SP_1}{SE_1} = \frac{\Omega - \omega}{\Omega} \quad \text{oder} \quad SP_1 = C\left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right).$$

In den obigen Fällen ist $SP_1 = 2C$, $\frac{3}{2}C$, $\frac{4}{3}C$; $\frac{1}{2}C$. Befestigt man daher in dem Schlitze des Stabes $C$ bei $P_1$ eine Achse mit einem horizontalen Stäbchen, welches durch eine Lücke des Federstieles geht, die zur Schneide normal ist, so behält diese die Richtung der Tangente.

Die Normale des Punktes $M$ geht auch durch das Momentanzentrum $P_2$ des Gelenkes $E_2 M$, welches auf $SE_2$ liegt in einem Abstande

$$SP_2 = c\left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right).$$

Während der Bewegung beschreiben die beiden Zentra kreisförmige Punktreihen. Jedem Punkte $P_1$, welchem ein Drehungswinkel $(\omega t + k \cdot 2\pi)$ zukommt, entsprechen die Punkte $P_2$, welchen Drehungswinkel $\left(\frac{m}{n}\omega t + \frac{mk}{n} 2\pi\right)$ zukommen. Den $n$ verschiedenen Resten, welche $mk$ bei der Division durch $n$ ergiebt, entspricht eine regelmäfsige Gruppe

1) Bei dem vorliegenden Modelle kann $C$ gewählt werden: für die „Strecke" $C = 36$ mm, für „Steiners Hypocykloide" und „Cardioide" $C = 36$ bis $72$ mm, endlich für die „Astroide" $C = 36$ bis $108$ mm.

von $n$ Punkten $P_2$. Jedem Punkte $P_2$, welchem ein Drehungswinkel $(\Omega t + k \cdot 2\pi)$ zukommt, entsprechen die Punkte $P_1$ mit Drehungswinkeln $\left(\frac{n}{m}\Omega t + \frac{nk}{m}2\pi\right)$, also eine regelmäſsige Gruppe von $m$ Punkten $P_1$. Die beiden Punktreihen sind somit in $m$-$n$-deutiger Verwandtschaft.

*Die Evolute einer algebraischen Trochoide ist das Erzeugnis zweier kreisförmiger $m$-$n$-deutiger Punktreihen, also eine Kurve $2(m+n)$. Klasse, welche die beiden Kreise $2(m+n)$-fach berührt, jedoch nur den kleineren in reellen Punkten.*

Für die Cykloiden werden beide Kreise identisch; daher entstehen $(m+n)$ Doppelpunkte der beiden Punktreihen. Diese Doppelpunkte scheiden als Gebilde erster Klasse aus. Die Evolute hat dieselben als Scheitel und ist nur mehr von der $(m+n)$. Klasse. Durch jeden Punkt des Polkreises gehen dann $m$ Tangenten, welche je $\frac{1}{m}$ eines gestreckten Winkels mit einander bilden, und $n$ Tangenten, welche je $\frac{1}{n}$ eines gestreckten Winkels bilden.

---

# Zur Theorie des Foucaultschen Pendelversuchs.

Von FERDINAND MEISEL in Darmstadt.

Im folgenden habe ich die Aufgabe zu lösen versucht, mit ganz elementaren Mitteln und ohne von der Betrachtung unendlich kleiner Bewegungen auszugehen eine annähernd richtige Formel für die durch die Drehung der Erde innerhalb einer gegebenen, endlichen Zeit bewirkte Ablenkung der Schwingungsebene des Pendels aus ihrer ursprünglichen Lage aufzustellen.

Da die Schwingungsebene, die in jedem Augenblicke durch den Erdmittelpunkt gehen muſs, unmöglich sich selbst parallel bleiben kann, *so liegt die Annahme nahe, daſs sie der Anfangsrichtung der Bewegung parallel bleibe.* Diese Anfangsrichtung wollen wir uns in die Meridianebene fallend denken; sie ist die Tangente des Meridians in dem Punkte, in dem der Versuch angestellt wird, zugleich die Tangente der Bahn des Massenpunkts in ihrem tiefsten Punkte. Die Schwingungsebene durchläuft alle Ebenen eines Ebenenbüschels, dessen Achse eine durch den Erdmittelpunkt gelegte Parallele zu dieser Tangente ist.

In dem durch seine 3 Projektionen dargestellten Punkte $P_0$, dessen geographische Breite $\beta$ ist, werde der Versuch angestellt. Durch diesen

Punkt legen wir die $yz$-Ebene; der Ursprung $O$ liege im Mittelpunkt der Erdkugel.

Hat sich die Erde nach einer gewissen Zeit um ihre mit der $z$-Achse zusammenfallende Achse um den Winkel $t$ — den Stundenwinkel — gedreht, so ist $P_0$ in die durch ihre 3 Projektionen dargestellte Lage $P$ gelangt. Die durch $P$ gelegte Parallele zur erwähnten Tangente in $P_0$ schneidet die $xy$-Ebene in $A'$, die $xz$-Ebene in $B''$. Da die Schwingungsebene aufserdem stets durch $O$ gehen mufs, sind $A'O$ und $B''O$ ihre Spuren.[1])

Die Bewegungsrichtung im tiefsten Punkte der Bahn ist die Schnittlinie dieser Schwingungsebene mit der in $P$ an die Kugel gelegten Tangentenebene, deren Spuren $C'D$ und $DE''$ sind; die Projektionen dieser Schnittlinie sind $P'F'$ und $P''G''$. Der Winkel $H'P'F' = x'$ ist nun offenbar die auf die $xy$-Ebene genommene Projektion des Winkels $x$, um den sich, in der Tangentenebene gemessen, die Schwingungsebene in der dem Winkel $t$ entsprechenden Zeit gedreht hat. Die wahre Gröfse des Winkels $x$ wird schliefslich gefunden, indem man $P'P^* = OP_0''$ macht und um den Mittelpunkt $H'$ den Bogen $P^*P'$ beschreibt, d. h. den Winkel in die $xy$-Ebene umklappt.

Die rechnerische Ermittelung von $x$ gestaltet sich folgendermafsen. Es ist

$$\operatorname{tg} x = \frac{F'H'}{P^*H'} = \frac{F'H'}{\sqrt{P'H'^2 + \sin^2\beta}},$$

wenn der Kugelradius $= 1$ gesetzt wird. Ferner ist

$$P'H' = OH' - OP' = \frac{1}{\cos\beta} - \cos\beta = \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta},$$

also

$$\operatorname{tg} x = \frac{F'H'}{\sqrt{\frac{\sin^4\beta}{\cos^2\beta} + \sin^2\beta}} = \frac{F'H'}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Nun ist

$$F'H' = OH' \cdot \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\cos\beta} = \frac{\operatorname{tg}(t-\psi)}{\cos\beta}$$

und

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{A'K}{OK} = \frac{P'L}{OK} = \frac{OP' \cdot \sin t}{OK} = \frac{\cos\beta \cdot \sin t}{OK}.$$

---

1) Dafs die durch $P$ gelegte Parallele zur Tangente des Meridians von $P_0$ in diesem Punkte nicht in der Tangentenebene des Punkts $P$ liegt, ihr Winkel mit dem Meridian von $P$ also auch nicht der gesuchte Winkel $x$ sein kann, pflegt übersehen zu werden. Auch für unendlich kleine Drehungen ist diese Annahme nicht zulässig.

Aus

$$OK : OM = OH' : OE'' = \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\sin\beta} = \operatorname{tg}\beta : 1$$

folgt

$$OK = OM \cdot \operatorname{tg}\beta;$$

Ferner ist

$$OM = OP_0'' + P_0'' M = \sin\beta + \cos\beta \cdot \operatorname{cotg}\beta \,.\, \cos t,$$

also

$$OK = \sin\beta \,.\, \operatorname{tg}\beta + \cos\beta \cdot \cos t$$

und

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\cos^2\beta \cdot \sin t}{\sin^2\beta + \cos^2\beta \cdot \cos t},$$

folglich

$$\operatorname{tg}(t-\psi) = \frac{\operatorname{tg}t - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}t \cdot \operatorname{tg}\psi} = \frac{\sin t \cdot \sin^2\beta}{\sin^2\beta \cdot \cos t + \cos^2\beta}.$$

Daher ist

$$F'H' = \frac{\sin t \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{tg}\beta}{\sin^2\beta \cdot \cos t + \cos^2\beta}$$

und schliefslich

$$\operatorname{tg}x = \frac{\sin t \cdot \sin\beta}{\sin^2\beta \cdot \cos t + \cos^2\beta} = \frac{\sin t}{\sin\beta \cdot \cos t + \cos\beta \cdot \operatorname{cotg}\beta}.$$

Natürlicherweise kann man diese Formel auch dadurch ableiten, dafs man dieselben Operationen, die hier nach den Methoden der elementaren darstellenden Geometrie ausgeführt wurden, nach den bekannten Formeln der analytischen Geometrie des Raumes durchführt. Indessen erscheint mir die hier gewählte Darstellungsweise besonders anschaulich und einfach.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Für den Äquator | ergiebt sich: | $\operatorname{tg}x = 0,$ | $x = 0$ |
| „ „ Pol | „ „ | $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}t,$ | $x = t$ |
| „ $t = 0$ <br> „ $t = \pi$ | „ „ | $\operatorname{tg}x = 0,$ | $x = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$ |
| „ $t = \frac{\pi}{2}$ | „ „ | $\operatorname{tg}x = \frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}.$ | |

Für einen verschwindend kleinen Stundenwinkel ($\sin t = t$, $\cos t = 1$) ergiebt sich

$$\operatorname{tg}x = t \cdot \sin\beta,$$

oder, da in diesem Falle auch $x$ ein kleiner Winkel ist,

$$x = t \cdot \sin\beta.$$

Für kleine Winkel gelangen wir also zu demselben Ergebnisse, das auch Garthe[1]), Pisko[2]), Vahlen[3]) gefunden haben.

Aus der für $\operatorname{tg} x$ gefundenen Formel folgt, daſs für eine gegebene geographische Breite $\beta$ ein Maximum $x'$ der Ablenkung eintritt, wenn $t$ den Werth $t'$, der durch die Bedingung

$$\cos t' = -\operatorname{tg}^2 \beta$$

gegeben ist, annimmt, und es ist

$$\operatorname{tg} x' = \frac{\sin \beta}{\sqrt{\cos^4 \beta - \sin^4 \beta}}.$$

$t'$ und $x'$ sind nur reell, wenn $\beta \leqq 45^0$ ist; bei höheren Werten von $\beta$ tritt kein Maximum zwischen $0^0$ und $180^0$ ein, sondern die Ablenkung nimmt bis $t = 180^0$ fortwährend zu, um dann symmetrisch wieder abzunehmen.

Die Art, wie sich die Drehung der Schwingungsebene unter den verschiedenen Breiten vollzieht, erscheint nun vollständig übersichtlich. Im Pol dreht sich die Schwingungsebene 24 Stunden hindurch durchaus gleichmäſsig; bewegen wir uns gegen den Äquator, so wird die Bewegung ungleichförmig, und zwar in dem Sinne, daſs $x$ zuerst gegen $t$ zurückbleibt, dann schneller wächst, mit $t$ zugleich den Wert $180^0$ erreicht und symmetrisch wieder bis 0 abnimmt. Die Ungleichförmigkeit nimmt mit wachsender Entfernung vom Pol zu, bis bei $45^0$ Breite die Schwingungsebene anfängt, selbst eine Pendelschwingung um die Meridianebene auszuführen. Der Ausschlag beträgt bei $\beta = 45^0$ nach jeder Seite $90^0$; allmählig aber nimmt die Amplitude der Schwingung ab, bis sie am Äquator den Wert Null erreicht. — Die Schwingung der Ebene erfolgt in der Weise, daſs letztere langsam bis zu ihrer äuſsersten Lage vorrückt, dann schnell in die Anfangslage zurückkehrt und sich dann ebenso nach der anderen Seite bewegt. Bei $\beta = 45^0$ erreicht die Ebene für $t = 180^0$, also nach 12 Stunden, ihre gröſste Abweichung $x' = 90^0$, um dann — theoretisch — in der Zeit 0 in die Anfangslage zurückzukehren oder auch, da es sich hier um einen Grenzfall handelt, nach Analogie des Verlaufs für $\beta > 45^0$ in der Zeit 0 bis $180^0$ und symmetrisch darüber hinaus zu gelangen. Bei $\beta = 44^0$ wird der gröſste Ausschlag $x' = 74^0 56' 52''$ in 10,54 . . Stunden erreicht; in 1,45 . . Stunden kehrt die Ebene in ihre Anfangslage zurück. In

1) Foucault's Versuch als direkter Beweis der Achsendrehung der Erde, Köln 1852.

2) Foucault's Beweis für die Achsendrehung der Erde, Brünn 1852.

3) Über das Foucault'sche Pendel, diese Zeitschrift, 43. Band, 1898, S. 166 u. 167.

der folgenden Tabelle habe ich für einige charakteristische Parallelkreise die Werte von $x$ von Stunde zu Stunde zusammengestellt.

| $t=$ | 0° | 15° | 30° | 45° | 60° | 75° | 90° | 105° | 120° | 135° | 150° | 165° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta=1°$ | 0° | 0° 15′ 32″ | 0° 30′ 0″ | 0° 42′ 26″ | 0° 51′ 58″ | 0° 57′ 58″ | 1° 0′ 1″ | 0° 57′ 50″ | 0° 51′ 52″ | 0° 42′ 21″ | 0° 29′ 57″ | 0° 15′ 30″ | 0° |
| $\beta=40°$ | 0° | 9° 34′ 41″ | 18° 47′ 23″ | 27° 20′ 36″ | 35° 3′ 15″ | 41° 49′ 36″ | 47° 36′ 21″ | 52° 17′ 58″ | 55° 39′ 53″ | 57° 2′ 41″ | 54° 31′ 44″ | 41° 32′ 52″ | 0° |
| $\beta=50°$ | 0° | 11° 26′ 14″ | 22° 37′ 11″ | 33° 11′ 19″ | 43° 11′ 42″ | 52° 37′ 18″ | 61° 39′ 33″ | 70° 33′ 1″ | 79° 46′ 0″ | 90° 11′ 14″ | 103° 56′ 1″ | 127° 46′ 29″ | 180° |

Diese Zahlen bestätigen, dafs, wie wie wir schon oben sahen, für kleine Werte von $t$ die Ablenkung nahezu proportional der Zeit ist. Daraus, das $x$ während dieser ersten Stunden erheblich hinter $t$ zurückbleibt, schlofs Foucault, dafs — auch für die Breite von Paris — die Schwingungsebene keine vollständige Umdrehung innerhalb 24 Stunden machen könne. Er sagt nämlich[1]): La grandeur moyenne de ce mouvement, rapportée au temps qu'il emploie à se produire, montre, conformément aux indications de la théorie, que sous nos latitudes, la trace horizontale du plan d'oscillation ne fait pas un tour entier dans les vingt-quatre heures".

Es ist von hohem Interesse, zu sehen, wie *Foucault* selbst sich die relative Bewegung der Schwingungsebene gegen den Meridian denkt. Er geht von der Annahme aus, dafs der Winkel der Schwingungs- und der Meridiansebene *möglichst klein* sein müsse. „Quand la verticale, toujours comprise dans le plan d'oscillation change de direction dans l'espace, les positions successives du plan d'oscillation sont déterminées par la condition de faire entre elles des angles minima".[2]) In der zugehörigen Figur ist $P$ der Pol, $M$ die Anfangslage des betrachteten Punkts, $B$ die um den Stundenwinkel $n$ auf seinem Parallelkreise verschobene Lage desselben Punkts, $A$ ein Punkt auf dem Meridian von $M$, dessen Entfernung von $B = 90^0$ ist, $PA = \lambda$, $\sphericalangle PBA = x$, und nun folgt aus dem sphärischen Dreieck $PAB$ die Gleichung

$$\sin x = \sin n \cdot \sin \lambda,$$

die für kleine Verschiebungen übergeht in

$$x = n \cdot \sin \lambda.$$

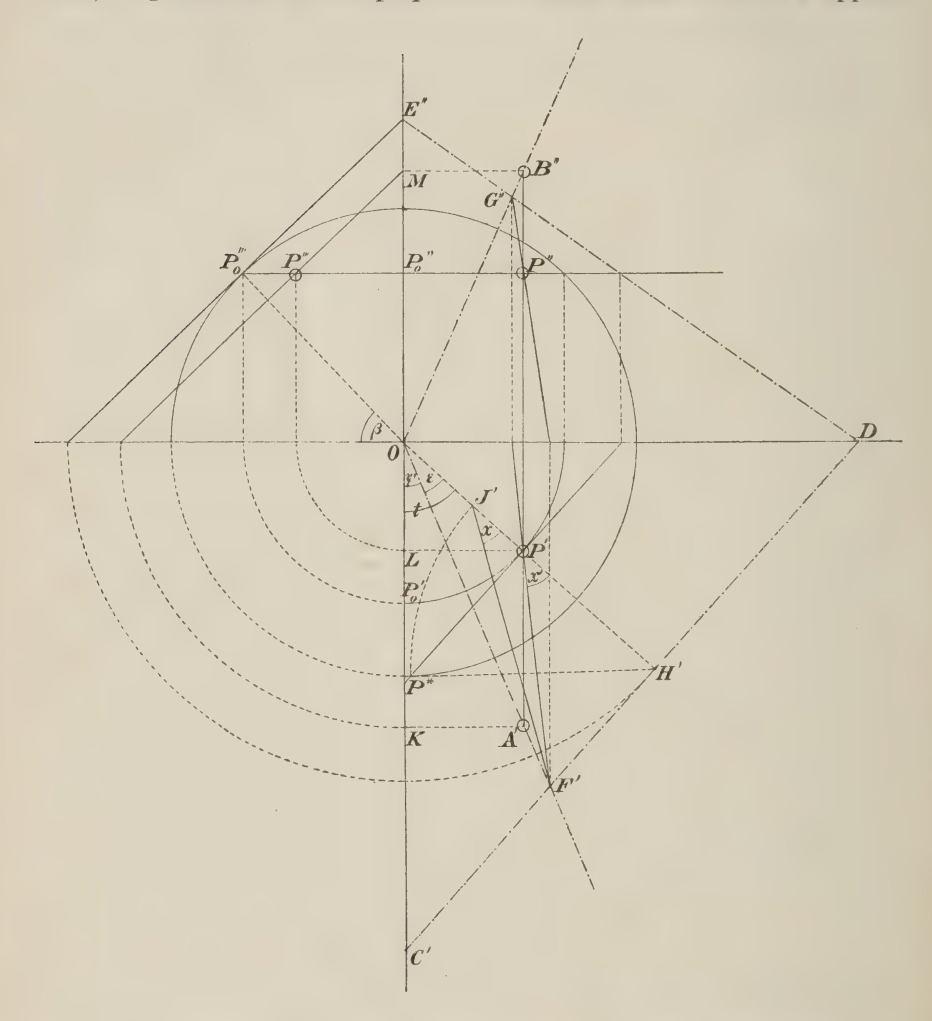
Für vollständig gelöst hält Foucault das Problem damit offenbar selbst nicht, denn in der angeführten „Démonstration" (S. 380) sagt er,

---

1) „Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule" in Recueil des travaux scientifique de Léon Foucault, Paris 1878, S. 381.

2) Lettre sur la loi à laquelle obéit la déviation du pendule, a. a. O. S. 383.

nachdem er darauf hingewiesen hat, dafs die Erscheinung nur am Pol in ihrer vollen Reinheit auftritt: Mais quand on descend vers nos latitudes, le phénomène se complique d'un élément assez difficile à appré-




cier et sur lequel je souhaite bien vivement d'attirer l'attention des géomètres.

Eine vollständig strenge, erschöpfende Behandlung des Problems hat schon 1856 Lottner gegeben.[1])

1) Crelles Journal für Mathematik, Band 52.

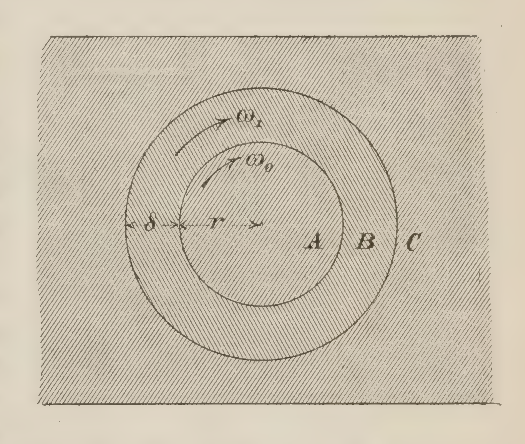
# Ein Beispiel zum Satze vom Minimum der Reibungsarbeit.

Von H. Heimann in Frankfurt a. M.

Dem Anfänger bereitet das Verständnis der Minima-Sätze der Mechanik oft erhebliche Schwierigkeiten. Die direkte Ableitung jener Sätze aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen oder umgekehrt der Gleichgewichtsbedingungen aus jenen Sätzen wird, wenn an einfachen Beispielen erklärt, leichter begriffen und behalten.

Das folgende Beispiel scheint zur Erläuterung recht geeignet.

Es sei $A$ eine mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_0$ sich drehende Welle, $B$ ein um diese Welle mit der Pressung $p$ gelegter Ring, der infolge der Bewegung der Welle $A$ die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1$ angenommen hat, $C$ ein um diesen Ring ebenfalls mit der Pressung $p$ gelegter, feststehender Bremszaum. Es wird gefragt, welche Beziehung besteht zwischen $\omega_0$ und $\omega_1$, sobald stationärer Zustand eingetreten ist? Zur Beantwortung der Frage giebt es drei Wege. Einmal das direkte Ansetzen der Gleichgewichtsbedingung für den Ring $B$, dann die Anwendung des Satzes von der Erhaltung der Energie, nach welchem die insgesamt von $A$ abgegebene Arbeit gleich den Reibungsarbeiten an der äufseren und inneren Ringfläche sein mufs, oder drittens die Anwendung des Minimumsatzes, nach welchem die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1$ einen Wert annehmen mufs, der die Reibungsarbeit zu einem Minimum macht.




I. Es sei die auf die innere Ringfläche wirkende Reibungskraft $= k_1$
" " " äufsere " " " $= k_2$

dann erhält man durch Gleichsetzen der auf den Ring wirkenden Momente

$$r \cdot k_1 = (r + \delta)\, k_2 .$$

II. Die gesamte von $A$ abgegebene sekundliche Arbeit ist:

$$r \cdot \omega_0 k_1 .$$

Die sekundliche Reibungsarbeit an der inneren Ringfläche ist gleich der wirksamen Kraft $k_1$ mal dem Weg, den $B$ relativ zu $A$ pro Sekunde zurücklegt, also gleich: $r \cdot (\omega_0 - \omega_1)\, k_1$. Ebenso ist die sekundliche Reibungsarbeit an der äufseren Ringfläche gleich: $(r + \delta)\, w_1\, k_2$; und durch Gleichsetzen:

$$r\omega_0 k_1 = r(\omega_0 - \omega_1)k_1 + (r + \delta)\omega_1 k_2$$

oder

$$rk_1 = (r + \delta)k_2.$$

III. Die gesamte Reibungsarbeit ist wie vorhin:

$$r(\omega_0 - \omega_1)k_1 + (r + \delta)\omega_1 k_2.$$

Diese soll ein Minimum werden, also

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\left\{r(\omega_0 - \omega_1)k_1 + (r + \delta)\omega_1 k_2\right\} = 0$$

oder

$$rk_1 = (r + \delta)k_2.$$

Nimmt man an, dafs die Reibungskraft proportional dem Inhalte der sich reibenden Flächen und eine Funktion des Druckes der Flächen gegeneinander und ihrer Relativgeschwindigkeit sei, so ist nach unserer Voraussetzung

$$k_1 = 2r\pi\, f(p, r(\omega_0 - \omega_1)),$$

$$k_2 = 2(r + \delta)\pi\, f(p, (r + \delta)\omega_1),$$

also

$$r^2 \cdot f(p, r(\omega_0 - \omega_1)) = (r + \delta)^2 f(p, (r + \delta)\omega_1),$$

und wenn $\delta$ gegen $r$ vernachlässigbar ist,

$$\omega_0 - \omega_1 = \omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2}.$$

---

# Die Bestimmung des günstigsten Punktes für das Rückwärts-Einschneiden.

Von A. Klingatsch in Graz.

Mit 8 Figuren auf einer Doppeltafel in Lithographie.

Die in der Geodäsie häufig vorkommenden Punktbestimmungen durch Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden lassen sich bekanntlich bezüglich des Rechnungsvorganges ineinander überführen. Sind (Fig. 1) $L$, $M$, $R$ die drei gegebenen, $P$ der zu bestimmende Punkt, so giebt nach Prof. Runge[1]) eine Transformation nach reziproken Radien bezüglich eines Kreises um $M$ vom Halbmesser 1 die drei Punkte $AP'B$ so, dafs durch dieselben Messungen, durch die $P$ von $L$, $M$, $R$ rückwärts eingeschnitten wird, $P'$ von $A$, $B$ als vorwärts eingeschnitten betrachtet werden kann.

Nachstehend soll eine ähnliche Beziehung entwickelt werden, welche die Grundlage für die in der Überschrift angegebene Untersuchung bildet. Die günstigste Punktlage, diejenige nämlich, für welche der mittlere Punktfehler den kleinsten Wert hat, kann lediglich für die Annahme, dafs die Richtungsgewichte proportional $\overline{PL}^2$, $\overline{PM}^2$, $\overline{PR}^2$ angenommen werden, durch ein einfaches Gesetz ausgedrückt werden; sofern die drei gemessenen Winkel auf den Horizont ausgeglichen werden, genügt der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises der obigen Bedingung.[2]) Für den Fall der Theodolitwinkelmessung, um welchen es sich hier handeln soll, gilt dies nicht mehr.

Für die Bestimmung des günstigsten Punktes, ebenso wie für die Konstruktion von Genauigkeitskurven beim Rückwärts-Einschneiden liegen unseres Wissens, von speziellen Fällen abgesehen, Untersuchungen noch nicht vor, so dafs die wenn auch nur näherungsweise durchführbare Lösung Interesse bieten dürfte, indem dabei die einfacher zu behandelnden Genauigkeitsuntersuchungen für das Vorwärts-Einschneiden zur Anwendung gelangen.

Wir werden lediglich zwei gleich genau gemessene Winkel voraussetzen.

## 1.

Der dem Dreiecke $LMR$ (Fig. 2) umschriebene Kreis werde mit einem zweiten Kreise $K$ mit $M$ als Mittelpunkt zum Schnitt gebracht; die gemeinsame Sehne schneide $\overline{LM}$ und $\overline{MR}$ in $A$ und $B$.

---

1) Zeitschrift f. Verm. 1899, 1900.

2) Kiepert, Zeitschrift f. Verm. 1887.

Für jede Lage von $P$ auf $K$ ist der mittlere Punktfehler $M_r$ für das Rückwärts-Einschneiden aus $L$, $M$, $R$ gleich dem mittleren Punktfehler $M_v$ für das Vorwärts-Einschneiden aus $A$ und $B$.

Hierbei sind die Winkel $\alpha = \sphericalangle LPM$, $\beta = \sphericalangle MPR$ in dem durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben gegebenen Sinne zu zählen.

Man hat durch die Konstruktion

$$\text{(1)} \qquad \overline{LM} \cdot \overline{AM} = \overline{RM} \cdot \overline{BM} = \overline{PM}^2,$$

woraus die Gleichheit der Winkel

$$\sphericalangle MAB = LRM = w_1; \quad \sphericalangle MAP = LPM = \alpha; \quad \sphericalangle APM = MLP = \varphi$$

$$\sphericalangle ABM = MLR = w_2; \quad \sphericalangle PBM = MPR = \beta; \quad \sphericalangle MPB = PRM = \psi$$

folgt.

Für zwei gemessene Winkel ist aber[1])

$$\text{(2)} \qquad M_r = \frac{\delta}{\sin(\varphi + \psi)} \overline{PM} \cdot \sqrt{\left(\frac{\overline{LP}}{\overline{LM}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{RP}}{\overline{RM}}\right)^2},$$

wo $\delta$ der Fehler in den Winkelmessungen ist.

Wegen

$$\frac{\overline{LP}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PM}}, \qquad \frac{\overline{RP}}{\overline{RM}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PM}},$$

wird daher

$$\text{(3)} \qquad M_r = \frac{\delta}{\sin(\varphi + \psi)} \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2} = M_v = M.$$

Solange der Halbmesser $\overline{MP} = r$ von $K$ ungeändert bleibt, gilt dasselbe von $A$ und $B$. Für verschiedene $K$ resp. $r$ bleibt die Richtung von $\overline{AB}$ ungeändert, nämlich parallel zur Tangente $t$ in $M$ an den dem Dreieck $LMR$ umschriebenen Kreis.

Da (3) lediglich an die Erfüllung von (1) gebunden ist, so liefert (1) auch die Punkte $A$, $B$ in allen Fällen, wo keine reellen Schnitte zwischen den Kreisen stattfinden.

Liegt nun, wie wir immer annehmen werden, eine in entsprechendem Maſsstabe durchgeführte Zeichnung von $LMR$ vor, so läſst sich zunächst zu jeder gegebenen Lage von $P$, der Punktfehler $M$ näherungsweise finden, indem man mit $\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$, $\overline{AB} = c$, (3) die Form giebt

$$\text{(4)} \qquad \left(\frac{M}{\delta}\right) = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{ch},$$

wo $h$ den Abstand des Punktes $P$ von $AB$ bedeutet und die Abmessungen in (4) der Zeichnung entnommen werden.

---

1) Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, I. Band 1888, Seite 312.

Ebenso kann bei gegebener Lage von $P$ einfach entschieden werden, welche Winkelmessungen den Punkt am schärfsten bestimmen, welcher Dreieckspunkt also bei den Messungen „in die Mitte“ zu nehmen ist.

Aus dem Vorhergehenden folgt aber auch, dafs auf demselben Kreise um $M$ die günstigsten bzw. ungünstigsten Punktlagen beim Rückwärts-Einschneiden aus $LMR$ identisch sind mit denjenigen, welche sich auf diesem Kreise durch Vorwärts-Einschneiden von $A$, $B$ ergeben.

2.

Indem wir zunächst die letztere Aufgabe behandeln, sind in Fig. 3. die gegebenen Punkte $A$, $B$ als unveränderlich anzunehmen. Alle Punkte, bei deren Bestimmung von $A$, $B$ der mittlere Punktfehler konstant bleibt, liegen auf einer Kurve, der Genauigkeitskurve für Vorwärts-Einschneiden.

Den Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems legen wir in den Mittelpunkt $O$ von $K$, während $X \parallel \overline{AB}$ sein soll. Sind $\overline{OE} = m$, $\overline{EH} = n$ die Koordinaten des Halbierungspunktes $H$ von $\overline{AB}$, so giebt (4) für den Punkt $P$ $(x, y)$,

$$(5)\quad M^2 = \frac{2\delta^2}{c^2(y-m)^2}\left[\left\{(n+x)^2+(y-m)^2+\frac{c^2}{4}\right\}^2 - c^2(n+x)^2\right]\left[(n+x)^2+(y-m)^2+\frac{c^2}{4}\right].$$

Da $\overline{AB} = c$ konstant ist, erhält man mit

$$(6)\qquad \frac{M}{c \cdot \delta} = \mu$$

die Gleichung der Genauigkeitskurven

$$(7)\quad c^4\mu^2(y-m)^2 = 2\left[\left\{(n+x)^2+(y-m)^2+\frac{c^2}{4}\right\}^2 - c^2(n+x)^2\right]\left[(n+x)^2+(y+m)^2+\frac{c^2}{4}\right],$$

wo $\mu$, für die ganze Schaar die Bedeutung eines Parameters hat.

Die Aufgabe, diejenigen Punkte auf $K$ zu bestimmen, für welche $\mu$ also auch $M$ ein analytisches Maximum oder Minimum erreicht, ist auf die Bestimmung derjenigen Kurven $\mu$ zurückzuführen, welche $K$ berühren. Die Genauigkeitskurven besitzen nach Fig. 4, von $A$ und $B$ abgesehen, weder Doppelpunkte noch Rückkehrpunkte[1]), so dafs die Berührung (erster Ordnung) zwischen $\mu$ und $K$ auch die hinreichende Bedingung für die Lösung enthält. Lediglich diejenigen Stellen auf $K$, wo $M = \infty$ wird, können durch diese Untersuchung nicht erhalten werden, sie ergeben sich dann aber als reelle Schnitte zwischen $K$ und $\overline{AB}$.

---

1) Näheres über den Verlauf derselben findet man in Jordan, Vermessungskunde, Seite 302, auch in dieser Zeitschrift 1871.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$(8) \qquad P = (n + x)^2 + (y - m)^2 + \frac{c^2}{4}, \quad Q = c^2 (n + x)^2,$$

so erhält man aus

$$(c^4 \mu^2 - 6P^2 + 2Q)(y - m)\frac{dy}{dx} = (6P^2 - 2Pc^2 - 2Q)(n + x)$$

zu jedem gegebenen Werte von $\mu$, $\frac{dy}{dx}$ in jedem Punkte.

Die Elimination von $\mu^2$ aus (7) giebt dann

$$\left\{P(P^2 - Q) - (3P^2 - Q)(y - m)^2\right\}\frac{dy}{dx} = (3P^2 - Q - Pc^2)(n + x)(y - m),$$

und wegen $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, dem Kreise $K$ entsprechend, die zweite den Berührungspunkt bestimmende Gleichung

$$\{(3P^2 - Q)(y - m)^2 - P(P^2 - Q)\}x = (3P^2 - Q - Pc^2)(n + x)(y - m)\cdot y.$$

Die Einsetzung von $P$, $Q$ nach (8) liefert schliefslich

$$(9)\begin{cases} A_1 y^4 + (A_2 + B_1 x)y^3 + (A_3 + B_2 x + C_1 x^2)y^2 + (A_4 + B_3 x + C_2 x^2 + D_1 x^3)y \\ \qquad + (B_4 x + C_3 x^2 + D_2 x^3 + E_1 x^4) = 0 \\ \text{und in Verbindung mit} \\ \qquad x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

die acht Lösungen der Aufgabe.

Hierbei ist

$$(10)\begin{cases} A_1 = 12m^2 n \\ A_2 = -(c^2 + 24m^2 + 12n^2)mn - 12mnr^2 \\ A_3 = (-\frac{1}{16}c^4 + 15m^4 + 3n^4 + \frac{3}{2}c^2m^2 - \frac{1}{2}c^2n^2 + 18m^2n^2)n \\ \qquad + (\frac{1}{2}c^2 + 18m^2 + 6n^2)nr^2 + 3nr^4 \\ A_4 = (\frac{1}{16}c^4 - 3m^4 - 3n^4 - \frac{1}{2}c^2m^2 + \frac{1}{2}c^2n^2 - 6m^2n^2)mn \\ \qquad - (\frac{1}{2}c^2 + 6m^2 + 6n^2)mnr^2 - 3mnr^4 \\ B_1 = (2c^2 + 4m^2 - 24n^2)m \\ B_2 = -(\frac{1}{4}c^4 + 12m^4 - 12n^4 + 3c^2m^2 + 2c^2n^2 - 36m^2n^2) - (c^2 - 12n^2)r^2 \\ B_3 = (\frac{1}{16}c^4 + 9m^4 - 15n^4 + \frac{5}{2}c^2m^2 + \frac{3}{2}c^2n^2 - 6m^2n^2)m \\ \qquad + (-\frac{1}{2}c^2 + 6m^2 - 18n^2)mr^2 - 3mr^4 \\ B_4 = (\frac{1}{64}c^6 - 2m^6 + n^6 - \frac{1}{16}c^4n^2 - \frac{3}{4}c^2m^4 - \frac{1}{4}c^2n^4 - 3m^4n^2) \\ \qquad + (\frac{3}{16}c^4 - 3m^4 + 3n^4 + \frac{1}{2}c^2n^2)r^2 + (\frac{3}{4}c^2 + 3n^2)r^4 + r^6 \\ C_1 = (-3c^2 + 12n^2)n \\ C_2 = (2c^2 + 12m^2 - 24n^2)mn - 12mnr^2 \\ C_3 = -(\frac{1}{8}c^4 + 6m^4 - 6n^4 + c^2n^2)n + (c^2 + 12n^2)nr^2 + 6nr^4 \\ D_1 = (c^2 - 12n^2)m \\ D_2 = \left(-\frac{c^4}{4} + 12n^4 - 2c^2n^2\right) - (c^2 - 12n^2)r^2 \\ E_1 = -(2c^2 - 8n^2)n. \end{cases}$$

Jede reelle Wurzel von (9) giebt aus (7) den zugehörigen Parameter $\mu$; hierbei ist lediglich diejenige Wurzel zu bestimmen, für welche $\mu$ den kleinsten Wert erhält. Liegen $A$, $B$ symmetrisch zu $Y$, so wird wegen $n = 0$ in (10) $A = 0$, $C = 0$, $E = 0$. Die Schnitte von $K$ mit $Y(x = 0,\ y = \pm r)$ entsprechen dann zwei Wurzeln von (9).

3.

Die Auflösung von (9), insbesondere die Bestimmung der in Betracht kommenden Wurzel wird wesentlich erleichtert, wenn eine Zeichnung von mehreren Genauigkeitskurven vorliegt. Hierzu hat man verschiedene Wege. Die Berechnung der Koordinaten, bestimmten Werten von $\mu$ entsprechend, wird umständlich, indem für jeden Kurvenpunkt eine Gleichung 6. Grades aufzulösen ist. Man kann auch für angenommene Koordinaten die entsprechenden $\mu$ berechnen und sodann diejenigen Punkte, in welchen $\mu$ anzunehmende, runde Werte erreicht durch Interpolation bestimmen und verbinden, welches Verfahren für den vorliegenden Zweck zu ungenau wäre. Eine Konstruktion der Genauigkeitskurven wurde vom Verfasser[1]) angegeben, welche hier Verwendung finden kann, so daſs sich die Berechnung nur auf wenige Punkte, für welche sich etwa ungünstige Schnitte ergeben, zu erstrecken hätte. Eine derartige in entsprechend gröſserem Maſsstabe durchgeführte Darstellung solcher Genauigkeitskurven werden wir künftig zumeist voraussetzen und als Diagramm — abgekürzt $(D)$ — bezeichnen. Es dient zur Durchführung verschiedener Untersuchungen, welche Genauigkeitsfragen des Rückwärts-Einschneidens betreffen und ist dasselbe natürlich auch für verschiedene Dreiecke verwendbar.

Sind nun $c_1 m_1 n_1 r_1$ dem Kreise $K_1$ entsprechend, durch eine Zeichnung $(Z)$ gegeben, während $c = \overline{AB}$ (Fig. 4) die unveränderliche Entfernung dieser Punkte in $(D)$ vorstellt, so kann die Berechnung mit Hilfe des letzteren durchgeführt werden, wenn der Mittelpunkt 0 eines Kreises $K$ sowie dessen Halbmesser $r$ durch

$$(11) \qquad m = m_1 \frac{c}{c_1}, \quad n = n_1 \frac{c}{c_1}, \quad r = r_1 \frac{c}{c_1}$$

gegen $(D)$ festgelegt wird[2]), indem (11) lediglich die Reduktion des Maſsstabes von $(Z)$ auf den gegebenen von $(D)$ bestimmt.

---

1) Zeitschrift f. Verm. 1895.

2) Hierbei wird zweckmäſsig Pausleinwand benutzt, auf welcher die Punkte $A$, $B$ der Fig. 4, sowie — mit Benutzung von $m$, $n$, $r$ — die Koordinatenachsen und $K$ vorgezeichnet sind; durch Verschieben auf $(D)$, bis sich $A$ und $B$ decken, wird $XY$ zu $(D)$ in die richtige Lage gebracht.

Die Zahl der Berührungsstellen zwischen den Kurven $\mu$ und $K$, den reellen Wurzeln von (9) entsprechend, läßt sich, indem man sich die fehlenden Kurven gezogen denkt, bestimmen, wodurch auch die annähernden Grenzen für die Koordinaten $x$, $y$ jenes Berührungspunktes angegeben werden können, für welchen $\mu$ den kleinsten Wert erreicht, so daſs genügende Näherungswerte für die in Betracht kommende Wurzel erhalten werden. Die Auflösung geschieht bei beliebigem Dreieck besser ohne vorhergehende Elimination der einen Unbekannten, etwa nach dem Newtonschen Verfahren.

Ist $P(x, y)$ bezüglich der Koordinatenachsen von $(D)$ bestimmt, so ergiebt sich $P_1(x_1, y_1)$ für $(Z)$ aus

$$x_1 = \frac{c_1}{c} x, \quad y_1 = \frac{c_1}{c} y.$$

Wir geben für $n = 0$, $m = 0{,}640\,c$ zwei Beispiele, welche später Verwendung finden.

I. $\quad r' = 0{,}940\,c;$ daher $x_{1,2} = 0;\quad y_{1,2} = \pm\,0{,}940\,c.$

Aus (9) folgt wegen (10) mit $\left(\frac{x}{c}\right)^2 = u$,

$$u^3 - 1{,}1382\,u^2 + 0{,}2751\,u - 0{,}0218 = 0.$$

Die reelle positive Wurzel ist

$$u = 0{,}8425, \quad \text{also} \quad x_{3,4} = \pm\,0{,}917\,c, \quad y_{3,4} = 0{,}202\,c,$$

während die betreffenden $\mu$ aus (7) mit

$$\mu_1 = 0{,}934, \quad \mu_2 = 4{,}074, \quad \mu_{3,4} = 3{,}287$$

folgen.

II. $\quad r'' = 0{,}480\,c, \quad x_{1,2} = 0, \quad y_{1,2} = \pm\,0{,}480\,c$

$$u^3 + 0{,}6310\,u^2 + 0{,}0851\,u - 0{,}0149 = 0$$

$$u = 0{,}0963, \quad x_{3,4} = \pm\,0{,}310\,c, \quad y_{3,4} = 0{,}366\,c$$

$$\mu_1 = 1{,}278, \quad \mu_2 = 2{,}332, \quad \mu_{3,4} = 0{,}955.$$

In Fig. 4 sind mit den unten angegebenen kürzeren Bezeichnungen die zu $\mu_{3,4}$ gehörigen Kurven mit den den Kreisen $K'K''$ entsprechenden Berührungspunkten $P'P''$ für beide Fälle, nebst anderen dargestellt. Die Bezeichnung der Kurven ist

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | für $\mu =$ | 0,918 | IV. | für $\mu =$ | 1,278 |
| II. | „ | 0,955 | V. | „ | 2,332 |
| III. | „ | 1,000 | VI. | „ | 3,287. |

4.

Wir wenden nun die im 2. Abschnitt angegebene Lösung für Vorwärts-Einschneiden auf das Rückwärts-Einschneiden aus $LMR$ an. Es sollen also diejenigen Punkte auf einem gegebenen Kreise $K$ um $M$ (Fig. 2) vom Halbmesser $\overline{MP} = r$ bestimmt werden, in welchen $M_r = M$ die gröfsten oder kleinsten Werte erreicht.

Wird zunächst von $(D)$ abgesehen, so sind $c$, $m$, $n$ von $r$ abhängig und hat man wegen (1) mit Rücksicht auf das gewählte Koordinatensystem mit $\overline{MR} = s$,

$$(12)\quad \begin{cases} c = k_1 r^2 = k_1(x^2 + y^2), \quad \text{wo} & k_1 = \dfrac{\sin w_3}{s \cdot \sin w_1} \\ m = k_2 r^2 = k_2(x^2 + y^2) & k_2 = \dfrac{\sin w_2}{s} \\ n = k_3 r^2 = k_3(x^2 + y^2) & k_3 = \dfrac{\sin w_3 - 2 \sin w_1 \cos w_2}{2s \cdot \sin w_1}. \end{cases}$$

Sind nun $LMR$ durch Koordinaten im Zusammenhange mit einer Vermessung gegeben, wodurch auch $k_1 k_2 k_3$ bestimmt sind, so giebt (9) auch die Koordinaten des günstigsten Punktes auf $K$, bezogen auf $M$ als Ursprung und $t$ als Abscissenachse. Für die Auswertung ist lediglich in (10) statt $c$, $m$, $n$ bezw. $k_1 k_2 k_3$ zu setzen. Schliefslich sind die Koordinaten wieder in dem der Vermessung zu Grunde liegenden System zu berechnen.

Diese Aufgabe, wie oben angedeutet, lediglich durch Rechnung zu lösen, bietet keinen Vorteil, da es sich bei der Anwendung doch nur darum handelt, den Punkt in einer Zeichnung (Plan) festzulegen, um sodann die angenäherte Lage desselben in der Natur festzustellen. Wir greifen daher wieder auf das Verfahren des vorigen Abschnittes zurück.

Nach Fig. 5 befinden sich die zu demselben $\mu$ gehörigen Kurven $C_1 C$ bezüglich $M$ in ähnlicher Lage; findet also zwischen den Halbmessern $r_1 r$ zweier Kreise $K_1 K$ die Beziehung (11) statt, so sind auch $P_1 P$ entsprechende Punkte.

Genügt nun für $\overline{A_1 B_1} = c_1$, $c_1$ der Gleichung $c_1 = k_1 r_1^2$, so kann der obere Teil der Fig. 5 als $(Z)$, der untere als $(D)$ angesehen werden. Die Lage des Koordinatenursprungs 0 gegenüber $(D)$ ist dann nach (11) bezw. durch die Winkel $w$ (Fig. 2 u. 3) bestimmt. Zu jedem $r_1$ aus $(Z)$ folgt $r$ für $(D)$ und umgekehrt aus

$$(13)\qquad r \cdot r_1 = \frac{c}{k_1} = \text{const.}$$

Die zusammengehörigen $r$, $r_1$ sind hiernach Punktkoordinaten einer gleichseitigen Hyperbel mit $2\sqrt{\frac{2c}{k_1}}$ als reeller Achse bezüglich ihrer Asymptoten. Im übrigen gilt dasselbe wie im 3. Abschnitt. Zur Verwendung der dort gegebenen Beispiele möge es sich in Fig 6 um

ein gleichschenkeliges Dreieck $LMR$ mit $w_3 = 76^0$ handeln. Sind die Halbmesser $r_1' r_1''$ zweier Kreise $K_1' K_1''$ gegeben durch

$$\text{I.}\quad r_1' = 0{,}864\, s, \qquad \text{II.}\quad r_1'' = 1{,}692\, s$$

so erhält man aus (13) die früheren Annahmen für $r'$ bezw. $r''$. Die in Fig. 4 dargestellten $P' P''$ finden sich hiernach in Fig. 6 entsprechend übertragen als $P_1' P_1''$. Für den ersten Fall bedeuten die Punkte $P_1'$ ein relatives Minimum auf $K_1'$, während für den zweiten $P_1''$ die günstigsten Lagen auf $K_1''$ angeben.

5.

Die Ermittelung der günstigsten Lage für das Rückwärts-Einschneiden, wenn der Punkt lediglich auf einem Kreise um $M$ angenommen werden kann, bietet natürlich für sich keine Anwendung, denn solche Bedingungen kommen nicht vor; allein die vorhergehende Untersuchung ermöglicht die Bestimmung der günstigsten Punktlage.

Indem wir zunächst wieder von $(D)$ absehen, giebt (5) zu jedem Punkte den mittleren Punktfehler für Rückwärts-Einschneiden, wenn dort $c$, $m$, $n$ nach (12) durch $x$, $y$ ausgedrückt werden.

Setzt man

$$\nu = k_1 \frac{M}{\delta} \tag{14}$$

so wird aus (5)

$$\begin{aligned}(y - k_2(x^2+y^2))^2 \nu^2 = 2(x^2+y^2)\big[\{(\tfrac{1}{4}k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)(x^2+y^2) + 2k_3 x - 2k_2 y + 1\}^2 \\ - k_1^2(k_3(x^2+y^2)+x)^2\big]\big[(\tfrac{1}{4}k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)(x^2+y^2) + 2k_3 x - 2k_2 y + 1\big],\end{aligned} \tag{15}$$

wonach zu jedem $P(x, y)$ $\nu$, also auch der Punktfehler $M$ berechnet werden kann. Für $\nu = \text{const.}$ giebt (15) zugleich die Gleichung der Genauigkeitskurven für Rückwärts-Einschneiden.

Soll nun $M$ und damit auch

$$\nu = F(x, y)$$

den kleinsten Wert annehmen, so mufs für diese Lage von $P$ auch (9) erfüllt werden. Ersetzt man nun in (10) $c$, $m$, $n$ durch $k_1 k_2 k_3$, so zerfällt mit Rücksicht auf die zweite der Gleichungen (9), die erste in

$$(x^2 + y^2)^3 = 0$$

und in die Gleichung achten Grades

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{16}$$

Hiernach gehört der Punkt $M$ jener Kurve an, welche durch (16) ausgedrückt ist. Die allgemeine Lösung ist daher in den Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

enthalten.

Da aber für die Auflösung von (17) bereits genügend scharfe Näherungswerte für das absolute Minimum bekannt sein müssen, so empfiehlt es sich auch hier den graphischen Weg einzuschlagen.

Es mögen sich also wieder $c_1$, $m_1$, $n_1$, $r_1$ auf $(Z)$, $c$, $m$, $n$, $r$ auf $(D)$ beziehen; dabei sind $m$, $n$ lediglich abhängig von den Winkeln $w$, also mit Rücksicht auf die in Fig. 2 gewählte Bezeichnung der Dreieckspunkte, abhängig von der Anordnung der Winkelmessung, mithin unabhängig von $r$.

Wegen $M = c_1 \mu \delta$ hat man nach (11), (13), (14)

$$\nu = \mu \cdot \left(\frac{c}{r}\right)^2, \tag{18}$$

wonach, wie gleich gezeigt wird, bei gegebener Anordnung der Winkelmessung, in $(D)$ genähert der Halbmesser jenes Kreises gefunden werden kann, auf welchem der günstigste Punkt, dem absoluten Minimum von $\nu$ entsprechend, gelegen ist. Der auf diesem Kreise liegende nach (9) resp. (10) zu bestimmende Punkt wäre in erster Annäherung der gesuchte und können dessen Koordinaten in $(Z)$ wie früher ermittelt werden.

Vor der Anwendung der Gleichung (9) ist noch zu untersuchen, welche Winkelmessungen den Punkt in seiner günstigsten Lage am schärfsten bestimmen. Der einzuschlagende Vorgang, der als Vorbereitung für die Rechnung dient, ist folgender:

Man wählt einen Dreieckspunkt als $M$, wodurch die beiden zu messenden Winkel bestimmt sind und auch $O$ in $(D)$ festgelegt ist. Soll in (18) $\nu$ den kleinsten Wert annehmen, so gilt dasselbe von $\frac{\mu}{r^2}$, wenn $\mu$ und $r$ so voneinander abhängen, daſs $\mu$ den kleinsten Parameter jener Genauigkeitskurven vorstellt, welche den Kreis vom Halbmesser $r$ berühren, so daſs der entsprechende Berührungspunkt der günstigste Punkt auf diesem Kreise ist. Wegen (7), (9), (10) ist daher $\frac{\mu}{r^2}$ für verschiedene Kreise eine Funktion von $r$. Bei der versuchsweisen Ermittlung des kleinsten Wertes von $\frac{\mu}{r^2}$ ist zu berücksichtigen, daſs für die anzunehmenden $r$ eine untere Grenze gegeben ist. Da nämlich für $\mu = 0{,}9185$ keine reellen Kurven bestehen und daher $\mu = 0{,}9185$, den beiden Punkten $I$ in Fig. 4 entsprechend, den kleinsten Wert von $\mu$ vorstellt, so ist der Halbmesser des gröſseren der beiden durch die Punkte $I$ gehenden Kreise um $O$ als Mittelpunkt diese untere Grenze. Indem man nun in $(D)$ die vorhandenen Kurven, also die dadurch gegebenen $\mu$ benützt, kann man die Halbmesser der dieselben berührenden konzentrischen Kreise um $O$ abmessen und, etwa mit dem Rechenschieber, die Werte $\frac{\mu}{r^2}$ bilden; in einer graphischen

Darstellung ($r$ = Abscissen, $\frac{\mu}{r^2}$ = Ordinaten) kann dann der Halbmesser $r$ für das Minimum von $\frac{\mu}{r^2}$ festgestellt werden.

Wird dasselbe für die beiden anderen Dreieckspunkte durchgeführt, wobei jedesmal die Koordinatenachsen mit Beachtung der Bezeichnung der Winkel $w$ in Fig. 2 gegen ($D$) festzulegen sind, so kann zunächst, ohne weitere Rechnung oder Zeichnung, lediglich mit ($D$) entschieden werden, welche Anordnung der Winkelmessung die günstigste ist, welcher Dreieckspunkt daher bei der Messung als mittlerer gilt; zugleich hat man eine erste Näherung für $r$, dem kleinsten Wert von $\nu$ resp. $M$ entsprechend.

Sind nun $r' > r'' > r'''$ Annahmen, so geben (9) die Koordinaten der entsprechenden günstigsten Punkte, während aus (7) die $\mu$, aus (18) die zugehörigen $\nu$ erhalten werden. Da ferner aus (13) auch die entsprechenden $r_1' < r_1'' < r_1'''$ für ($Z$) folgen, und $\nu$ eine Funktion von $r$ somit auch von $r_1$ ist, so sind für die Kurve $\nu = f(r_1)$ drei Punkte in der Nähe ihrer kleinsten Ordinate bestimmt. Setzt man für $r_1' < r_1 < r_1'''$

$$\nu = e_0 + e_1 r_1 + e_2 r_1^2,$$

so geben nach Fig. 7 die Scheitelkoordinaten einer Parabel mit zur Ordinatenachse $V$ paralleler Achse eine weitere Annäherung der Werte $\nu$ und $r_1$, wonach für $r_1$ die Koordinaten und damit $\nu$ gerechnet werden können, ein Verfahren, welches bei Wiederholung natürlich immer gröſsere Annäherung gewährt. Übrigens giebt die ursprüngliche Untersuchung in ($D$) auch genügende Anhaltspunkte, um unmittelbar (17) anzuwenden.

## 6.

Die Bestimmung von Genauigkeitskurven für Rückwärts-Einschneiden kann wünschenswert werden, um etwa dasjenige Gebiet abzugrenzen, innerhalb welchem der Punktfehler eine gewisse Gröſse nicht überschreitet. Die analogen Methoden wie für das Vorwärts-Einschneiden werden wegen des höheren Grades von (15) schwieriger durchführbar. Hingegen enthält (18) eine einfache Beziehung zwischen $\nu$ und $\mu$. Wegen

$$\mu = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \nu$$

können bei gegebenem Parameter $\nu$, für verschiedene $r$ die zugehörigen $\mu$ berechnet werden; die Schnitte zwischen den Kreisen und den entsprechenden Genauigkeitskurven für Vorwärts-Einschneiden liefern Punkte der gesuchten Kurve. Für die Durchführung wird wieder ($D$) benutzt, indem man die Schnittpunkte dort ermittelt und deren Koordinaten, so wie früher, in ($Z$) überträgt. Dabei ist es wieder

zweckmäfsig, die vorhandenen Kurven zu verwenden, also aus (18) die Verhältnisse $\left(\frac{c}{r}\right)$ für die gegebenen $\mu$ zu bilden und für das Übertragen der Punkte (13), nämlich

$$\left(\frac{r_1}{s}\right) = \left(\frac{c}{r}\right)\frac{\sin w_1}{\sin w_3}$$

zu benutzen.

Im Anschlufs an das Beispiel des dritten und vierten Abschnittes hat man für

$$\mu = 0{,}934, \text{ und } \left(\frac{r}{c}\right) = 0{,}940, \text{ aus (18) } \nu = 1{,}057.$$

Zur Bestimmung dieser Genauigkeitskurve für das Dreieck $LMR$ (Fig. 6) erhält man für die in Fig. 4 vorhandenen Kurven:

| | | |
|---|---|---|
| $\mu = 0{,}934$ | $r = 0{,}940\,c$ | $r_1 = 0{,}864\,s$ |
| $= 0{,}955$ | $= 0{,}950\,c$ | $= 0{,}855\,s$ |
| $= 1{,}000$ | $= 0{,}972\,c$ | $= 0{,}835\,s$ |
| $= 1{,}278$ | $= 1{,}099\,c$ | $= 0{,}738\,s$ |
| $= 2{,}332$ | $= 1{,}485\,c$ | $= 0{,}546\,s$ |
| $= 3{,}287$ | $= 1{,}763\,c$ | $= 0{,}460\,s$ |

wonach die Punkte 1—6 (Fig. 4 u. 6) erhalten wurden. Der Annahme gemäfs berührt die Kurve $\nu$ den Kreis $K_1'$ in 1. Ihr zweiter reeller Schnitt mit der Mittellinie des Dreieckes wurde aus (15) berechnet. Wegen $k_3 = 0$ erhält man mit $s = 1$, $\frac{1}{4}k_1^2 + k_2^2 = 1$, so dafs sich mit $x = 0$, $y$ aus

$$\nu^2 = \frac{2}{(1 - k_2 y)^2}\{y^2 - 2k_2 y + 1\}^3$$

bestimmt. Die beiden reellen Wurzeln sind dann mit $\overline{MR} = s$,

$$y = r_1' = 0{,}864\,s \text{ wie oben, und } y = 0{,}186\,s,$$

die erste dem Punkt 1, die zweite dem Punkt 7 in Fig. 6 entsprechend.

## 7.

Wir untersuchen noch die günstigste Punktlage auf einer durch $M$ (Fig. 2) gehenden Geraden; eine Anwendung würde sich in dem Falle ergeben, wenn einer der Punkte, nämlich $M$, lediglich in der durch diese Gerade gegebenen Richtung gesehen werden kann.

Aus (4) erhält man wegen (12) u. (14), wenn zur Abkürzung (Fig. 3)

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{x}{y} = p,$$

ferner

$$(20)\quad \begin{cases} P_1 = (k_1 + 2k_3)p - 2k_2 \\ P_2 = (\frac{1}{4}k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_1k_3)(1+p^2) \\ P_3 = (-k_1 + 2k_3)p - 2k_2 \\ P_4 = (\frac{1}{4}k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1k_3)(1+p^2) \\ P_5 = k_2(1+p^2) \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$(21)\quad \nu = \frac{1}{(1-P_5y)\cos\varepsilon}\sqrt{(1+P_1y+P_2y^2)(1+P_3y+P_4y^2)[2+(P_1+P_3)y+(P_2+P_4)y^2]}.$$

Hiernach hat $\nu$ in $M$ wegen $y = 0$ für jede Richtung $\varepsilon$ einen bestimmten Wert[1])

$$(22)\quad \nu_0 = \frac{\sqrt{2}}{\cos\varepsilon}.$$

Die Bedingung $\frac{d\nu}{dy} = 0$ giebt bei Wiedereinführung der Gröſsen (20) die Gleichung 6. Grades

$$(23)\quad \sum C_i y^i = 0. \qquad (i = 0 \ldots 6)$$

Dabei ist

$$(24)\quad \begin{cases} C_0 = 8k_2 - 12k_3p - 4k_2p^2 \\ C_1 = -(3k_1^2+48k_2^2+12k_3^2)+84k_2k_3p+(k_1^2-24k_2^2-60k_3^2)p^2-12k_2k_3p^3 \\ C_2 = (18k_1^2 + 120k_2^2 + 72k_3^2)k_2 - (6k_1^2 + 216k_2^2 + 72k_3^2)k_3p + \\ \quad + \quad (6k_1^2 + 72k_2^2 + 216k_3^2)k_2p^2 + (6k_1^2 - 72k_2^2 - 120k_3^2)k_3p^3 \\ C_3 = [(-\frac{3}{2}k_1^4 - 160k_2^4 - 24k_3^4 - 42k_1^2k_2^2 - 4k_1^2k_3^2 - 168k_2^2k_3^2) + \\ \quad + \quad (18k_1^2 + 264k_2^2 + 216k_3^2)k_2k_3p](1-p^4) + [(-k_1^4 - 208k_2^4 - \\ \quad - \quad 144k_3^4 - 48k_1^2k_2^2 + 8k_1^2k_3^2 - 384k_2^2k_3^2) + \\ \quad + \quad (16k_1^2 + 288k_2^2 + 256k_3^2)k_2k_3p](1+p^2)p^2 \\ C_4 = (\frac{9}{2}k_1^4 + 120k_2^4 + 72k_3^4 + 48k_1^2k_2^2 + 12k_1^2k_3^2 + 192k_2^2k_3^2 \\ \quad k_2(1 - p^4 - 2p^6) + (\frac{5}{4}k_1^4 - 156k_2^4 - 60k_3^4 - 18k_1^2k_2^2 + 10k_1^2k_3^2 - \\ \quad - 216k_2^2k_3^2)(1 + 2p^2 + p^4)k_3p + (\frac{35}{4}k_1^4 + 252k_2^4 + 204k_3^4 + \\ \quad + 98k_1^2k_2^2 + 18k_1^2k_3^2 + 456\,k_2^2k_3^2)k_2p^2(1 + p^2 + p^4) \\ C_5 = [(-\frac{3}{16}k_1^6 - 48k_2^6 - 12k_3^6 - \frac{9}{2}k_1^4k_2^2 + \frac{3}{4}k_1^4k_3^2 - 108k_2^4k_3^2 \\ \quad - 27k_1^2k_2^4 + 3k_1^2k_3^4 - 72k_2^2k_3^4 - 12k_1^2k_2^2k_3^2) + \\ \quad + (-\frac{3}{4}k_1^4 + 36k_2^4 + 36k_3^4 + 6k_1^2k_2^2 - 6k_1^2k_3^2 + 72k_2^2k_3^2)k_2k_3p](1+p^2)^3 \\ C_6 = (\frac{1}{8}k_1^6 + 8k_2^6 + 8k_3^6 + \frac{3}{2}k_1^4k_2^2 - \frac{1}{2}k_1^4k_3^2 + 24k_2^4k_3^2 + 6k_1^2k_2^4 - \\ \quad - 2k_1^2k_3^4 + 24k_2^2k_3^4 + 4k_1^2k_2^2k_3^2)k_2(1+p^2)^4. \end{cases}$$

---

1) Folglich geht auch bei der am Schlusse des 5. Abschnittes benützten Darstellung $\nu = f(r_1)$ für $r_1 = 0$, $\nu$ in $\nu_0$ über. Dabei ist der zugehörige Winkel $\varepsilon$

Da jede Gerade durch $M$ den dem Dreiecke umschriebenen Kreis noch einmal schneidet und für diesen Schnitt $v = \infty$ wird, andererseits dem unendlich fernen Punkt der Geraden naturgemäfs ein unendlich grofser Fehler entspricht, so müssen im allgemeinen wenigstens zwei Wurzeln von (23) reell sein, welchen alsdann kleinste Werte von $v$ entsprechen.

Wird in (24) $p$ nach (19) durch die Koordinaten ausgedrückt, so giebt (23) die Gleichung 8. Grades

$$\psi(x, y) = 0, \tag{25}$$

welcher in Verbindung mit (16) abermals die Koordinaten des günstigsten Punktes für das Rückwärtseinschneiden aus den drei gegebenen — dabei $M$ als den mittleren vorausgesetzt — genügen müssen.

Die Bedingung $C_0 = 0$ liefert wegen (12)

$$p^2 + \frac{3 \sin(w_2 - w_1)}{2 \cdot \sin w_1 \cdot \sin w_2} p - 2 = 0, \tag{26}$$

welcher also zwei reelle Wurzeln entsprechen.

Die durch (26) bestimmten beiden Geraden durch $M$ sind, wie man leicht findet, die Tangenten für den Doppelpunkt $M$ der durch (25) bestimmten Kurve. Für diese beiden Richtungen erreicht daher der Punktfehler in $M$ selbst den kleinsten Wert.

Für jedes gleichschenkelige Dreieck, bei welchem die Spitze zum mittleren Punkt gewählt wird, verschwinden wegen $k_3 = 0$ in (24) die ungeraden Potenzen von $p$, was schon die Symmetrie der Kurve (25) bezüglich der Ordinatenachse bedingt. Wegen $w_1 = w_2$ erhält man in diesem Falle aus (26) $p = \sqrt{2}$ oder wegen (19) $\varepsilon = 54^0 44' \cdots$ also unabhängig von den übrigen Bestimmungsstücken.

## 8.

Wir geben noch die Anwendung für das gleichseitige Dreieck. Mit $s = 1$ gehen die Ausdrücke (24) über in

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 6{,}9282 - 3{,}4641 p^2 \\
C_1 &= -39{,}0000 - 17{,}0000 p^2 \\
C_2 &= 93{,}5310 + 51{,}9615 p^2 \\
C_3 &= -123{,}0000 - 154{,}0000 p^2 - 31{,}0000 p^4 \\
C_4 &= 93{,}5310 + 193{,}9904 p^2 + 100{,}4595 p^4 + 6{,}9282 p^6 \\
C_5 &= -39{,}0000 - 117{,}0000 p^2 - 117{,}0000 p^4 - 39{,}0000 p^6 \\
C_6 &= 6{,}9282 + 27{,}7128 p^2 + 41{,}5692 p^4 + 27{,}7128 p^6 + 6{,}9282 p^8.
\end{aligned}
$$

---

mit Rücksicht auf die Bedeutung von (16) leicht zu ermitteln. Durch (16) wird nämlich auch derjenige von $M$ ausgehende Kurvenzweig bestimmt, welcher die günstigste Punktlage enthält. Die Tangente in $M$ für diesen Zweig ergiebt sich mit $x = 0$, $y = 0$, aus (9), (10) u. (12) mit $\frac{dy}{dx} = -\frac{B_4}{A_4} = \operatorname{cotg} \varepsilon$, wodurch nach (22) $\nu_0$ für diese Richtung bestimmt ist.

| № | $y$ | $x$ ± | $\nu$ | $\varepsilon$ | $\nu_0$ | $\nu$ | $x$ ± | $y$ | № |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + 0,6671 | 0 | 0,516 | 0 | $\sqrt{2}$ | 2,489 | 0 | + 1,4990 | I |
| 2 | + 0,4578 | 0,0807 | 0,656 | 10° | 1,436 | 2,615 | 0,2866 | + 1,6253 | II |
| 3 | + 0,3110 | 0,1132 | 0,916 | 20° | 1,505 | 2,966 | 0,6097 | + 1,6751 | III |
| 4 | + 0,2057 | 0,1188 | 1,237 | 30° | 1,633 | 3,385 | 0,9279 | + 1,6071 | IV |
| 5 | + 0,1156 | 0,0970 | 1,649 | 40° | 1,846 | 3,717 | 1,1887 | + 1,4166 | V |
| 6 | + 0,0741 | 0,0741 | 1,896 | 45° | 2 | 3,812 | 1,2809 | + 1,2809 | VI |
| 7 | 0 | 0 | 2,449 | 54° 44′ | 2,449 | 3,834 | 1,3619 | + 0,9630 | VII |
| 8 | — 0,0347 | 0,0601 | 2,770 | 60° | 2,828 | 3,791 | 1,3486 | + 0,7786 | VIII |
| 9 | — 0,0820 | 0,2252 | 3,320 | 70° | 4,134 | 3,711 | 1,2249 | + 0,4458 | IX |
| 10 | — 0,0823 | 0,4667 | 3,638 | 80° | 8,144 | 3,715 | 1,0111 | + 0,1783 | X |
| 11 | 0 | 0,7518 | 3,731 | 90° | $\infty$ | 3,731 | 0,7518 | 0 | XI |

Für die in der obigen Zusammenstellung angegebenen Richtungen $\varepsilon$ wurden die beiden reellen Wurzeln von (23) bestimmt. Nach der auf Fig. 8 sich beziehenden Nummerierung entspricht lediglich der zu $Y$ symmetrische Kurventeil 1, 2 ⋯ 11 den kleinsten Werten von $\nu$. Die Berechnung von $\nu$ aus $x, y$ kann aus (15) oder (21) erfolgen. In dem Beispiele wurde wegen $k_1 = 1$ und (14) unmittelbar (5) verwendet, nachdem $c, m$ nach (12) berechnet wurden. Für $p = \infty$, erhält man wegen $y = 0$, $x$ aus

$$2x^6 + 2x^4 - 1 = 0 \quad \text{mit} \quad x = \pm 0{,}7518.$$

Wie man der Tabelle entnimmt, findet sich für die vorausgesetzte Anordnung der Winkelmessung die günstigste Punktlage auf $Y$ zwischen dem Schwerpunkte des Dreieckes und der Seite $\overline{LR}$.

Für den Schwerpunkt, für welchen $x = 0$, $y = 0{,}5773$ ist, erhält man nach unserer Berechnung $\nu = 0{,}5443$. Man kann das letztere Ergebnis noch in anderer Weise erhalten.

Unter der Voraussetzung, daſs in diesem Dreiecke alle drei Winkel gemessen und auf den Horizont ausgeglichen sind, ergiebt sich nach einem ganz anderen Rechnungsvorgange für den Schwerpunkt der mittlere Punktfehler $M_1$ aus[1])

$$\nu_1 = \frac{M_1}{\delta} = 0{,}385.$$

Bezeichnen nach dem unteren Citat $M^{\alpha,\beta}$, $M^{\alpha,\gamma}$, $M^{\beta,\gamma}$ die Punktfehler bei zwei Winkelmessungen, so ist

$$M_1^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(M^{\alpha\beta})^2 + (M^{\alpha\gamma})^2 + (M^{\beta\gamma})^2}{3}.$$

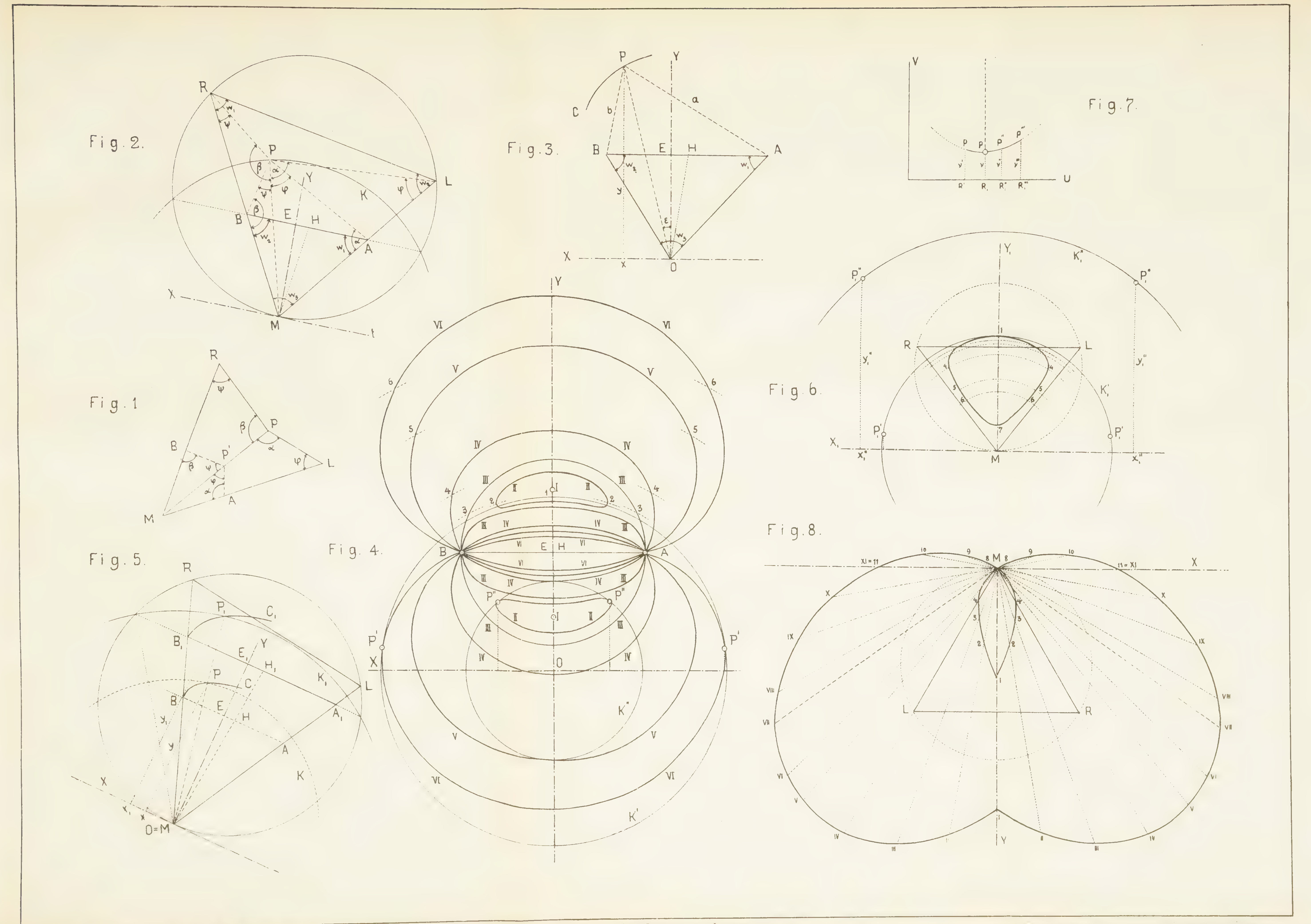
1) Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, I. Band, 1888, Seite 337.

Fig. 2.

Fig. 1

Fig. 5.

Fig. 4.


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 8.





Da aber für die Dreiecksmitte des gleichseitigen Dreieckes

$$M^{\alpha\beta} = M^{\alpha\gamma} = M^{\beta\gamma} = M_1\sqrt{2}$$

ist, so hat man bei unserer Bezeichnung, wonach

$$\frac{M^{(\alpha\beta)}}{\delta} = \frac{M}{\delta} = \nu \quad \text{ist,}$$

$$\nu = \nu_1\sqrt{2} = 0{,}5443,$$

übereinstimmend mit der früheren Angabe.

Graz, im November 1902.

---

# Über den Pohlkeschen Satz.

Von FR. SCHILLING in Göttingen.

Mit einer Tafel.

I. Der Pohlkesche Fundamentalsatz der allgemeinen Axonometrie lautet bekanntlich:

(1.) *Drei von einem Punkte O ausgehende Strecken* $OX_0$, $OY_0$, $OZ_0$ *in einer Ebene, die der einzigen notwendigen Einschränkung unterliegen, daſs höchstens drei der Punkte* $O$, $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ *in einer Geraden liegen, bilden stets die Parallelprojektion von vier im allgemeinen Falle verschiedenen, aus je drei Strecken konstanter Länge* $OX_i$, $OY_i$, $OZ_i$ (*für* $i = 1, 2, 3, 4$) *bestehenden rechtwinkligen Achsenkreuzen, die zu je zweien gleichsinnig sind*, (d. h. durch Drehung um $O$ zur Deckung gebracht werden können). *Stets dann und nur dann, wenn die Parallelprojektion sich als eine orthogonale erweist, sind je die beiden gleichsinnigen Achsenkreuze identisch.*[1])

Daſs die hinzugefügte Einschränkung notwendig ist, ergiebt sich unmittelbar von selbst, daſs sie in der That auch hinreichend ist, muſs der Beweis des Satzes zeigen.[2]) Ihr entsprechend wollen wir im folgenden annehmen, was ja nur die Bezeichnung betrifft, daſs die Strecken $OY_0$ und $OZ_0$ nicht in derselben Geraden liegen.

Zahlreich sind die bisher über diesen Satz veröffentlichten Arbeiten, die sich teils mit seinem Beweise, teils auch mit seiner Verallgemeine-

---

1) Nach der Mitteilung von Herrn H. A. Schwarz (Crelles Journal Band 63, 1864, pag. 309—314, Ges. Abhandlungen Bd. II, pag. 1—7) wurde dieser Satz zuerst von Pohlke um das Jahr 1853 aufgestellt und bewiesen und 1860 in der ersten Auflage seiner darstellenden Geometrie veröffentlicht.

2) Es können also höchstens zwei der gegebenen Strecken in derselben Geraden liegen, oder es kann höchstens eine derselben gleich 0 sein.

rung beschäftigen.[1]) Wir schliefsen uns dem Gedankengange in der unten genannten zweiten Arbeit des Herrn F. Schur an, indem wir die dort entwickelte *Konstruktion* der wahren Länge der einander gleichen Strecken $OX_i = OY_i = OZ_i$ adoptieren. Was indes den *Beweis* des Satzes selbst betrifft, so ist es uns gelungen, denselben einfacher zu gestalten, so dafs er in dieser neuen Form sich insbesondere für die Vorlesung geeigneter als jeder andere Beweis erweisen dürfte (vgl. die Schlufsbemerkung).

II. Bei einer beliebigen Parallelprojektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes auf eine durch den Koordinatenanfangspunkt $O$ gehende Zeichenebene gilt für die um $O$ mit $OX = OY = OZ$ beschriebene Kugel der Satz:

(2.) *Jede der drei Ellipsen $(xy)_0$, $(yz)_0$, $(zx)_0$, welche die Projektionen der drei gröfsten Kreise in den Koordinatenebenen darstellen*

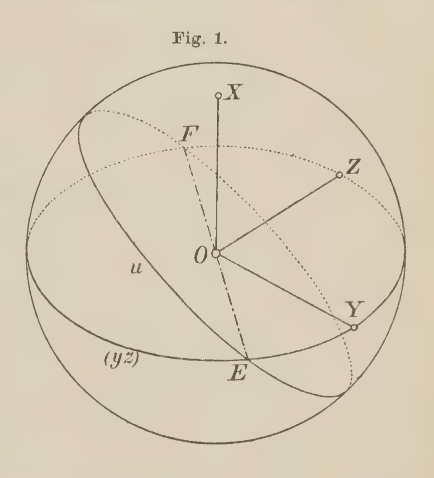
---

1) Wir geben hier eine Zusammenstellung dieser Litteratur: v. Deschwanden, Anwendung schiefer Parallelprojektionen zu axonometrischen Zeichnungen, Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich, 6. Jahrgang (1861), pag. 254 bis 284. — Kinkelin, Die schiefe axonometrische Projektion, Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich, 6. Jahrgang (1861), pag. 358—367. — H. A. Schwarz, Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie, Crelle Bd. 63 (1864), pag. 309—314, Ges. Abhandl. II, pag. 1—7. — Reye, Beweis von Pohlkes Fundamentalsatz der Axonometrie, Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich, 11. Jahrgang (1866), pag. 350—358, wieder abgedruckt Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 12 (1867), pag. 433—437. (Erweiterung des Satzes auf schiefwinklige Koordinaten.) — Pelz, Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke, Wien. Ber. Bd. 76 (1877), pag. 123—138, sowie: Herr Küpper und der Pohlkesche Beweis des Satzes von Pohlke (Selbstverlag 1889). — Peschka, Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie, Wien. Ber. Bd. 78 (1879), pag. 1043—1055. — Drasch, Neuer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes, Zeitschrift für das Realschulwesen VIII (1883), pag. 516—519. — Mandl, Der Pohlkesche Lehrsatz der Axonometrie und eine Verallgemeinerung desselben, Wien. Ber. Bd. 94 (1886), pag. 60—65. — Ruth, Über einen neuen Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie, Wien. Ber. Bd. 100 (1891), pag. 1088—1092. — Schur, Über den Pohlkeschen Satz, Math. Ann. 25 (1885), pag. 596—597 (projektive Verallgemeinerung des Satzes), sowie: Über den Pohlkeschen Satz, Crelle Bd. 117 (1896), pag. 24—28. — Küpper, Der Satz von Pohlke, Math. Ann. Bd. 33 (1889), pag. 474—475. — Beck, Über die Fundamentalaufgabe der Axonometrie, Crelle Bd. 106 (1890), pag. 121—124. — Von Lehrbüchern seien aufser dem Werke von Pohlke selbst noch genannt: Fiedler, Darstellende Geometrie Bd. I, Leipzig (1883), pag. 334. — Wiener, Darstellende Geometrie Bd. I, Leipzig (1884) pag. 448. — Rohn und Papperitz, Darstellende Geometrie Bd. I, Leipzig (1896), pag. 366. — Schoute, Mehrdimensionale Geometrie Bd. I, Leipzig (1902), pag. 122 und 255 (Verallgemeineruug des Satzes auf mehrdimensionale Räume).

*und bez. durch die konjugierten Halbmesser* $OX_0$, $OY_0$; $OY_0$, $OZ_0$; $OZ_0$, $OX_0$ *bestimmt sind, wo* $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ *die Projektionen der Punkte* $X$, $Y$, $Z$ *sind, berührt die (aufserhalb der genannten Ellipsen verlaufende) Umrifsellipse* $u_0$ *der Kugel, deren Durchmesser der kleinen Achse von* $u_0$ *gleich ist, in den Endpunkten eines beiden gemeinsamen Durchmessers; letzterer ist überdies für beide Kurven gleichzeitig zu der entsprechenden dritten Achsenrichtung in der Zeichenebene konjugiert.*

Die Richtung $OX_0$ zum Beispiel ist gleichzeitig für die Ellipsen $(yz)_0$ und $u_0$ ihrem Berührungsdurchmesser $E_0F_0$ konjugiert, da im Raume (Figur 1) der entsprechende gemeinsame Durchmesser $EF$ des gröfsten Kreises $(yz)$ in der $yz$-Ebene und des gröfsten Kreises $u$, aus dem die Ellipse $u_0$ hervorgeht, auf den Tangentialebenen seiner Endpunkte senkrecht steht und folglich die projizierende Ebene der Achse $OX$ zu diesen Tangentialebenen parallel ist.

Fig. 1.




Bekanntlich werden die beiden Fälle der Axonometrie besonders bevorzugt, die man als *orthogonale Axonometrie* und als *Kavalierperspektive* zu bezeichnen pflegt. Im ersten Falle sind, wie schon der Name sagt, die Projektionsstrahlen senkrecht zur Zeichenebene, im zweiten ist die Zeichenebene mit einer der Koordinatenebenen identisch, etwa mit der $(yz)$-Ebene, wie wir im folgenden annehmen wollen. Dem entsprechen folgende Thatsachen, die wir mit dem für unsere spätere Verwendung bequemen Bezeichnungen aussprechen, indem wir statt $O, X_0, Y_0, Z_0$ u. s. w. bez. $O''', X''', Y''', Z'''$ und $O^*, X^*, Y^*, Z^*$ sagen:

(3.) *Bei der orthogonalen Axonometrie ist der Umrifs* $u'''$ *der um den Koordinatenanfangspunkt* $O'''$ *mit* $O'''X''' = O'''Y''' = O'''Z'''$ *beschriebenen Kugel ein Kreis mit gleichem Radius; dieser Kreis berührt die Ellipsen* $(xy)'''$, $(yz)'''$, $(zx)'''$ *in den Endpunkten ihrer grofsen Achsen, während die Richtung der kleinen Achse jeder Ellipse mit der betreffenden dritten Koordinatenachse in der Zeichenebene zusammenfällt* (vgl. Fig. 2 sowie den Teil rechts oben auf der Tafelfigur).

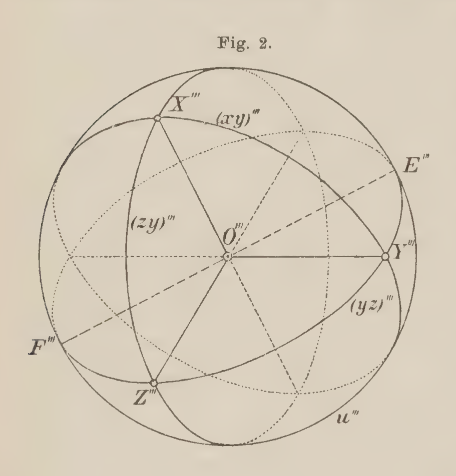
(4.) *Bei der Kavalierperspektive stellt sich der in der* $yz$*-Ebene gelegene gröfste Kreis* $(yz)$ *unserer Kugel unverändert als Kreis* $(yz)^*$ *dar, so dafs die kleine Achse der Umrifsellipse* $u^*$ *gleich seinem Durch-*

*messer ist, während der Punkt $X^*$ überdies der eine Brennpunkt der Umrifsellipse $u^*$ ist* (vgl. den Teil rechts unten auf der Tafelfigur).

III. Unser Beweis des Pohlkeschen Satzes gipfelt nun im folgenden als ein spezieller Fall zu betrachtenden Hülfssatze (vgl. den zweiten Teil des Satzes 1 und den Satz 3), bei dessen Fassung wir wieder sogleich die später für uns zweckmäfsige Buchstabenbezeichnung einführen:

(5.) *Sind drei solche Strecken $O'''X'''$, $O'''Y'''$, $O'''Z'''$ einer Ebene gegeben, dafs die aus je zweien derselben als konjugierten Halbmessern zu konstruierenden Ellipsen $(xy)'''$, $(yz)'''$, $(zx)'''$ gleich lange grofse Achsen besitzen* (und folglich in deren Endpunkten von einem konzentrischen Kreise $u'''$ gemeinsam berührt werden) *und für jede dieser Ellipsen die betreffende dritte Strecke in die Richtung ihrer kleinen Achse fällt*[1]), *so bilden die drei Strecken stets die orthogonale Projektion von zwei und nur zwei in Bezug auf die Zeichenebene symmetrisch gelegenen, aus je drei gleichen Strecken $O'''Y_i$, $O'''X_i$, $O'''Z_i$ (für $i = 1, 2$) bestehenden Achsenkreuzen* (Figur 2).[2])

Fig. 2.




Zum Beweis des Satzes dürfen wir annehmen, dafs nicht gerade die Strecken $O'''Y'''$ und $O'''Z'''$ in dieselbe Gerade fallen (vgl. die Anm. 1). Die Endpunkte der grofsen Achse der Ellipse $(yz)'''$ seien $E'''$ und $F'''$. Es möge zunächst keiner von ihnen mit einem der Punkte $Y'''$ und $Z'''$ zusammenfallen, d. h. der allgemeine Fall der Figur 2 vorliegen. Wir denken über $u'''$ als gröfsten Kreis die Kugel konstruiert. Die Ellipse $(yz)'''$ ist dann die orthogonale Projektion zweier symmetrisch zur Zeichenebene gelegenen gröfsten Kugelkreise $(yz)_1$ und $(yz)_2$, deren Ebenen durch $E'''F'''$ gehen. Auf dem einen Kreise mögen die Punkte $Y_1$, $Z_1$, auf dem anderen die Punkte $Y_2$, $Z_2$ liegen, deren orthogonale Projektionen $Y'''$, $Z'''$ sind. Dann ist folglich $O'''Y_1 \perp O'''Z_1$ und

1) Dafs die grofsen Achsen der drei Ellipsen einander gleich sind, würde allein nicht genügen (vgl. die Anmerkung 1 der Seite 466). Wohl aber ist in den genannten Voraussetzungen von selbst enthalten, dafs höchstens drei der Punkte $O'''$, $X'''$, $Y'''$, $Z'''$ in einer Geraden liegen dürfen.

2) In ihr ist der Übersichtlichkeit zu Liebe je die eine Hälfte der Ellipsen der Bevorzugung des einen Achsenkreuzes entsprechend punktiert gezeichnet. Das Analoge ist später auch dreimal in der Figur der Tafel geschehen.

$O''' Y_2 \perp O''' Z_2$, da $O''' Y_1$, $O''' Z_1$ und $O''' Y_2$, $O''' Z_2$ konjugierte Halbmesser der Kreise sind. Die Bezeichnung der dem Punkte $X'''$ analog entsprechenden Kugelpunkte $X_1$ und $X_2$ sei ferner so gewählt, dafs $O''' X_1 \perp O''' Y_1$ und folglich $O''' X_2 \perp O''' Y_2$ ist. Da nun, wie unmittelber zu erkennen, die Radien $O''' X_1$ und $O''' X_2$ beide auch senkrecht auf $E''' F'''$ stehen, so steht $O''' X_1$ überhaupt auf der Ebene des Kreises $(yz)_1$ und $O''' X_2$ auf der des Kreises $(yz)_2$ senkrecht, d. h. es gilt auch $O''' X_1 \perp O''' Z_1$ und $O''' X_2 \perp O''' Z_2$. Die beiden gleichschenklig-rechtwinkligen Achsenkreuze, deren orthogonale Projektionen die Strecken $O''' X'''$, $O''' Y'''$, $O''' Z'''$ sind, werden daher durch die Strecken $O''' X_i = O''' Y_i = O''' Z_i$ (für $i = 1, 2$) gebildet und unser Beweis zeigt auch, dafs dies die einzigen Achsenkreuze der verlangten Eigenschaft sind. Noch einfacher ist der Beweis in dem bisher ausgeschlossenen Falle zu führen, dafs einer der Punkte $E'''$, $F'''$ mit einem der Punkte $Y'''$, $Z'''$ zusammenfällt, etwa $E'''$ mit $Y'''$, so dafs dann $O'''$, $Z'''$ und $X'''$ in einer Geraden liegen, was wir nicht weiter ausführen wollen.

IV. Wir schreiten nun zum Beweise des allgemeinen Pohlkeschen Satzes (1.). Gegeben seien die Strecken $OX_0$, $OY_0$, $OZ_0$ mit der schon gemachten Annahme, dafs $OY_0$ und $OZ_0$ nicht in derselben Geraden liegen (Figur der Tafel). Sollen die drei Strecken die Projektion irgend eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit den gleichen Schenkeln $OX_i = OY_i = OZ_i$ sein, so mufs für die um $O$ durch $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ beschriebene Kugel der Satz (2.) gelten. Wir werden daher zunächst zu der folgenden Hülfsaufgabe geführt, welcher die durch die konjugierten Halbmesser $OX_0$, $OY_0$; $OY_0$, $OZ_0$; $OZ_0$, $OX_0$ bestimmten Ellipsen $(xy)_0$, $(yz)_0$, $(zx)_0$ zu Grunde liegen:

(6.) *Eine konzentrische Ellipse $u_0$ zu bestimmen, welche jede der Ellipsen $(xy)_0$, $(yz)_0$, $(zx)_0$ äufserlich*[1]) *in den Endpunkten eines solchen gemeinsamen Durchmessers berührt, dafs dieser für beide Kurven gleichzeitig zu der durch die entsprechende dritte Strecke bestimmten Richtung konjugiert ist.*

---

1) Dieser Zusatz „äufserlich“ ist notwendig; denn es giebt stets auch eine zweite konzentrische Ellipse, welche ebenfalls jede der Ellipsen $(xy)_0$, $(yz)_0$, $(zx)_0$ in der im Satz (6.) verlangten Weise berührt, jedoch innerhalb derselben liegt. Überdies giebt es im allgemeinen noch 2 weitere reelle konzentrische Ellipsen, welche jede der gegebenen Ellipsen $(xy)_0$, $(yz)_0$, $(zx)_0$ doppelt berühren, ohne dafs jeder Berührungsdurchmesser zu der durch die dritte Strecke bestimmten Richtung konjugiert ist. Doch auch diese Ellipsen gehen uns hier nichts weiter an, so dafs wir nicht näher von ihnen sprechen wollen.

Es giebt eine grofse Zahl verschiedener Lösungen dieser Aufgabe[1]), die wesentlich alle aus denselben Überlegungen entspringen. Wir schliefsen uns, wie wir bereits sagten, der Lösung des Herrn F. Schur an, weil diese sich unmittelbar auf den Satz (4) der Kavalierperspektive stützt.

Wir wählen eine zur Verbindungslinie $Y_0 Z_0$ parallele Gerade, welche $OY_0$ und $OZ_0$ in den Punkten $P$ und $Q$ schneiden möge, als Achse einer perspektiven Affinität[2]) und ordnen dem Punkte $O$ den Halbierungspunkt $O^*$ des einen über $PQ$ zu errichtenden Halbkreises zu (Figur der Tafel). Diese hierdurch bestimmte Affinität führt die drei Strecken $OX_0$, $OY_0$, $OZ_0$ der Art in drei neue Strecken $O^*X^*$, $O^*Y^*$, $O^*Z^*$ über, dafs $O^*Y^* \perp$ und $= O^*Z^*$ ist, die Ellipsen $(xy)_0$, $(yz)_0$, $(zx)_0$ aber in die neuen Ellipsen $(xy)^*$, $(yz)^*$, $(zx)^*$, von denen dann $(yz)^*$ ein Kreis ist. Die zu der gesuchten Ellipse $u_0$ affine Ellipse $u^*$ ist nun auf Grund des Satzes (4.) eindeutig bestimmt und leicht zu konstruieren, wobei wir uns eine mit $O^*Y^* = O^*Z^*$ um $O^*$ beschriebene Hülfskugel hinzudenken. Es sei die zu $O^*X^*$ senkrechte Strecke $E^*F^*$ der dem Kreise $(yz)^*$ und der Ellipse $u^*$ gemeinsame Durchmesser, zugleich also die kleine Achse von $u^*$, und $G^*H^*$ die mit Hülfe des Brennpunktes $X^*$ gefundene grofse Achse von $u^*$.

Diese Achsen $E^*F^*$ und $G^*H^*$ liefern sodann die zu ihnen affinen konjugierten Durchmesser $E_0F_0$ und $G_0H_0$ der Ellipse $u_0$, von denen $E_0F_0$ entsprechend der gemeinsame Durchmesser der Ellipsen $(yz)_0$ und $u_0$ und für beide gleichzeitig zur Richtung $OX_0$ konjugiert ist. Aus $E_0F_0$ und $G_0H_0$ lassen sich in bekannter Weise die Achsen $AB$ und $C_0D_0$ von $u_0$ konstruieren. Ausdrücklich hervorheben wollen wir, dafs unsere Hülfsaufgabe (6) in der That stets und nur diese eine Lösung zuläfst.

V. Wir wenden nun weiter zur Darstellung der räumlichen Verhältnisse ein solches Zweitafelsystem an, das die Zeichenebene als erste Tafel benutzt, während die trennende Achse $x_{1,2}$ beider Tafeln zu $C_0D_0$

---

1) Eine Zusammenstellung solcher findet sich z. B. Wiener, Darstellende Geometrie I, pag. 131 ff., Leipzig (1884), sowie Rohn und Papperitz, Darstellende Goometrie II, pag. 208, Nr. 691, Leipzig (1896). Vgl. auch Pelz, Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Kontouren der Flächen 2. Grades, Wien. Ber. Bd. 75 (1877), pag. 175, sowie: Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke, Wien. Ber. Bd. 76 (1877), pag. 136 und: Zur klinographischen Darstellung der Rotationsflächen, Ber. der böhmischen Ges., Nr. VII (1895), pag. 1—15, insbesondere pag. 12—15.

2) Eine Parallele statt der Geraden $Y_0 Z_0$ selbst ist als Affinitätsachse gewählt, um dadurch zu erreichen, dafs die beiden zu einander affinen Figuren sich nicht überdecken.

parallel gewählt sei. Wir denken um $O$ die Kugel mit dem Radius $OA$ beschrieben, welche sich in den beiden Tafeln durch die Kreise $k_1'$ und $k_2''$ mit gleichem Radius um $O$ und $O''$ darstellt.[1]) An diese Kugel legen wir von $C_0$ aus parallel zur zweiten Tafel die beiden Tangenten $C_0C$ und $C_0\overline{C}$ mit den in der Figur der Tafel in beiden Projektionen eingezeichneten Berührungspunkten $C$ und $\overline{C}$. Die Ellipse $u_0$ läſst sich dann stets als der Umriſs der Kugel in der ersten Tafel bei jeder der beiden schiefen Parallelprojektionen auffassen, deren Projektionsrichtung durch die eine oder andere dieser Tangenten gegeben ist. Wir bevorzugen in der Folge zunächst allein die Projektionsrichtung von $C_0C$.

Die in dieser Richtung von allen Punkten der Ellipse $u_0$ ausgehenden Projektionsstrahlen berühren die Kugel längs eines gröſsten Kreises $u$, der zugleich als *orthogonale* Projektion der Ellipse $u_0$ auf seine (zur zweiten Tafel senkrechte) Ebene auftritt. Der Kreis ist in der Figur in seiner zweiten Projektion $u''$ durch die Strecke $C''D''$ und seine Ebene durch ihre Spuren $e_1$, $e_2$ dargestellt. Diese Ebene sei als dritte Tafel aufgefaſst und in die zweite Tafel um $e_2 = x_{2,3}$ zunächst mit dem in ihr liegenden Kreise $u$ und seinem Mittelpunkt $O$ umgelegt, die nach $u'''$ und $O'''$ fallen, wobei $O''O''' = O''O$ ist.

Aber auch die Punkte $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ und die Ellipsen $(xy)_0$, $(yz)_0$, $(zx)_0$ seien jetzt ebenfalls in der Richtung $C_0C$ (d. h. orthogonal) auf die Ebene $(e_1, e_2)$ projiziert und ihre Projektionen in der Umlegung durch die Punkte $X'''$, $Y'''$, $Z'''$ und die Ellipsen $(xy)'''$, $(yz)'''$, $(zx)'''$ dargestellt, wobei z. B. $Z'''$ von der $x_{2,3}$-Achse gerade so weit entfernt ist, wie der Punkt $Z_0$ von der $x_{1,2}$-Achse. Da die in der Hülfsaufgabe (6.) genannten Beziehungen der Ellipsen $(xy)_0$, $(yz)_0$, $(zx)_0$ und der Ellipse $u_0$ sich hierbei unverändert auf die Ellipsen $(xy)'''$, $(yz)'''$, $(zx)'''$ und den Kreis $u'''$ übertragen, so sind für die Figur in der dritten Tafel die Voraussetzungen des Hülfssatzes (5.) erfüllt. *Dem entsprechend bilden die drei Strecken* $O'''X'''$, $O'''Y'''$, $O'''Z'''$ *die zur Ebene* $(e_1, e_2)$ *orthogonale Projektion von zwei und nur von zwei in Bezug auf die genannte Ebene symmetrisch gelegenen gleichschenklig-rechtwinkligen Achsenkreuzen.* Deren Endpunkte seien wie oben bez. mit $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ und $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ bezeichnet. *Diese Punkttripel und damit die beiden Achsenkreuze selbst sind dann auch in der Figur im Aufriſs eingezeichnet;* im Grundriſs haben wir uns, um die Übersichtlichkeit der

---

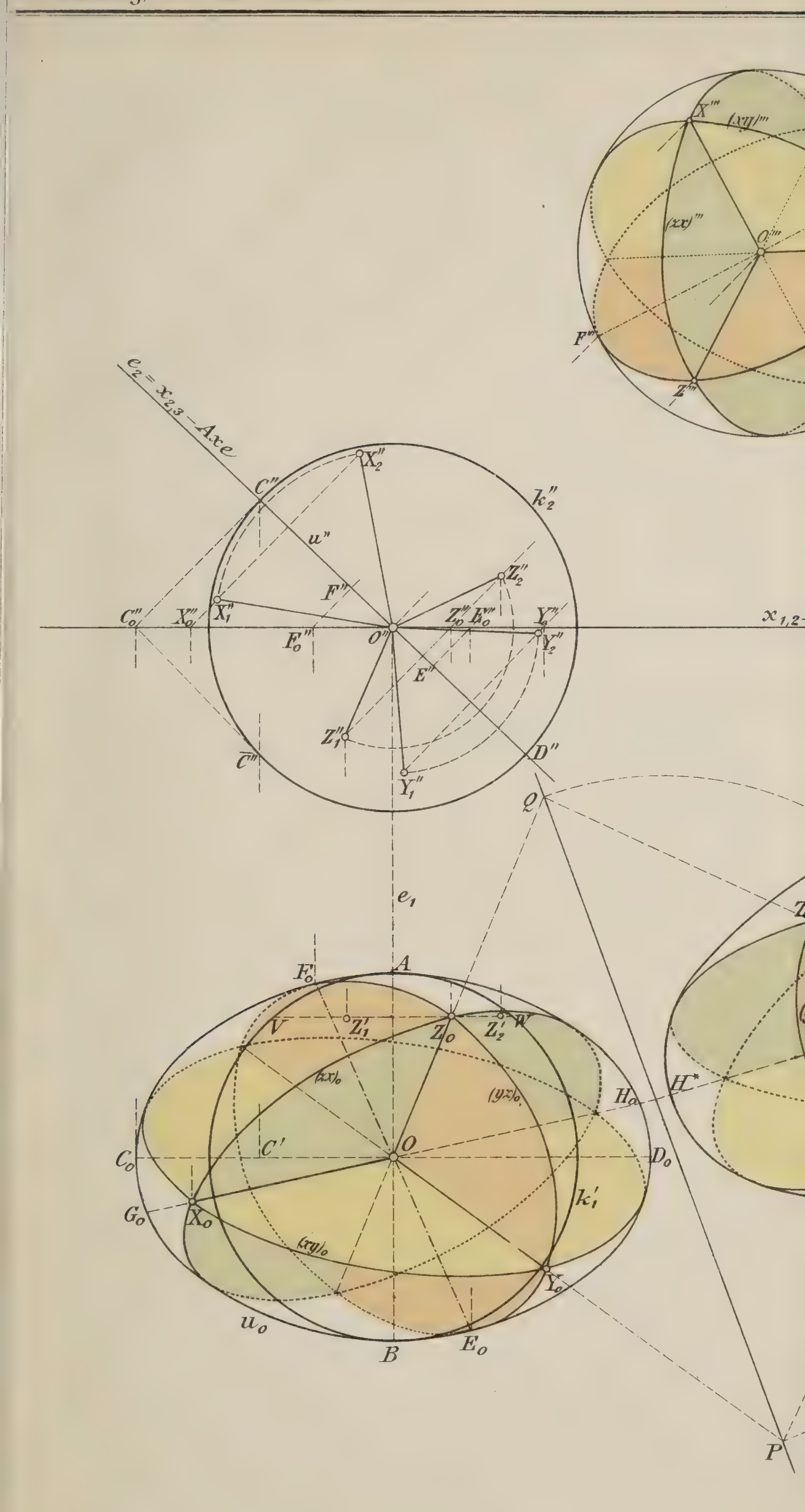
1) Diese Kugel wird vielfach auch von den anderen Autoren zum Beweise des Pohlkeschen Satzes benutzt, so von v. Deschwanden, Peschka, Mandl, Beck, Schur.

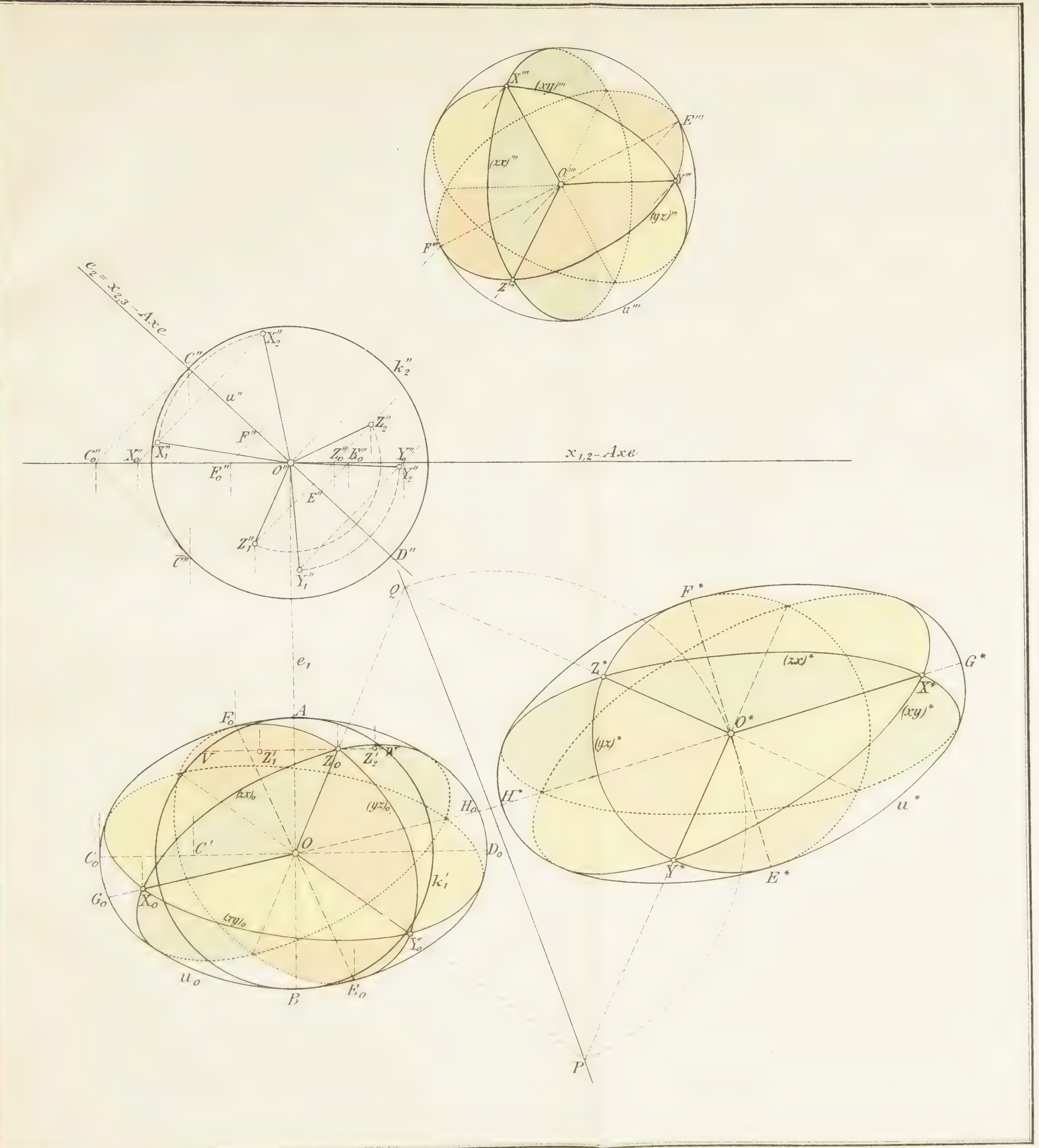
Figur nicht zu stören, begnügt, allein die Punkte $Z_1'$ und $Z_2'$ einzuzeichnen; es liegen ja z. B. die Punkte $Z_1'$ und $Z_2'$ auf der zur $x_{1,2}$-Achse parallelen Geraden durch $Z_0$, welche den Kreis $k_1'$ in den Punkten $V$, $W$ schneidet, und die Punkte $Z_1''$ und $Z_2''$ auf der Senkrechten von $Z'''$ zur $x_{2,3}$-Achse und auf dem Kreise um $O''$ mit $VW$ als Durchmesser. Da die zur Ebene $(e_1, e_2)$ orthogonale Projektionsrichtung mit der Richtung $C_0C$ identisch ist, *so sind also auch die gegebenen Strecken* $OX_0$, $OY_0$, $OZ_0$ *die Parallelprojektionen der konstruierten Achsenkreuze* $OX_1Y_1Z_1$ *und* $OX_2Y_2Z_2$ *in der genannten Richtung.*

Hätten wir statt $C_0C$ die Projektionsrichtung $C_0\overline{C}$ bevorzugt, so würden wir durch eine ganz analoge Konstruktion *noch zwei rechtwinklig-gleichschenklige Achsenkreuze* $OX_3Y_3Z_3$ *und* $OX_4Y_4Z_4$ *erhalten haben, die aus den vorigen sich durch Spiegelung an der ersten Tafel ergeben.* Die im allgemeinen Falle erhaltenen 4 Achsenkreuze sind daher in der That auch zu je zweien gleichsinnig, wie es unser Satz (1.) behauptet. Da unsere Überlegung zugleich zeigt, daſs es noch andere Achsenkreuze der verlangten Eigenschaft nicht geben kann, so ist hiermit der Beweis des Pohlkeschen Satzes vollständig geführt.

Einen entschiedenen Vorzug gegenüber allen anderen Beweisen dieses Satzes glauben wir dem unsrigen deswegen zuerkennen zu dürfen, weil mit dem Beweise zugleich die Konstruktion der Achsenkreuze Hand in Hand geht und unsere Überlegungen sich allein solcher Hülfsmittel bedienen, welche sich auf die verwandten Eigenschaften der orthogonalen Axonometrie und Kavalierperspektive stützen. Besonders wenn an die Vorlesung über Axonometrie sich Zeichenübungen anschlieſsen, ist es äuſserst erwünscht, bei der sich darbietenden Aufgabe, die Figur der Tafel zu zeichnen, Gelegenheit zu haben, mit dem einzelnen Schüler die ihm etwa entgegentretenden Schwierigkeiten besprechen zu können.

---

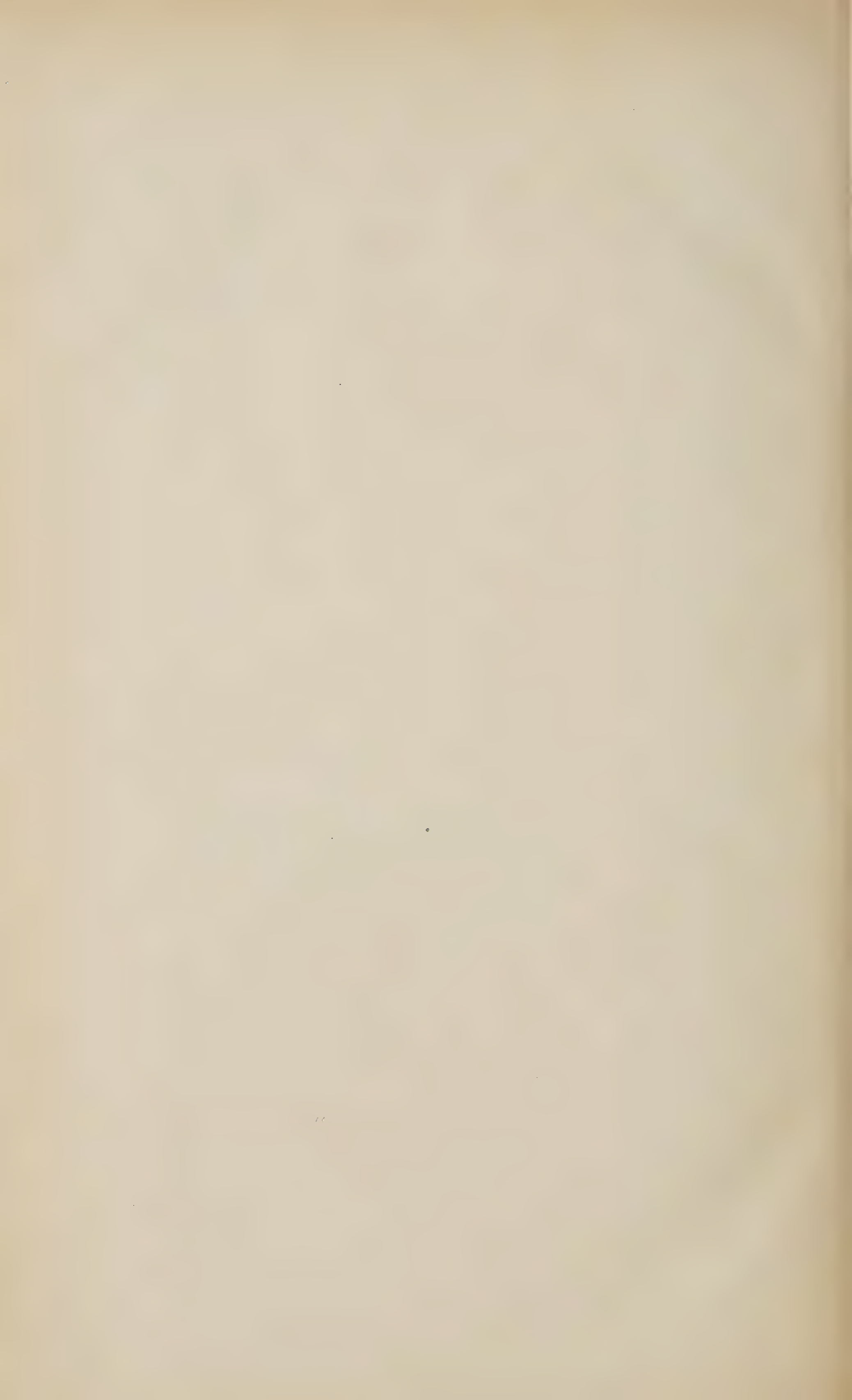

$e_2 = x_{2,3}$ – Axe
$k_2''$
$u''$
$x_{1,2}$
$e_1$
$u_0$
$k_1'$
$(xy)_0$
$(zx)_0$
$(yz)_0$





G Teubner, Leipzig
Lith u Druck v Eschebach & Schaefer, Leipzig





# Kleinere Mitteilungen.

## Preisaufgaben für 1904.

**Académie Royale de Belgique.** 1. Faire l'exposé des recherches sur les phénomènes critiques en Physique. Compléter nos connaissances sur cette question par des recherches nouvelles. — Preis 600 Frs.

2. On demande des recherches nouvelles sur la viscosité des liquides. — Preis 600 Frs.

3. On demande de nouvelles recherches sur la conductibilité calorifique des liquides et des dissolutions. — Preis 600 Frs.

4. Faire l'historique et la critique des expériences sur l'induction unipolaire de Weber, et élucider, au moyen de nouvelles expériences, les lois et l'interprétation de ce fait physique. — Preis 800 Frs.

Die Arbeiten können französisch oder flämisch abgefaßt sein. Sie müssen vor dem 1. August 1904 an den ständigen Sekretär (à M. le Secrétaire perpetuel, au Palais des Académies, Bruxelles) eingesandt werden.

---

**Académie des Sciences de Paris.** Prix Vaillant (4000 Frs.): Déterminer et étudier tous les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les divers points de la figure décrivent des courbes sphériques. Die Manuskripte sind ohne Verfassernamen und mit Kennwort versehen vor dem 1. Oktober 1904 einzusenden.

---

## Preisaufgabe für 1905.

**Académie des Sciences de Paris.** Prix Damoiseau (2000 Frs.): Il existe une dizaine de comètes dont l'orbite pendant la période de visibilité s'est montré de nature hyperbolique. Rechercher, en remontant dans le passé et tenant compte des pertubations des planètes, s'il en était ainsi avant l'arrivée de ces comètes dans le système solaire. Frist: 1. Juni 1905.

---

## Rechenmaschine „Millionär".

Wir haben in dieser Zeitschrift Band 46 (1901), S. 255 eine Anfrage, die gegenwärtig als einzige im Handel befindliche wirkliche Multiplikationsmaschine[1]) von Otto Steiger betreffend, beantwortet und können heute

1) Die etwas ältere, schon auf denselben Gedanken beruhende Multiplikationsmaschine von Léon Bollée (vergl. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. 1, S. 970—972), welche im Conservatoire des Arts et Métiers in Paris zu sehen ist und sich 1900 auf der Weltausstellung zu Paris befand, wird wegen ihres hohen Preises (2500 Frs.) nicht mehr hergestellt. Die neue Multipli-

mitteilen, daß der Fabrikant, Ingenieur Hans W. Egli in Zürich II, den Vertrieb der Maschine wieder selbst in die Hand genommen hat, wodurch der Preis, der bis auf 1200 Mk. gesteigert worden war, erfreulicherweise auf 1000 Mk. gesunken ist. Der von dem seitherigen Vertreter der Maschine ihr beigelegte Handelsname „Millionär" ist beibehalten worden.

---

### Auskünfte.

*J. B., B.* Auch auf dem Gebiete der Rechenmaschinen hat die Sucht um sich gegriffen, möglichst fremdartig klingende, zur Sache in keiner Beziehung stehende Handelsnamen zu erfinden. Hinter „Monopol"-Simplex bezw. -Duplex verbirgt sich Küttners Rechenmaschine, die bekanntlich zu den besten „erweiterten Additionsmaschinen" (vergl. Encyklopädie der mathem. Wiss. Band 1, S. 970) gehört, und zwar bezeichnet „Duplex" die Maschine mit der sehr nützlichen Zehnerübertragung im Quotienten (Preis bei 6stelligem Multiplikanden, 7stelligem Quotienten, 12stelligem Produkt 650 Mk., mit $8 \times 9 \times 16$ Stellen 750 Mk.). Hersteller: Kontrollkassen- und Rechenmaschinenfabrik „Monopol", Aktiengesellschaft, Dresden; Vertreter: Paul Hausenberg, Dresden-A., Nürnbergerstraße 46. Die gleiche Gesellschaft stellt die Additionsmaschine mit Posten- und Summendruck von Heinitz, die deutsche Mitbewerberin der amerikanischen selbstschreibenden Additionsmaschine von Burrough (vergl. Encyklopädie Band 1, S. 963 und 964), jetzt auch mit *elektrischem Antriebe* her; Preis für Gleichstrom 1300 Mk.

---

## Bücherschau.

**F. Klein, Anwendungen der Differentialrechnung und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien.** Vorlesung gehalten im Sommersemester 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. B. G. Teubner, Leipzig 1902.

Der Verfasser stellt in den Vordergrund seiner Betrachtung den Gegensatz zwischen der Mathematik, wie sie bei allen ins Einzelne gehenden Anwendungen, welche die Wirklichkeit darstellen, zur Geltung kommt und derjenigen, die allein mit den begrifflichen Abstraktionen arbeitet.

Auf der ersten Stufe der mathematischen Erkenntnis macht sich dieser Unterschied noch nicht geltend. Der Lehrer der Mathematik wird nicht damit anfangen, seinen Schülern auseinanderzusetzen, dafs eine gerade Linie,

---

kationsmaschine von Prof. Selling ist noch nicht in den Handel gekommen. Auf Anfrage teilt uns ihr Erfinder mit, daß die Auslegung eines neuen Patentes vom 8. Januar d. J. nahe bevorsteht, daß seine Maschine viel mehr leiste (auch die automatische Kopierung aller eingeführten und sich ergebenden Zahlen) und dank ihrer vollständig neuen Zehnerübertragung viel leichter, genauer und billiger herzustellen sei, als alle bisherigen.

eine Kugel, eine Ebene in Wirklichkeit nicht vorkommen, sondern dafs es nur Abstraktionen seien, zweckmäfsig gebildet, um Lehrsätze einfach auszusprechen. Er wird die Schüler zunächst in dem Glauben lassen, dafs die mathematischen Begriffe sich mit der Wirklichkeit decken. Auf einer höheren Stufe dagegen mufs die Aussprache erfolgen und erfolgt von selbst, wenn die Schüler ihre Kenntnisse anwenden lernen, um die Wirklichkeit bis ins Detail hinein zu verfolgen. Wenn man eine Länge oder eine Zeit oder die Intensität einer Eigenschaft mifst, so merkt man alsbald, dafs das Resultat einer brauchbaren Messung nicht eine Zahl ist, sondern ein Intervall zweier Zahlen, zwischen denen die gemessene Gröfse liegt. Infolge davon ist die Abhängigkeit von zwei veränderlichen mefsbaren Gröfsen nicht eine Funktion, sondern ein Funktionsstreifen. Die Erkenntnis, dafs jede Beobachtung mit einem Fehler behaftet ist, ja, dafs ohne Abschätzung der Genauigkeit das Resultat der Beobachtung jeden Wert verliert, ist keineswegs schon so alt. Jordan giebt den amüsanten Ausdruck einer alten Verordnung an, die den Feldmesser verpflichtet, „bei seinem Eide ganz genau“ zu messen. Erst das neunzehnte Jahrhundert hat über diese Dinge allgemeine Aufklärung gebracht. Zugleich aber hat die immer weiter gehende Spezialisierung im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts dahin geführt, dafs die Mathematiker im engeren Sinne sich immer mehr auf das Gebiet zurückgezogen haben, wo nur mit den abstrakten Begriffen operiert und nicht ins empirische Detail gegangen wird (Klein nennt das „die Präzisionsmathematik“), während die „Approximationsmathematik“ den Astronomen, Geodäten, Ingenieuren, Physikern u. s. w. mehr und mehr überlassen wurde.

Diese Trennung ist zu bedauern und zwar von beiden Seiten. Denn den Mathematikern im engeren Sinne geht dadurch vielfache Anregung verloren, die uns die Probleme der Wirklichkeit bieten, und die ausübenden Mathematiker müssen auf die Hilfe all dieser geschulten Kräfte verzichten.

Klein möchte hier vermittelnd wirken und diese Vorlesung ist ein Beitrag dazu. Im Hinblick auf die Anwendungen werden die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung besprochen, gleich lesenswert für den reinen sowohl wie für den ausübenden Mathematiker. Was ist unter einer empirischen Kurve zu verstehen? Inwiefern können wir sie als differentiierbar ansehen? Wie werden empirische Funktionen genähert dargestellt? Das sind Fragen der Approximationsmathematik. Wie ist der Begriff einer Kurve zu fassen vom präzisionstheoretischen Standpunkt aus? Welche Vorsicht hier nötig ist, zeigt der Verfasser schlagend an dem Beispiel von Peano, wo die rechtwinkligen Koordinaten $x$ und $y$ zwei stetigen Functionen von $t$ gleich gesetzt werden $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$. Die Gröfse $t$ durchläuft die Werte von 0 bis 1 und die „Kurve“ $x$, $y$ füllt dabei die Fläche eines Quadrates vollkommen aus, derart, dafs jeder Punkt des Quadrats mindestens einem entsprechenden Werte von $t$ angehört.

Die Ausarbeitung hat etwas von der Frische des gesprochenen Wortes. Offenbar ist möglichst der Wortlaut getreu wiedergegeben. Freilich laufen nun auch Flüchtigkeiten mit unter, die der Rede eher verziehen werden als der Niederschrift.

Auf S. 124, Z. 13 ist der Fehler der Simpsonschen Regel falsch angegeben, es müfste $f^4(\xi)$ statt $f^3(\xi)$ heifsen. Der Satz auf S. 332: „In der Nähe des gefährlichen Kreises wird durch kleine Ungenauigkeiten der

Messung die theoretische Lage des Punktes aufserordentlich stark beeinflufst“ ist nicht richtig. Es ist gerade das Feine der Jordanschen Untersuchung, dafs sie diese Behauptung widerlegt, die eine oberflächliche theoretische Betrachtung zu ergeben scheint (den Praktiker klopft schon die Erfahrung auf die Finger). Dabei ist die Jordansche Figur auf S. 333a abgedruckt, auf der man sich überzeugen kann, dafs in der Nähe jedes der drei Zielpunkte Gebiete sind, wo die Genauigkeit sehr grofs wird, obgleich man dem gefährlichen Kreise sehr nahe ist.

Das Beispiel auf S. 331 ist nicht gut gewählt. Denn ein Seemann wird in solchem Fall die Lage seines Schiffes durch Kompafspeilungen bestimmen, was schneller geht und nur zwei bekannte Zielpunkte voraussetzt, ganz abgesehn davon, dafs man nicht leicht einen Ort auf der Erde findet, von dem man gleichzeitig drei Leuchttürme sieht. Beim Feldmessen auf dem Lande dagegen ist die Kompafspeilung im allgemeinen nicht genau genug, und es mufs die Pothenotische Bestimmung angewendet werden.

Aber diese kleinen Mäkeleien sollen gegen das Buch im ganzen genommen nichts sagen, dessen Studium uns viel Belehrung und Genufs gebracht hat.

Hannover-Kirchrode. C. Runge.

---

**Lorenz, H., Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen.** Leipzig bei B. G. Teubner. 1901.

Das Problem der „Massendrücke“ im Mechanismus mit hin- und hergehenden Teilen hat seit dem Jahre 1870 durch den Einflufs Radingers ein besonderes Interesse in den Kreisen der Maschinen-Ingenieure erhalten. Eigentlich war dieses Problem in gewissem Umfange schon in den dreifsiger Jahren des vorigen Jahrhunderts durch die Franzosen Navier, Coriolis und Poncelet ziemlich ausführlich behandelt. Aber die Ingenieure hatten diese Resultate in der langen Zwischenperiode fast vollständig vernachlässigt und bei der Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades nur noch die Massen der rotierenden Teile berücksichtigt. Der Einflufs der oscillierenden Massen auf das Fundament war allerdings bei Lokomotiven (Redtenbacher, Yvon Villarceau) wiederholt Gegenstand theoretischer Untersuchungen, wurde jedoch für stehende Maschinen wenig beachtet.

Der Verfasser der vorliegenden Monographie hat mit grofser Sachkenntnis dieses Gebiet der Maschinenmechanik behandelt.

Im ersten Kapitel entwickelt er die Grundlagen aus der theoretischen Mechanik, indem er eine Massenkinematik der Kurbelmechanismen systematisch aufbaut. Hier findet namentlich das Massenausgleichungsproblem mehrkurbeliger Maschinen eine ausführliche Darstellung, indem der Verfasser seine eigenen Untersuchungen methodisch ausgearbeitet dem Leser vorführt. Dafs die Schlick-Schubertsche Lösung des Ausgleichungsproblems eine ihrer Bedeutung entsprechende Darlegung erfahren hat, braucht hier kaum erwähnt zu werden, da schon der Titel des Buches darauf hinweist.

Für den Ingenieur wird es besonders interessant sein, zu sehen, dafs die Massenverteilung in einem einzelnen Gliede des Mechanismus, wie dies auch gestaltet sein mag, nur insofern die kinetischen Ansatzgleichungen beeinflufst, als die Schwerpunktslage und das Trägheitsmoment in Be-

tracht kommt. Die häufig willkürlichen Verlegungen der Massen zum Zwecke einer Vereinfachung der theoretischen Behandlung sollte man also durchaus vermeiden. Die eigentliche Schwierigkeit liegt auch thatsächlich, wie namentlich die Paragraphen 8 und 9 des Lorenzschen Buches zeigen, welche sich mit dem Balanciergetriebe beschäftigen, nicht in der strengen Berücksichtigung der gegebenen Massenverteilung, sondern in der Bewältigung der geometrischen Konnexbedingungen, die die Eigenart des Mechanismus charakterisieren. Hier müssen mehrere Hilfswinkel aus trigonometrischen Gleichungen eliminiert werden, da der ganze Bewegungsvorgang einer zwangläufigen Mechanik doch nur von einer variablen Gröfse abhängen kann. Der Verfasser sieht sich genötigt, bei diesem Eliminationsgeschäft Abkürzung durch Benutzung binomischer Reihenentwicklungen und nachträgliche Einführung spezieller Mafsverhältnisse ein handliches Resultat zu erreichen. Dem Referenten erscheint die alte Methode von Poncelet (Anwendung der Mechanik auf Maschinen, deutsch von Schnuse, Bd. 1) allgemeiner und einer Ausgestaltung fähig, welche allen praktischen Anforderungen genügt.

Das zweite Kapitel der vorliegenden Monographie behandelt die Kinetik der Kurbelgetriebe im Anschlufs an das Prinzip der lebendigen Kräfte, also insbesondere das treibende und widerstehende Kraftfeld, den Verlauf der Winkelgeschwindigkeit und die davon abhängigen Schwankungen im Drehmoment mehrkurbeliger Maschinen, insofern die Glieder derselben als starr vorausgesetzt sind.

Die beiden letzten Paragraphen bringen die Untersuchungen des Verfassers über den Einflufs elastischer Formänderungen auf die Bewegung der Welle. Hier ist es nun schwer, die Abhängigkeit der Fehlergrenzen des Resultates von den Voraussetzungen festzustellen, welche zu der Differentialgleichung der Torsionsschwingungen und den speziellen Grenzbedingungen geführt haben. Der gegenwärtige Zustand der Analysis und der Elastizitätstheorie ermöglicht eine mathematische Durchführung des Problems unter allgemeineren Voraussetzungen und namentlich ein Eingehen auf die Stabilitätsfrage mehrfach gelagerter Wellen mit Berücksichtigung der Biegungsschwingungen. Eine solche Untersuchung würde nicht allein eine exakte Prüfung der in dem vorliegenden Werke gewonnenen Resultate ermöglichen, sondern auch voraussichtlich die Beobachtungsmethoden in betreff des Schwingungszustandes langer Wellen in möglichst sichere Bahnen lenken.

Zum Schlufs sei das Werk ebensowohl den Mathematikern, welche sich über die behandelten technischen Probleme sachlich zu orientieren wünschen, als auch den Ingenieuren empfohlen, für die es allerdings in erster Linie geschrieben ist.

Karlsruhe i. B. Heun.

---

**Schubert, H., Theorie des Schlickschen Massenausgleiches bei mehrkurbeligen Dampfmaschinen.** Leipzig, bei G. J. Göschen. 1901.

Insofern man die mehrcylindrige Dampfmaschine als einen Mechanismus von einem Grad der Freiheit betrachtet, der an verschiedenen Stellen gestützt ist und unter dem Einflufs eines bestimmten Kraftfeldes steht, kann man die Frage aufwerfen, welche Reaktionen das stützende System von

seiten der beweglichen Teile erleidet. Bei einer stehenden Maschine muſs das feste Fundament geeignet sein, diese Kräfte dauernd ohne Störung seines Zusammenhanges aufzunehmen, bei einem Fahrzeug dagegen wird dieses selbst in seinem Bewegungszustande in gesetzmäſsiger Weise beeinfluſst. Bisher hat man immer die ziemlich willkürliche Voraussetzung gemacht, daſs das den Mechanismus stützende System als ein starrer Körper angesehen werden könne. Nach dem Ansatze, welcher dem d'Alembertschen Prinzip zu Grunde liegt, hat man unter dieser Annahme nur die Resultante und das Gesamtmoment aller verlorenen Elementarkräfte zu bilden, um die Beanspruchung der Unterlage vollständig zu kennen. Diese beiden Vektoren resp. ihre sechs Komponenten lassen sich also unmittelbar als Maſs der Beanspruchung der ganzen Stützung ansehen, und man hat auf diese Weise einen bestimmten Ausgangspunkt gewonnen, um weitere Fragestellungen anzuknüpfen. Zunächst hat man das Problem vom Standpunkt der Massenkinematik aus betrachtet und die Bedingungen aufgestellt, unter denen die von den Massen der bewegten Teile herrührenden Reaktionen möglichst klein werden. Würde ein Mechanismus in einem Kraftfelde stehen, dessen Verlauf keinerlei Gesetzmäſsigkeit erkennen lieſse, dann wäre die kinematische Frage nach einer möglichst vorteilhaften Massenausgleichung in der That das einzige, was man in der Erfassung der beiden Reaktionsvektoren (Resultante und Moment) für die Stützkräfte leisten könnte, denn der dynamische Bestandteil dieser Gröſsen entzöge sich jeglicher theoretischer Behandlung. Anders, wenn das Kraftfeld ein mathematisch faſsbares, wie namentlich bei dem stationären Gang eines Fahrzeuges, ist. Hier tritt neben das Problem des Massenausgleiches ein anderes durchaus kinetostatisches, nämlich die Frage, wie man ein Minimum der Ungleichmäſsigkeit in den Komponenten der Reaktionsvektoren oder eventuell unbedingte Minimalwerte derselben erreichen kann. Man sieht auch sofort ein, daſs im allgemeinen dieses kinetische Beanspruchungsproblem gar nicht die Ausgleichung der Massenwirkungen als solche verlangt, ja nicht einmal gestattet, weil in den meisten Fällen eine technische Einwirkung auf den Verlauf des totalen Kraftfeldes (d. h. mit Einschluſs der widerstehenden Kräfte) — soweit er nicht unmittelbare Folge der Phasendifferenzen der einzelnen Kurbelbewegungen ist — kaum möglich ist.

Schwieriger gestaltet sich das kinetostatische Beanspruchungsproblem, sobald man die Voraussetzung der völligen Starrheit des stützenden Systems fallen läſst und die elastischen Verhältnisse desselben mit in Betracht zieht. Jetzt muſs man die Reaktion jeder Stütze einzeln feststellen, um das Kräftesystem kennen zu lernen, welches neben den Grenzbedingungen die Deformationen der Unterlage bestimmt. Die sachgemäſse Durchführung dieser Untersuchung wird — namentlich bei etwaiger weiterer Steigerung der Kolbengeschwindigkeit — nicht nur eine wesentliche Bereicherung der theoretischen Maschinenlehre darstellen, sondern auch auf manche jetzt noch der Polemik unterliegende Fragen des Dampfmaschinenbaues das wünschenswerte Licht werfen und insbesondere den Versuchsmethoden einen sicheren Weg bauen.

Die vorliegende Monographie beschäftigt sich mit dem kinematischen Problem des Massenausgleiches unter der Voraussetzung einer einfachen starren Unterlage, dessen Stellung in der *allgemeinen* Theorie der Fundamentreaktionen wir oben charakterisiert haben. Seit den ausführlichen Unter-

suchungen Yvon Villarceaus über die Stabilität der Lokomotiven (Paris 1852) sind die Bedingungsgleichungen des Massenausgleiches an mehrkurbeligen Maschinen in *allgemeinster* Form bekannt, sie erhielten aber erst im Anschluſs an das O. Schlicksche Verfahren eine eingehende und zweckentsprechende besondere Bearbeitung durch den Verfasser gegenwärtiger Schrift, deren wesentlicher Inhalt daher auch durch diese Bestrebungen gekennzeichnet ist.

Nach einer elementaren Begründung der acht Bedingungsgleichungen, welche den Vernachlässigungen der zweiten und höheren Potenzen der Verhältnisse von Kurbelarm zur Länge der Schubstange entsprechen, behandelt der Verfasser zunächst die Schlicksche Ausgleichung. Diese führt zum Verschwinden der vertikalen Resultante der Trägheitskräfte (stehende Maschine) und des von ihnen berührenden Momentes unter der Voraussetzung unendlich langer Schubstangen bei vier Kurbeln.

In einem weiteren Abschnitte werden die Bedingungen des vertikalen Massenausgleiches bei Berücksichtigung der ersten Potenz des Schubstangenverhältnisses untersucht, was zu ausgedehnten trigonometrischen Betrachtungen veranlaſst.

Die Erfüllung von sechs Bedingungen, welche das Verschwinden der Glieder erster und zweiter Ordnung der vertikalen Massenwirkung und der Glieder erster Ordnung des entsprechenden Momentes darstellen, bezeichnet der Verfasser als verbesserte Schlicksche Ausgleichung und kommt bei der eingehenden Verfolgung dieses Falles zu einem recht interessanten Resultate.

Die Erfüllung aller acht Bedingungsgleichungen endlich (die „völlige Ausgleichung") bildet den Schluſs der Untersuchung. Sie ist bei vier Kurbeln unmöglich, wie nachgewiesen wird, und auch bei fünf Kurbeln nicht erreichbar, wenn keine Kurbel einer anderen parallel sein darf.

Gerade die Beschränkung, welche sich der Verfasser vorliegender Schrift auferlegt hat, indem er die elementar-mathematische Diskussion der acht Grundgleichungen als gesondertes und in sich abgeschlossenes Thema mit anerkennenswerter Gründlichkeit behandelt, macht dieselbe zu einer entschieden wertvollen Bereicherung der technischen Litteratur und bietet auch gleichzeitig dem Mathematiker die Möglichkeit, ein zwar prinzipiell einfaches, aber in seiner expliziten Ausgestaltung doch recht umfangreiches Gebiet der Forschung mühelos zu übersehen.

Karlsruhe i. B. HEUN.

---

**Bach, C., Die Maschinenelemente, ihre Berechnung und Konstruktion mit Rücksicht auf die neueren Versuche.** Bd. 1 Text, Bd. 2 Tafeln und Tabellen. 8. Aufl. Stuttgart bei A. Bergsträſser. 1901.

Die seit langen Jahren von dem Verfasser verfolgten Bestrebungen, sowie Inhalt und Stoffanordnung des vorliegenden Werkes sind so weit und breit bekannt, daſs es nicht erforderlich erscheint, hier auf Einzelheiten des Textes einzugehen. Andererseits mag es vielleicht nicht überflüssig sein, einige Bemerkungen über die allgemeine Stellung des Buches zu den theoretischen Hilfswissenschaften des Technikers anzufügen, namentlich mit Rücksicht auf die eigenartige Behandlung der mannigfachen Gebiete der technischen Forschungen, die in ihrer Gesamteinheit unter der Bezeichnung „Maschinenelemente" nicht nur einen wichtigen Lehrgegenstand der Studierenden

unserer Hochschulen, sondern auch für den im praktischen Leben stehenden Maschinenbauer eine wohlgeordnete Schatzkammer darstellen.

Der Formenreichtum und die vielfältigen Funktionen der einzelnen Maschinenteile machen eine anatomische Beschreibung sowie eine möglichst prägnante Charakterisierung ihres physikalischen und mechanischen Verhaltens in dem Betriebszustande der ganzen Maschine notwendig. Den Blick auf den einzelnen — aus seinem natürlichen Zusammenhange losgelösten — Teil gerichtet, sucht der Konstrukteur in einem gewissen Stadium seiner Thätigkeit eine möglichst zweckdienliche Wahl zu treffen, indem er Gestalt, Material, Festigkeit (mit besonderer Rücksicht auf maximale Beanspruchungen), Abnützung, Lagerungsverhältnisse, bequeme Bedienung und Kosten in Betracht zieht und diese mannigfachen Faktoren in ihren Werten gegeneinander abwägt. Für die Entscheidung dieser Sonderfragen sind die „Maschinenelemente“ — wenn auch nicht notwendig in der Form eines systematischen Buches — sein Ratgeber. Nachdem so ein vollständiges Projekt entworfen ist, treten Fragen auf, die prinzipiell auf jenem anatomischen Wege nicht erledigt werden können. Gerade der moderne Maschinenbau mit seinem Streben nach grofser Geschwindigkeit bei möglichst ökonomischer Verwendung des Materials hat zur Berücksichtigung mannigfacher kinetostatischer Probleme hingeführt und ist damit auf ein technisch-wissenschaftliches Niveau gelangt, für welches die „Maschinenelemente“ nach wie vor die unbedingt erforderliche Vorstufe bilden, aber nicht mehr alle notwendigen Hilfsmittel liefern.

Das v. Bachsche Werk trägt — allerdings in dem Rahmen seiner nächsten Bestimmung — diesen weitergehenden Anforderungen Rechnung, indem im sechsten Abschnitte das Wichtigste aus der Massenkinematik des Kurbelgetriebes, der Kinetik und Kinetostatik der eincylindrischen Dampfmaschine dem Leser und Benützer geboten wird. Auch in dem Kapitel über Absperrvorrichtungen ist auf die Bedeutung der kinetischen Vorgänge und die einschlägliche Litteratur mit der gröfsten Sorgfalt hingewiesen.

Für eine sichere und vollständige Ermittelung der Kräfteübertragung in einem bestimmten Querschnitte eines einzelnen bewegten Maschinenteiles sind Ansätze erforderlich, in denen der kinematische und dynamische Zusammenhang mit allen anderen in Bewegung begriffenen Teilen zum Ausdruck gebracht wird. Dasselbe gilt für die Lagerreaktionen. Eine vollständige Durchführung derartiger Probleme läfst sich jedoch nicht mit den in den „Maschinenelementen“ gebräuchlichen anatomischen Methoden, sondern nur durch Anwendung der systematischen Mechanik erreichen.

Karlsruhe i. B. HEUN.

---

**Haufsner, Dr. Robert, Darstellende Geometrie.** Erster Teil: Elemente und ebenflächige Gebilde. 192 S. Leipzig 1902. (Sammlung Göschen.)

Das Büchlein behandelt in vier Abschnitten die Parallelprojektion ebener Gebilde und die Affinität, die schiefe Parallelprojektion räumlicher Gebilde, die Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zu einander senkrechten Ebenen und die Darstellung ebenflächiger Gebilde bis zur Durchdringung zweier Vielflache. Es ist klar und ansprechend geschrieben und kann deshalb namentlich Anfängern, be-

sonders auch zum Selbststudium empfohlen werden. Allerdings bedürfen einige Nachlässigkeiten bei einer Neuauflage der Verbesserung; wir erwähnen nur kurz die in Fig. 43[a] gelöste Aufgabe, die ungenaue Fassung des Satzes auf S. 96, sowie die in Fig. 55 angedeutete Konstruktion. Die Ausstattung mit Figuren verdient mit Rücksicht auf den billigen Preis (geb. 80 Pfg.) besondere Anerkennung. Vielleicht dürfte es sich empfehlen, an solchen Stellen, wo zu *einer* Aufgabe zwei Figuren — in senkrechter und in schiefer Projektion — gehören, für beide Figuren in Zukunft genau dieselben Daten zu Grunde zu legen.

Braunschweig. R. Müller.

---

# Neue Bücher.[1]

### Arithmetik und Analysis.

1. Czuber, Em., Probabilités et Moyennes géométriques. Traduit de l'allemand par H. Schuermans. Gr. in-8°. Paris 1902, Hermann. Frs. 8.50.
2. Czuber, Emanuel, Wahrscheinlichkeitsrechnung u. ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik u. Lebensversicherung. 2. Hälfte. Leipzig, Teubner. M. 12. (Vollständig geb. M. 24.)
3. Goedseels, P. J. E., Théorie des erreurs d'observation. Gr. in-8° avec fig. Louvain, Peeters. Cart. Frs. 8.50.
4. Hall, H. S., A short introduction to graphical algebra. 12 mo. London 1902, Macmillan. 6 d.
5. Lipps, Gottl. Friedr., Die Theorie der Kollektivgegenstände. (Sonderabdruck aus: Wundt, Philosophische Studien, Bd. XVII.) 8°. IV u. 217 S. Leipzig 1902, Engelmann. M. 3.

S. auch Nr. 7, 45.

### Astronomie, Geodäsie, Nautik.

6. Buchholz, Hugo, Die Gyldénsche horistische Integrationsmethode des Problems der drei Körper und ihre Konvergenz. (Nova Acta Bd. 81, Nr. 3.) Halle.
7. Boccardi, J., Guide du calculateur. Astronomie, Géodésie, Navigation. 2 vol. gr. in 8°. Paris 1902, Hermann.
   1re partie: Règles pour les calculs en général. Frs. 4.
   2e partie: Règles pour les calculs spéciaux. Frs. 12.
8. Dressel, Alois, Formeln zur christlichen Zeit- u. Festrechnung. 8°. 24 S. Feldkirch, Unterberger.
9. Güssfeldt, Paul, Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen und die Entwicklung der hierfür maßgebenden mathematisch-geometrischen Begriffe. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 10; geb. M. 12.
10. Hayn, Friedrich, Selenographische Koordinaten. (Abh. Kgl. sächs. Ges. Wiss. Bd. XXVII, No. IX). Leipzig 1902, Teubner. M. 2.
11. Havinga, E., Onze sterrenhemel en het nemen van nachtelijke observaties. Met 2 groote sterrenkaarten en 4 figuren in den tekst. post 8°, 102 blz. Amsterdam 1902, Stemler. Fl. 3.

---

1) Wo das Erscheinungsjahr fehlt, ist 1903 zu ergänzen.

12. Moulton, F. R., An introduction to Celestial Mechanics. 8vo, pp. 400. London, Macmillan. 14 s.

## Darstellende Geometrie.

13. Eggers, Wilh., Lehrbuch der Schattenkonstruktion. 4°, VI u. 42 S. m. 24 Fig. u. 21 Taf. Leipzig, Seemann & Co. geb. M. 3.
14. Versluys, J., Beschrijvende meetkunde. I. 6e druk. Amsterdam, Versluys. Fl. 1.50.
15. Vetters, Karl, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Hannover 1902, Gebrüder Jänecke. M. 5.60.

## Geschichte.

16. Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2. Teil. Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. gr. 8°, XI u. 264 S. m. 39 Fig. Leipzig, Teubner. M. 10; in Leinw. geb. M. 11.
17. Königsberger, Leo, Hermann von Helmholtz. I. Bd. Mit drei Bildnissen. gr. 8°, XII u. 375 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. geb. in Leinwand M. 10, in Hlbfrz. M. 12.
18. Kosack, Emil, Heinrich Daniel Rühmkorff, ein deutscher Erfinder. Ein Lebensbild zu seinem 100. Geburtstage. Hrsg. vom Hannoverschen Elektrotechniker-Verein. gr. 8°, 36 S. m. Abb. u. 1 Bildnis. Hannover, Hahn. M. 1.20.
19. Poggendorff's biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 4. Bd. Lfg. 4 u. 5. Leipzig 1902, Barth. M. 6. — Dasselbe, Lfg. 6 u. 7. Ebenda. M. 6.

## Mechanik.

20. Hecht, Karl, Lehrbuch der reinen und angewandten Mechanik für Maschinen- u. Bautechniker. Bd. 3. Die graphischen Methoden. Dresden, Kühtmann. M. 12. geb. M. 13.
21. Janssen, A., Cours de mécanique rationelle à l'usage des ingénieurs et des officiers. In-8° avec fig. Louvain, impr. Polleunis et Ceuterick. Frs. 10.
22. Kübler, J., Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. I. Teil. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knicktheorie den Weg zur richtigen Erkenntnis!? gr. 8°, 52 S. m. 6 Fig. Leipzig 1903, Teubner. M. 1.60.
23. Patton, Eug., Beitrag zur Berechnung der Nebenspannungen infolge starrer Knotenverbindungen bei Brückenträgern, m. 5 Zusammenstellungen v. Zeichnungen, zum Gebrauche beim Entwerfen eiserner Brücken. Fol. III u. 62 S. m. Fig. Hannover 1902 (St. Petersburg, Richter). M. 4.
24. Pullen, W. W. F., Mechanics, theoretical, applied and experimental. With 318 illusts. and numerous examples. Cr. 8 vo, pp. VI—381. London, Longmans. 4 s. 6 d.
25. Schlink, Wilhelm, Über die Deformation von Häuten rhombischer Struktur unter Einwirkung von Umfangskräften, die in der Ebene der Haut liegen. Dissertation (München). Neuwied u. Leipzig 1902, Heuser.
26. Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. gr. 8°, XIII u. 603 S. m. 46 Fig. im Text u. 1 Tfl. Leipzig, Teubner. M. 21; geb. M. 23.
27. Stübler, Eugen, Bewegung einer auf horizontaler Ebene rollenden Kugel, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt. Diss. Tübingen. gr. 8°, 35 S. m. 2 Taf. Stuttgart 1902, Enderlen. M. 1.
28. Veen, H. J. van der, Graphische statiek. De berekening van balken, vakwerken en kapgebinten. Met 54 figuren. gr. 8°, 8 en 127 blz. Amsterdam, Veen. Fr. 1.90.

## Physik.

29. Arrhenius, Svante August, Lehrbuch der kosmischen Physik. 2 Teile. Leipzig, Hirzel. M. 38; geb. M. 40.
30. Bjerknes, V., Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie. Bd. II. gr. $8^0$, XVI u. 316 S. m. 60 Fig. Leipzig 1902, Barth. M. 10; geb. M. 11.50.
31. Clerke, Agnes M., Problems of Astrophysics. Containing 81 illustr. Roy. 8 vo, pp. 384. London, Black. 20 s.
32. Fricke, Hermann, Über die elastischen Eigenschaften des Leders. Diss. gr. $8^0$, 69 S. m. 25 Fig. Göttingen 1902, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 1.40.
33. Hofmann, Karl, Die radioaktiven Stoffe nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Erkenntnis. gr. $8^0$, 54 S. Leipzig, Barth. M. 1.60.
34. Horovitz, Geo., Über die Wärmeausnützung in der Gasmaschine. Diss. gr. $4^0$, 32 S. m. 21 Fig. Berlin 1902 (Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht). M. 2.
35. Kundt, August, Vorlesungen über Experimentalphysik, hrsg. v. Karl Scheel. Mit dem Bildnis Kundts, 534 Abbildungen u. einer farbigen Spektraltafel. gr. $8^0$, XXIV u. 825 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 15; geb. M. 17.50.
36. Neumann, C., Über die Maxwell-Hertzsche Theorie. 2. Abhandlung. (Abh. kgl. sächs. Gesellsch. der Wiss. Math.-phys. Klasse, 27. Bd. Nr. VIII.) Lex. $8^0$, 108 S. Leipzig 1902, Teubner. M. 3.50
37. Neumann, C., Über die Maxwell-Hertzsche Theorie. 3. Abhandlung. (Abh. kgl. sächs. Gesellsch. der Wiss. Math.-phys. Klasse, 28. Bd. Nr. II.) Lex. $8^0$, 25 S. m. 3 Fig. Leipzig 1903, Teubner. M. 1.50.
38. Pernter, J. M., Meteorologische Optik. 2. Abschn. Wien 1902, Braumüller. M. 4.20.
39. Poincaré, H., Figures d'équilibre d'une masse fluide. Leçons professées à la Sorbonne en 1900, rédigées par L. Dreyfus. In-$8^0$ avec 36 fig. Paris, Naud. Frs. 7.
40. Poynting, J. H., and Thomson, J. J., A text-book of Physics: Properties of matter. Roy. 8 vo, 236 pp. London, Griffin. 10 s. 6 d.
41. Riecke, Ed., Lehrbuch der Physik zu eigenem Studium u. zum Gebrauche bei Vorlesungen. 2. Bd. Magnetismus, Elektrizität, Wärme. 2. verb. u. verm. Aufl. gr. $8^0$, XII u. 666 S. m. 319 Fig. Leipzig 1902, Veit & Co. M. 13; geb. in Leinw. M. 14.
42. Righi, Augusto, und Dessau, Bernhard, Die Telegraphie ohne Draht. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 12; geb. M. 13.
43. Schütz, Ernst Harald, Die Lehre von dem Wesen und den Wanderungen der magnetischen Pole der Erde. Ein Beitrag zur Geschichte der Geophysik. gr. $8^0$, XII u. 76 S. m. 4 Tabellen und 5 kartographischen Darstellungen. Berlin 1902, Reimer. geb. M. 10.
44. Wildermann, Meyer, On chemical Dynamics and Statics under the influence of light. 4to. London, Dulan. 3 s. 6 d.

## Rechenapparate, Tafeln.

45. Blaine, Robert Gordan, Some quick and easy methods of calculating. A simple explanation of the theory and use of side-rule, logarithms etc. 2nd ed., revised and enlarged. 12 mo, pp. 164. London, Spon. 2 s. 6 d.
46. Dietrichkeit, O., Siebenstellige Logarithmen u. Antilogarithmen aller vierstelligen Zahlen und Mantissen von 1000 — 9999 bezw. 0000 — 9999, mit Rand-Index u. Interpolations-Einrichtung für vier- bis siebenstelliges Rechnen. Berlin, Springer. geb. in Leinw. M. 3.

**47.** Fürles Rechenblätter. Nr. 3. Rechenblatt für photographische Zwecke. 4°. Mit 1 Gelatineblatt schmal 8°. Nebst 8 S. Text. Schmal gr. 8°. Berlin, Mayer & Müller. M. 2.

**48.** Orlandi, J., Nouvelles tables tachéometriques centésimales et sexagésimales pour calculer les distances réduites à l'horizon, les différences de niveau, les coordonnées rectangulaires et les courbes. In-12. Paris 1902. Béranger. Cart. Fr. 7.50.

**49.** Wronecki, Th., Tables trigonométriques centésimales pour le tracé des courbes des voies de communication, augmentées de tables tachéométriques, suivies d'un Recueil de coordonnées polaires et de coordonnés rectangulaires, de tables donnant les éléments de raccordement des courbes et des déclivités des voies de fer et de nombreuses tables relatives à la pose des voies de fer. Gr. in-8° avec 33 fig. Constantinople 1902, Keil. Cart. Fr. 12.50.

## Verschiedenes.

**50.** Annuaire pour l'an 1903, publié par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.50.

**51.** Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht. 6. Aufl. gr. 8°, XIII u. 130 S. m. 88 Abb. Halle a. S., Schilling. M. 1; geb. M. 1.50.

**52.** Revue semestrielle des publications mathématiques rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam. Tables des matières contenues dans les cinq volumes 1898—1902 suivies d'une table générale par noms d'auteurs. Leipzig, Teubner.

**53.** Vivanti, G., Complementi di Matematica ad uso dei Chimici e dei Naturalisti. (Manuali Hoepli 329—330). Milano, Hoepli.

**54.** Opgaven, Wiskundige, met de oplossingen door de leden van het wiskundig genootschap ter spreuke voerende „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". (2) 8 (1899—1902). Amsterdam, Delsman en Nolthenius. Fl. 6.

---

## Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle einlaufenden Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Annuaire pour l'an 1903, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 50.

Arrhenius, S. A., Lehrbuch der kosmischen Physik, s. N. B. 29.

Astronomischer Kalender für 1903. Hrsg. von der k. k. Sternwarte zu Wien. 65. Jahrgang. Wien, Gerold's Sohn. M. 2.40.

Bergmeister, Herm., Geometrische Formenlehre für Mädchen-Lyceen. I. Teil. Wien 1902, Deuticke. K. 1.40; geb. K. 1.80.

Biel, B., Mathematische Aufgaben für die höheren Lehranstalten. Ausgabe für Realanstalten. I. Teil, Unterstufe. Leipzig, Freytag. geb. M. 2.50.

Bjerknes, V., Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte, Bd. II, s. N. B. 30.

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2. Teil, s. N. B. 16.

Buchholz, Hugo, Die Gyldénsche historische Integrationsmethode des Problems der drei Körper, s. N. B. 6.

Catalog mathematischer Modelle, s. N. B. 51.

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung, s. N. B. 2.

Dietrichkeit, O., Siebenstellige Logarithmen u. Antilogarithmen, s. N. B. 46.

Dressell, Alois, Formeln zur christlichen Zeit- und Festrechnung, s. N. B. 8.

Duport, J. B., Lehrbuch der Arithmetik für die erste Klasse der Mädchen-Lyzeen. Wien 1902, Deuticke. K. 1; geb. K. 1.40.

Easton, Burton, Scott, The constructive development of Group-theory. With a bibliography. (Publications of the University of Pennsylvania, Mathematics, No. 2.) Philadelphia 1902, Ginn & Co. $ —.75.

Fouët, Édouard-A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. 1ère partie (chapitres I à V). Paris 1902, Gauthier-Villars.

Fürles Rechenblätter. Blatt 1 (kubische Gleichungen 1) und Blatt 2 (kubische Gleichungen 2). Berlin, Mayer & Müller.

Furtwängler, Th., Über das Reciprocitätsgesetz der $l^{\text{ten}}$ Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn $l$ eine ungerade Primzahl bedeutet. Eine von der Kgl. Gesellsch. der Wissensch. in Göttingen preisgekrönte Arbeit. Berlin 1902, Weidmann. M. 6.

Gajdeczka, Josef, Maturitäts-Prüfungsfragen aus der Mathematik, mit Auflösungen versehen. Wien u. Leipzig, Deuticke. M. 1.20.

Güssfeldt, Paul, Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen, s. N. B. 9.

Hayn, Fr., Selenographische Koordinaten, s. N. B. 10.

Hecht, K., Lehrbuch der reinen u. angewandten Mechanik, s. N. B. 20.

Hecker, O., Bestimmung der Schwerkraft auf dem atlantischen Ozean sowie in Rio de Janeiro, Lissabon und Madrid. (Veröffentlichung des Kgl. preuß. geodät. Instituts, neue Folge Nr. 11.) Berlin, Stankiewicz.

Königsberger, Leo, Hermann von Helmholtz, s. N. B. 17.

Koppe-Diekmann, Geometrie zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten. I. Teil der Planimetrie, Stereometrie u. Trigonometrie. Ausgabe f. Reallehranstalten. 21. Aufl. Essen, Bädeker. geb. M. 2.40.

—, Dasselbe, II. Teil. 18. Aufl. Ebenda. geb. M. 2.40.

Kübler, J., Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen, s. N. B. 22.

Kundt, A., Experimentalphysik, s. N. B. 35.

Landfriedt, E., Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. (Sammlung Schubert XXXI.) Leipzig, Göschen. geb. M. 6.40.

—, Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen. (Sammlung Schubert XLVI.) Ebenda. geb. M. 3.40.

Lie, Sophus, Über Integralinvarianten und Differentialgleichungen. Videnskabsselkabets Skrifter. I. Mathematisch-naturw. Klasse. 1902. No. 1. Christiana 1902, Dybwad.

Lipps, G. Fr., Die Theorie der Kollektivgegenstände, s. N. B. 5.

Martin, Emilie Norton, On the imprimitive substitution groups of degree fifteen and the primitive substitution groups of degree eighteen. A dissertation presented to the faculty of Bryn Mawr College for the degree of Doctor of Philosophy. Baltimore 1901, The Friedenwald Company.

Martus, C. E., Maxima und Minima. Ein geometrisches u. algebraisches Übungsbuch. 2. Abdruck. Hamburg, Grand.

Müller, Emil, Lehr- u. Übungsbuch der ebenen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Lehrsatz und Konstruktionsaufgabe für Gymnasien u. Realschulen. Berlin 1903, Winckelmann & Söhne. M. 1.80, geb. M. 2.20.

Nitsche, Josef, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die I. u. II. Gymnasialklasse. Wien 1902, Deuticke. K. 1.50; geb. K. 2.

Olivier, Julius von, Was ist Raum, Zeit, Bewegung, Masse? Was ist die Erscheinungswelt? 2te bedeutend erweiterte u. verbesserte Auflage. München 1902, Finsterlein. M. 2.

Poggendorff's biographisch-litterarisches Handwörterbuch, s. N. B. 19.

Rechentafel System Pröll. Berlin, Springer. M. 3.

Revue semestrielle, s. N. B. 52.

Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge, hrsg. v. M. Noether u. W. Wirtinger. Leipzig 1902, Teubner. M. 6.

Righi, A., u. Dessau, B., Die Telegraphie ohne Draht, s. N. B. 42.

Schlink, W., Über die Deformation von Häuten, s. N. B. 25.

Schütz, Die Lehre von dem Wesen und den Wanderungen der magnetischen Pole der Erde, s. N. B. 43.

Schurig, Richard, Katechismus der Algebra. (Webers illustr. Katechismen Bd. 71.) 5. Aufl. Leipzig, Weber. M. 3.

Study, E., Geometrie der Dynamen, s. N. B. 26.

Vetters, K., Lehrbuch der darstellenden Geometrie, s. N. B. 15.

Vivanti, G., Complementi di Matematica, s. N. B. 53.

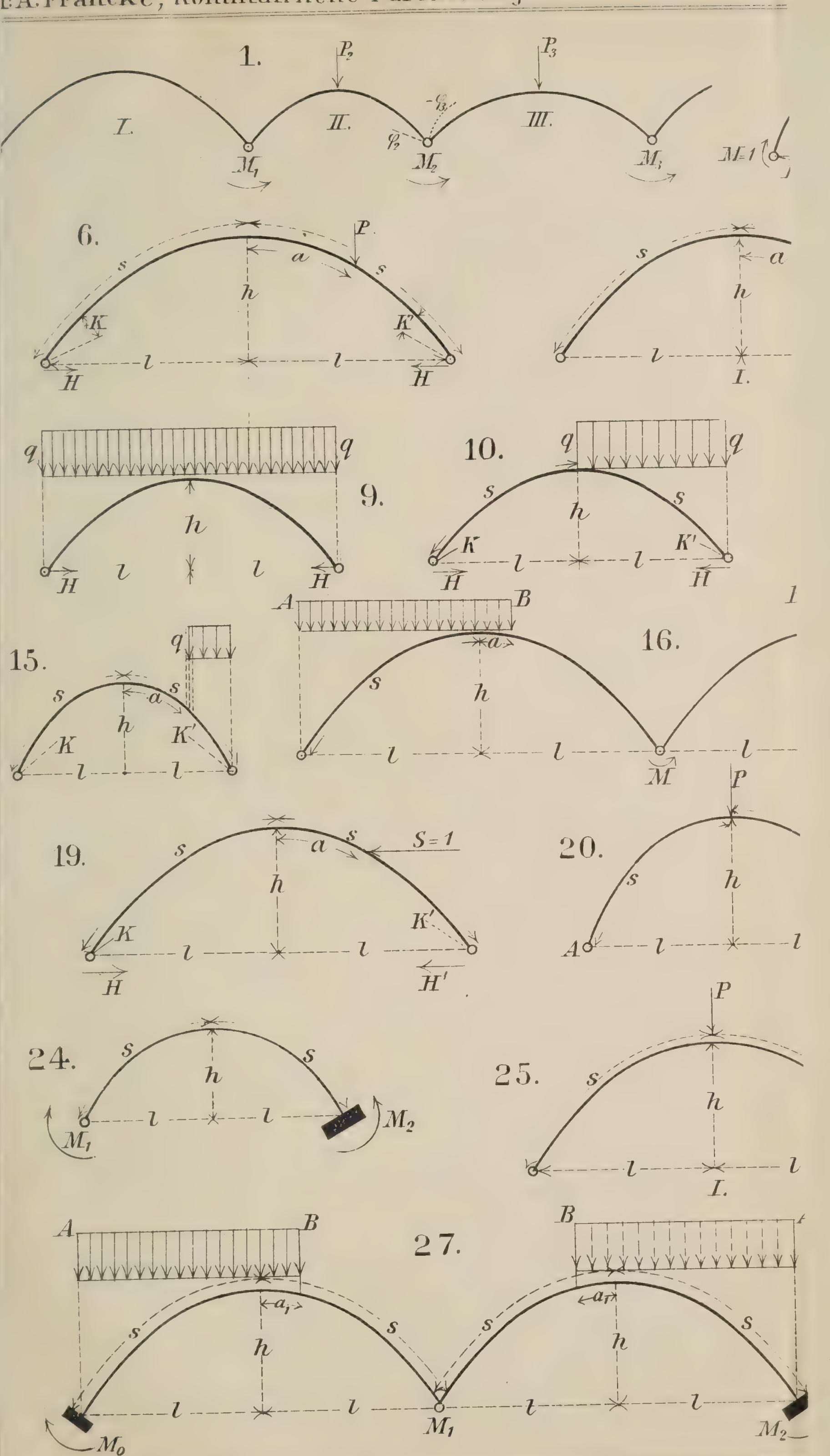
Williot, V., Études sur les nombres premiers. Ière partie, La voie de Riemann. Paris, Hermann. Frs. 3.

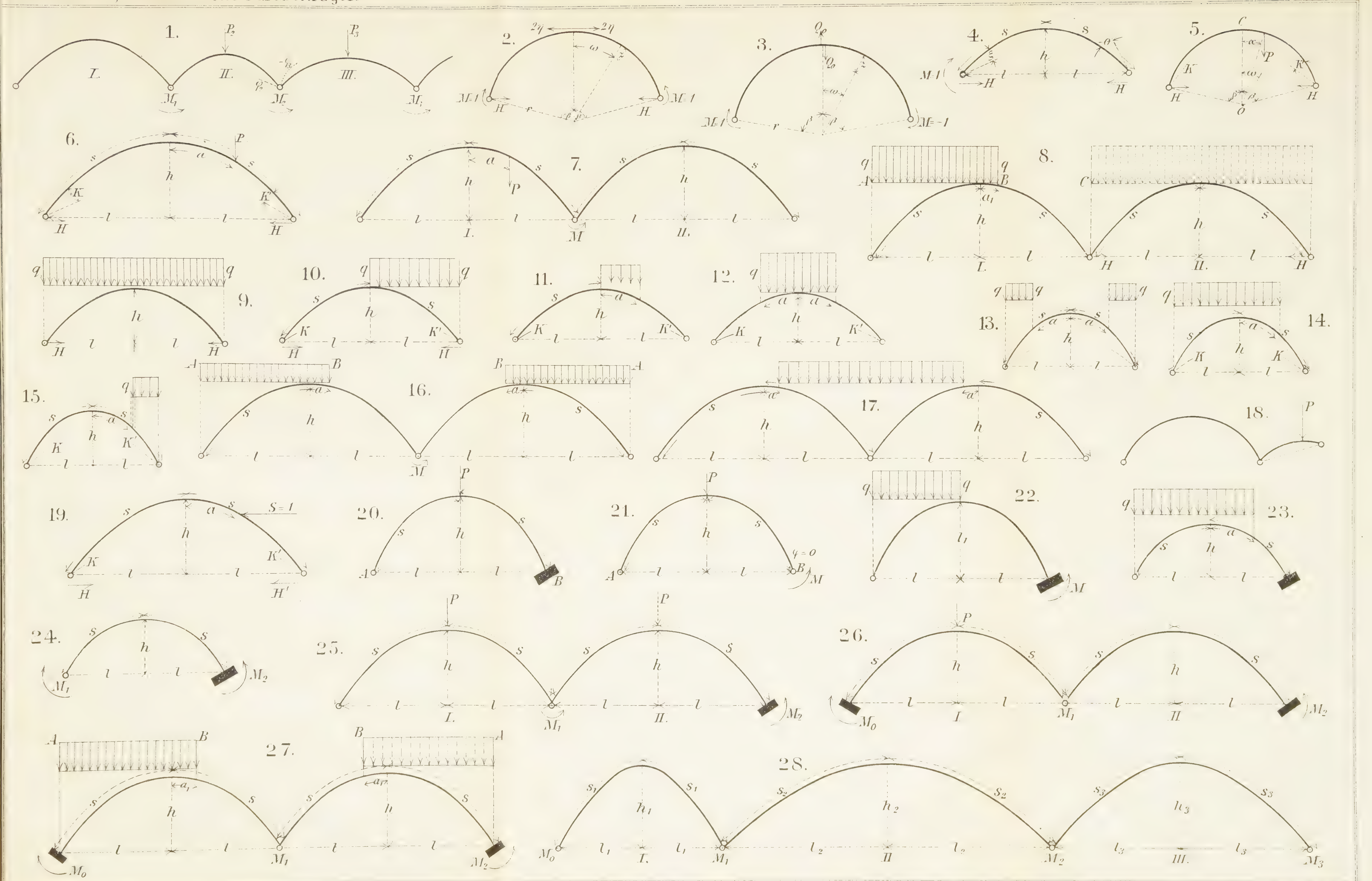
Wilski, P., Die Durchsichtigkeit der Luft über dem Ägäischen Meere nach Beobachtungen der Fernsicht von der Insel Thera aus (4. Bd. 1. Tl. von: Thera, Untersuchungen, Vermessungen u. Ausgrabungen in den Jahren 1895—1902, hrsg. von F. Frhr. Hiller von Gärtingen.) Berlin 1902, Reimer. M. 8.

Wiskundige Opgaven, s. N. B. 54.

Wrobel, E., Resultate zu dem Übungsbuch zur Arithmetik u. Algebra. I. Teil. 2. Aufl. Rostock 1902, Koch. M. 2.

Ziegler, J. H., Die universelle Weltformel und ihre Bedeutung für die wahre Erkenntnis aller Dinge. Erster Vortrag, der Versammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft vom 7.—10. September in Genf im Druck vorgelegt. 2. Aufl. Zürich 1902, Müller. M. 1.50.


1.
P2
P3
I.
II.
III.
M1
M2
M3
M=1
6.
P
s
a
h
K
K'
l
H
I.
9.
q
10.
A
B
15.
16.
M
19.
S=1
H'
20.
24.
M1
M2
25.
27.
a1
M0





Verlag v. B. G. Teubner in Leipzig





